Aritmetik İşlemlerinde Öncelik Sırası

Şükrü İlgün[*], Süheyla Elmas[**], Soner Küçük[***]

Makale Geliş Tarihi: 13/03/2017 *Makale Kabul Tarihi: 10/06/2017*

Özet

Bu çalışmada aritmetik işlemlerinde işlem öncelik sırasının sebebi üzerinde durulmaktadır. Aritmetik işlemlerde işlem öncelik sırasının sebepleri, doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemlerine dayanmaktadır. İşlem sırasındaki sıralamanın olmasının sebebi; kuvvet alma işleminin çarpmanın bir fonksiyonu, çarpmanın da toplamanın bir fonksiyonu olmasıdır. Bunun için de Peano aksiyomları ile doğal sayılar oluşturulmuş ve üzerinde işlemler tanımlanmıştır. Ayrıca bu durumun işlemsel ve kavramsal bilgiyle ilişkili olduğu ve matematik eğitiminde kavram eksenli eğitim modelinin gözden kaçırılmaması gerektiği üzerinde durulmuştur. Ayrıca matematik müfredatında bu durumun özden kaçırıldığı ve matematiğin özüne vakit harcamak yerine, sayılarda tanım ve bir dizi gereksiz kurallar silsilesini ezberlemeye vakit harcandığı üzerinde durulmuştur. Son olarak da bu öğretim faaliyetlerinin sahadaki uygulayıcısı olan öğretmenlere bu konuda bazı tavsiyelerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: *Doğal Sayılar, Toplama ve Çarpma, Öncelik*

The Order of Precedence in Arithmetic Operations

Abstract

This study aimed on the reason for the priority order of operations in arithmetic operations. In arithmetic operations, the reasons for the order of process priority are based on addition and multiplication operations in natural numbers. The reason for the sequencing in process order is; The force-taking process is a function of the multiplication, and the multiplication is a function of the addition. For this, Peano axioms and natural numbers are created and the operations are defined. It is also emphasized that this situation is related to procedural and conceptual knowledge and that the concept-based education model in mathematics education should not be overlooked. It is also emphasized that in the mathematics curriculum, this situation is missed from the essence and that instead of spending time on the essence of mathematics, it is time to memorize definitions and a series of unnecessary rules. Finally, there have been some recommendations to teachers who are practitioners of these teaching activities.

Keywords: *Naturel Numbers, Adding and Multiplying,* Progression Priority

[*] Kafkas Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Kars, Türkiye, Mat.ilgun@hotmail.com
[**] Atatürk Üniversitesi, Oltu Beşeri ve Sosyal Bilimler Fakültesi, Bankacılık ve Finans Bölümü, Erzurum, Türkiye, suheylaelmas@atauni.edu.tr
[***] Nene Hatun Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Iğdır, Türkiye kucuksoner33@gmail.com

Giriş

Matematiğin en geniş ve en iyi bilinen dalı olan aritmetik; 1,2,3,4,… pozitif tam sayılar kümesindeki toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin özelliklerini inceleyen matematik dalıdır. Aritmetikte çoğu zaman deney ve muhakeme ile sonuçlar elde etmek m mümkündür. Matematik ise, tümden gelime dayalı daha zor problemleri çözmede geleneksel matematikle birlikte kullanılır (Göker, 1997)

Gauss derki "*Matematik bilimlerin, aritmetikte de matematiğin kraliçesidir*." Aritmetikte işlem öncelik sırasını anlayabilmek için aritmetiğin tarihi gelişimindeki bazı süreçleri gözden geçirmek gereklidir.

Parmakları kullanarak yapılan sayma, yani 1 'erli 5 'erli saymak ancak toplumsal gelişimin belli bir döneminde ortaya çıkar. Bu dönemden sonra sayılar bir taban baz alınarak ifade edilmiştir. Bu da büyük sayıların ifade edilmesine yardımcı olmuştur. Böylece ilkel bir aritmetik ortaya çıkmış, 14 bazen $0+4$, bazen de $15-1$ olarak gösterilmiştir. 20 'nin $10+10$ değil de 2×10 olarak gösterilmesiyle çarpma başlamıştır. Bölme, 10 'un "vücudun yarısı" olarak gösterilmesiyle başladı ama kesirlerin bilinçli bir şekilde oluşturulması hala çok nadirdi. Kuzey Amerika'da bazı kabilelerde böyle kesirler biliniyordu. Çoğu durumda bu ½ idi. Bazen 1/3 ya da ¼'de kullanılıyordu.

Okullardaki matematik müfredatındaki hatalardan birisi, matematiğin özüne vakit harcamak yerine, sayılarda, tanım ve geleneksel yöntemlerde yapılan faydasız alıştırmalardır. Bu hatalar kendilerini öğrencilerin gerçek matematiği bilip-bilmediklerine değil, var oluş nedenleri hakkında bir şey bilmedikleri, anlaşılması zor kurallar ya da mantıksız gelenekleri ezberleyip-ezberlemediklerine değer veren değer yargılarında ortaya çıkarlar. İlköğretim müfredatlarının 4., 5. ya da 6. sınıfta dahil edilen "işlem sırası için kurallar" diye bilinen geleneksel kaideler bunlara bir misaldir:

- ✓ Tüm ifadeleri "üs" lerle değerlendirin.
- ✓ Soldan sağa doğru çarpma ve bölme yapın.
- ✓ Soldan sağa doğru toplama ve çıkarma yapın.

Bu gereksiz kuralları öğretmek veya ezberletmek yerine öğrenciye matematiğin temeli olan fonksiyon kavramı gerekli şekilde öğretilirse, öğrenci zaten aritmetik işlemlerdeki öncelik sırasını sezgisel olarak öğrenecektir. Bu sebep den dolayı aritmetik işlemlerde öncelik sırasını anlaya bilmek için Peano belitlerinden faydalanacağız.

Peano Aksiyomları

Bu kesimde, amacımız, doğal sayılar kümesi $N=\{1,2,\ldots\}$ nin kuruluşu olacaktır. Eskiden olduğu gibi, çağdaş matematiksel düşüncede de doğal sayılar, matematiğin temel yapı taşları olarak kabul edilmektedir. H.Weyl 'in deyişiyle "*Matematik eğitiminde kullanılan mantıksal ifade biçimleri de dahil olmak üzere, tamamen doğal sayıların yapısına bağlıdır.*" Diğer yandan, bugün dahi, doğal sayıların daha temel kavramlardan türetilemeyeceğine, bunların tamamen insan beyninin ürünü olarak kabul edilmeleri gerektiğine inanılmaktadır. Bu görüş, Kronecker tarafından "*Allah doğal sayıları yarattı, gerisi insanların işidir.*" cümlesi ile ifade edilmiştir.

Aşağıda, Peano Aksiyomları olarak sunacağımız aksiyomlar, sunuldukları biçimiyle ilk kez R. Dedekind tarafından ifade edilmişlerdir.

Tanım 1.1 A bir küme, $x, y \in A$ olsun. Eğer x ve y aynı (veya eşit) iseler, $x = y$ yazılır; x ve y farklı iseler, $x \neq y$ yazılır.

Peano Aksiyomları: Elemanlarına doğal sayılar denen, N ile gösterilen ve aşağıdaki beş aksiyomu sağlayan bir küme vardır.

Aksiyom 1. Bir diye adlandırılan ve 1 ile gösterilen bir doğal sayı vardır.

Aksiyom 2. Her $x \in N$ için x'in ardılı diye adlandırılan bir ve yalnız bir $x' \in N$ vardır. (Böylece, her $x \in N$ $a(x) = x'$ alınırsa, bir $a: N \to N$ fonksiyonu elde edilir.)

Aksiyom 3. Her $x \in N$ için $1 = x'$ 'dür. (Yani, 1 hiçbir doğal sayının ardılı değildir.)

Aksiyom4. $x, y \in N$ ve $x \neq y$ ise, $x' \neq y'$ 'dür.(Yani, yukarıda tanımlanan $a: N \to N$ fonksiyonu bire-birdir.)

Aksiyom 5. N kümesinin herhangi bir M altkümesi

a) $1 \in M$ *b)* $x \in M \Rightarrow x' \in M$

şartlarını sağlıyorsa, $M = N$ 'dir

NOT: Sıfırı doğal sayılar kümesine katmamızın bir mahsuru yoktur. Bazı matematikçiler sıfırı doğal sayı olarak kabul eder.

Tanım 1.2 Peano belitlerinden yaralanarak, doğal sayıları göstermek için kullana geldiğimiz 2,3,4 ….. sembolleri $2 = 1', 3 = 2', 4 = 3'$,... ve benzer biçimde elde edilirler.

Doğal sayılar üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabilmemiz için aşağıdaki bazı lemma, önerme ve teoremleri vermemiz gerekir.

Yöntem

Lemma 1.1 $x, y \in N$ ve $x' = y'$ ise, $x = y$ dir.

İspat: Bu ifade Aksiyom 4' ten hemen görülür. $\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big((\sim q \Rightarrow \sim p)\big)\big)$ denkliğini hatırlayalım.)

Peano Aksiyomlarından beşincisi, Tümevarım Aksiyomu, matematiğin en güçlü ispat araçlarından biridir. Tümevarımla ispatı sık kullanacağız. Aşağıdaki önermenin ispatı, tümevarımla ispatın ilk ve tipik bir örneğidir.

Önerme 1.1 Her $x \in N$ için $x' \neq x$ dir.

İspat: N içinde $x' \neq x$ koşulunu sağlayan tüm x elemanlarından oluşan kümeyi M ile gösterelim. Aksiyom 1 ve Aksiyom 3 ten $1' \neq 1$ ve böylece, $1 \in M$ dir. Şimdi, bir $x \in M$ alalım. M nin tanımından $x' \neq x$ ve Aksiyom 4 ten, $(x')' \neq x'$ olur. Böylece, $x \in M \Rightarrow x' \in M$ olduğunu görürüz. Aksiyom 5'e göre $M = N$, yani her $x \in N$ için $x' \neq x$ 'dir.

Önerme 1.2 Her $x \in N/\{1\}$ için $x = u'$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $u \in N$ vardır.

İspat: N nin $M = \{x \in N: ya\ x = 1\ ya\ da\ x = u'\ olacak\ biçimde\ bir\ u \in N\ var\}$

alt kümesini ele alalım. Tanımdan dolayı $1 \in M$ olup

$$\begin{aligned} x \in M \quad &\Rightarrow x = 1 \qquad veya \qquad x = u', u \in N \\ &\Rightarrow x' = (1') \quad veya \quad x' = (u')', u' \in N \\ &\Rightarrow x' \in M \end{aligned}$$

olduğundan Aksiyom 5 e göre $M = N$ dir. Bu, her $x \in N/\{1\}$ için $x = u'$ olacak biçimde bir u nun varlığını gösterir. Her $x \in N$ için $x = u'$ olacak biçimde sadece bir $u \in N$ bulunması ise Lemma 1.1 in sonucudur.

Bu kesimin kalan kısmında, tümevarım beliti yardımıyla, N içinde, bildiğimiz toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerine sahip olan iki ikili işlem bulunduğunu göstereceğiz.

Teorem 1.1 Her $(x, y) \in N \times N$ için aşağıdaki iki şartı sağlayan bir ve yalnız bir $t(x, y) \in N$ vardır:

$$\text{Her} \quad x \in N \quad \text{için} \quad t(x, 1) = x' \tag{1.1}$$
$$\text{Her} \quad x, y \in N \quad \text{için} \quad t(x, y') = \big(t(x, y)\big)' \tag{1.2}$$

İspat: Önce, her $(x, y) \in N \times N$ için (1.1) ve (1.2) koşullarını sağlayan bir $t(x, y) \in N$ bulunduğunu göstereceğiz. Bu amaçla, verilen herhangi bir $x \in N$ için

$$M_x = \{y \in N: (1.1)\ ve\ (1.2)\ yi\ sağlayan\ t(x, y) \in N\ var\}$$

ve

$$M = \{x \in N: M_x = N\}$$

tanımlayalım. Sözü edilen $t(x,y) \in N$ nin varlığını göstermek için $M = N$ olduğunu göstermeliyiz. Her $y \in N$ için $t(1,y) = y'$ tanımlarsak , $t(1,1) = 1'$ ve $t(1,y') = (y')' = t(1,y)'$ koşulları sağlanır. Buradan, $M_1 = N$, yani $1 \in M$ olduğunu görürüz. Diğer yandan, $x \in M$,yani $M_x = N$ ise, her $y \in N$ için (1.1) ve (1.2) sağlanacak şekilde $t(x,y) \in N$ var demektir. Bu durumda,

$$t(x',y) = \big(t(x,y)\big)'$$

tanımlayalım. Bu takdirde, (1.1) ve (1.2) şartları

$$\boldsymbol{t(x',1) = \big(t(x,1)\big)' = (x')'},$$
$$\boldsymbol{t(x',y') = \big(t(x,y')\big)' = \Big(\big(t(x,y)\big)'\Big)' = \big(t(x',y)\big)'}$$

olarak sağlanır. Sonuç olarak, $x \in M$, ise $M_{x'} = N$, yani $x' \in M$ dir. Tümevarım Belitinden, $M = N$ sonucu çıkar. Böylece, her $(x,y) \in N \times N$ için (1.1) ve (1.2) yi sağlayan bir $t(x,y) \in N$ vardır.

Şimdi, her $(x,y) \in N \times N$ için bulunan $t(x,y)$ nin tek türlü belirli olduğunu göstereceğiz. Her $(x,y) \in N \times N$ için $t(x,y)$ il birlikte

$$\text{Her} \quad x \in N \quad \text{için} \quad u(x,1) = x' \qquad (1.3)$$
$$\text{Her} \quad x,y \in N \quad \text{için} \quad u(x,y') = \big(u(x,y)\big)' \qquad (1.4)$$

Şartlarını sağlayan bir $u(x,y)$ bulunduğunu kabul edelim. Her $x,y \in N$ için $t(x,y) = u(x,y)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için, herhangi bir $x \in N$ seçelim ve sabit tutalım;

$$K = \{y \in N: t(x,y) = u(x,y)\}$$

tanımlayalım. Bu takdirde, $t(x,1) = x' = u(x,1)$ ve böylece, $1 \in K$ dır. Ayrıca, $y \in K$ ise, $t(x,y) = u(x,y)$ olur. (1.2) ve (1.4) özellikleri ile Lemma 1.1 den

$$t(x,y') = \big(t(x,y')\big)' = \big(u(x,y)\big)' = u(x,y')$$

Yani $y' \in K$ olduğu görülür. Tümevarım Belitine göre $K = N$, yani her $x,y \in N$ için $t(x,y) = u(x,y)$ dir. Bu Teorem 1.1 in ispatını tamamlar.

Yukarıda ispatı verilen Teorem 1.1, ‘‘$N \times N$ den N ye her $x,y \in N$ için

$$t(x,1) = x' \qquad (1.1)$$
$$t(x,y') = \big(t(x,y)\big)' \qquad (1.2)$$

koşullarını sağlayan bir $t: N \times N \to N$ *fonksiyonu* vardır” biçiminde ifade edilebilir.

Yukarıdaki ispatın son kısmı dikkatle incelenirse, bu t fonksiyonunun veya N içindeki bu t ikili işleminin (1.1) ve (1.2) şartları ile tek türlü belirli olduğu görülür. Başka bir deyimle, N içinde (1.1) ve (1.2) yi sağlayan bir ve yalnız bir t ikili işlemi vardır. Bu ikili işleme *toplama işlemi* denir ve $x, y \in N$ için $t(x, y)$ yerine $x + y$ yazılır. Tekrar edersek, N içinde toplama işlemi, $+$, her $x, y \in N$ için

$$\mathrm{x} + 1 = \mathrm{x}' \qquad (1.5)$$
$$\mathrm{x} + \mathrm{y}' = (\mathrm{x}, \mathrm{y})' \qquad (1.6)$$

özellikleri ile tek türlü belirlidir.

Teorem 1.2 N içinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

İspat: $x, y \in N$ seçip sabit tutalım ve

$$M = \{z \in N: (x + y) + z = x + (y + z)\}$$

tanımlayalım. Bu takdirde,

$$(x + y) + 1 = (x + y)' = x + y' = x + (y + 1)$$

den $1 \in M$ olduğu görülür. Ayrıca,$z \in M$ ise,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

dir. Lemma 1.1 ve (1.6) özelliği kullanılarak

$$(x + y) + z' = \big((x + y) + z\big)' = \big(x + (y + z)\big)' = x + (y + z)' = x + (y + z')$$

elde edilir. Böylece $z \in M \Longrightarrow z' \in M$ dir.

Tümevarım Aksiyomdan (Aksiyom 5), $M = N$, her $x, y, z \in N$ için

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

dir.

Örnek 1.1 Şimdi $2 + 2 = 4$ olduğunu ispat edelim. $2 = 1'$,$3 = 2'$ ve $4 = 3'$ tanımladığımızı hatırlayınız. O halde,

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= 2 + 1' && (Tanım) \\ &= (2 + 1') && \big((1.6)\ özelliği\big) \\ &= (2')' && (Tanım) \\ &= (3)' && (Tanım) \\ &= 4 && (Tanım) \end{aligned}$$

Lemma 1.2 Her $x \in N$ için $(1 + x) = x'$ dür.

İspat: Teorem 1.1 in ispatına dikkat edersek, bu lemmanın ispatı orada bulunabilir.

$M = \{x \in N : 1 + x = x'\}$ tanımlayalım.(1.5) özelliğinden $1 + 1 = 1'$, $1 \in M$ dir. Ayrıca,

$$x \in M \Longrightarrow 1 + x = x'$$

$$\Longrightarrow (1 + x') = (1 + x)' = (x') \ (Lemma 1.1)$$

$$\Longrightarrow x' \in M$$

O halde, $M = N$, her $x \in N$ için $1 + x = x'$ dür.

Teorem 1.3 N içinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

İspat. N içinde

$$M = \{y \in N : her\ x \in N\ için\ x + y = y + x\}$$

tanımlayalım. Lemma 1.2 ve toplama işleminin (1.5) özelliğinden,

$$x + 1 = x' = 1 + x$$

ve dolayısıyla, $1 \in M$ dir. Şimdi $y \in M$ alalım. Bu takdirde, her $x \in N$ için $x + y = y + x$
olur ve

$\mathrm{x + y' = x + (1 + y)}$ (Lemma 1.2)

$\mathrm{= (x + 1 + y)}$ (Birleşme Özelliği)

$\mathrm{= x' + y}$ (Lemma 1.2)

$\mathrm{= y + x'}$ $(\mathrm{y \in M})$

$\mathrm{= y + (1 + x)}$ (Lemma 1.2)

$\mathrm{= (y + 1) + x}$ (Birleşme Özelliği)

$\mathrm{= y' + x}$

olduğu görülür. Böylece, $y \in M \Longrightarrow y' \in M$ dir. Tümevarım belitinden $M = N$;

$$\forall\ x, y \in N\ için\ x + y = y + x$$

dir.

Teorem 1.4 Her $(x, y) \in N \times N$ için aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir ve yalnız bir $Ç(x, y) \in N$ vardır:

$$Her\ x \in N\ için\ Ç(x, 1) = x \qquad (1.7)$$

$$Her\ x, y \in N\ için\ Ç(x, y') = Ç(x, y) + x \qquad (1.8)$$

İspat. Önce her $(x, y) \in N \times N$ için (1.7) ve (1.8) koşullarını sağlayan bir $Ç(x, y)$
bulunduğunu göstereceğiz. Bu amaçla N nin

$M = \{x \in N\colon her\ y \in N\ için\ (1.7)\ ve\ (1.8)\ i\ sağlayan\ bir\ Ç(x,y) \in N\ var\}$ alt kümesini düşünelim. Her $y \in N$ için

$$Ç(1,y) = y$$

tanımlayalım. Bu takdirde,

$$Ç(1,1) = 1$$

olur ve her $y \in N\ için\ Ç(1,y') = y' = y + 1 = Ç(1,y) + 1$ şartları sağlanır. Böylece, $1 \in M$ dir.

Diğer yandan, $x \in M$ ise, her $y \in N$ için (1.7) ve (1.8) i sağlayan bir $Ç(x,y)$ vardır. Şimdi, her $y \in N$ için

$$Ç(x',y) = Ç(x,y) + y$$

tanımlayalım. Bu takdirde,

$$Ç(x',1) = Ç(x,1) += x + 1 = x'$$

olur.$x \in M$ olduğundan, her $y \in N$ için

$$\begin{aligned} Ç(x',y') &= Ç(x,y') + y' \\ &= (Ç(x,y) + x) + y' \\ &= Ç(x,y) + (x + y') \\ &= Ç(x,y) + (x + y)' \\ &= Ç(x,y) + (y + x)' \\ &= Ç(x,y) + (y + x') \\ &= (Ç(x,y) + y) + x' \\ &= Ç(x',y) + x' \end{aligned}$$

olur. Böylece,$x \in M \Rightarrow x' \in M$ .tümevarım Aksiyomdan $M = N$ dir. Başka bir ifadeyle, $\forall\ x,y \in N$ için (1.7) ve (1.8) koşullarını sağlayan bir $Ç(x,y)$ vardır. Teorem 1.4 ün ispatını, her $x,y \in N$ için (1.7) ve (1.8) koşullarını sağlayan yalnız bir $Ç(x,y) \in N$ bulunduğunu göstererek tamamlarız. Her $x,y \in N$ için (1.7) ve (1.8) i sağlayan bir $Ç(x,y)$ ile birlikte bir de $d(x,y)$ bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde, N nin

$$K = \{y \in N\colon \forall x \in N\ için\ Ç(x,y) = d(x,y)\}$$

alt kümesini alalım. Her $x \in N$ için

$$Ç(x,1) = x = d(x,1)$$

olduğundan, $1 \in K$ dır. Ayrıca, $y \in K$ ise, her $x \in N$ için

$$Ç(x,y') = Ç(x,y) + x = d(x,y) + x = d(x,y')$$

ve böylece, $y' \in K$ dır. Tümevarım aksiyomdan $K = N$; her $x, y \in N$ için

$d(x, y) = Ç(x, y)$ dir

Sonuç 1.1 Yukarıda ispatladığımız teorem, bir $Ç: N \times N \longrightarrow N$ *fonksiyonunun*, yani N içinde bir ikili işlemin varlığını ifade etmektedir. Teorem 1.2 nin sonunda olduğu gibi, burada da (1.7) ve (1.8) koşullarının Ç işleminin tamamen belirlediğini söyleyebiliriz. Başka bir deyimle, N içinde (1.7) ve (1.8) koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir ikili işlem Ç vardır.

Bu ikili işleme, *çarpma işlemi* denir ve $x, y \in N$ için genellikle

$$Ç(x, y) = x.y \quad veya \quad Ç(x, y) = xy$$

yazılır; $Ç(x, y) = xy \;\; ye \;\; x \;\; ve \;\; y$ nin çarpımı denir.Yeni gösterimle ifade edilirse, N içinde çarpma işlemi

$$Her \quad x \in N \quad için \qquad x1 = x \qquad (1.9)$$
$$Her \quad x, y \in N \quad için \quad xy' = xy + x \qquad (1.10)$$

koşullarıyla tamamen belirlenir.
Yukarıdan da anlaşıldığı gibi, çarpma işlemi toplama üzerine tanımlı bir fonksiyondur.

Lemma 1.3 Her $x \in N$ için $1.x = x$ dir.

İspat. N nin $M = \{x \in N: 1.x = x\}$ altkümesini düşünelim. (1.9) dan $1.1 = 1$; böylece, $1 \in M$ dir. Ayrıca, $x \in M$ ise, $1.x = x$ dir ve (1.10) dan,

$$1.x' = 1.x + 1 = x + 1 = x'$$

$x' \in M$ olur. Böylece, $x \in M \Longrightarrow x' \in M$ dir. O halde, $M = N$;her $x \in N \; için \; 1.x = x$ dir.

Lemma 1.4 Her $x, y \in N \; için \; x'y = xy + y$ dir.

İspat. $N \; nin \; M = \{y \in N: her \; x \in N \; için \; x'y = xy + y\}$ alt kümesini alalım. Bu takdirde,

$$\forall \, x \in N \; için \; x'.1 = x' = x.1 + 1$$

ve böylece, $1 \in M$ dir. Ayrıca, $y \in M$ ise, her $x' \in N \; için \; x'y = xy + y$ dir ve (1.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} x'y' &= x'y + x' = (xy + y) + x' = xy + (y + x') = xy + (y + x)' \\ &= xy + (x + y)' = xy + (x + y') = (xy + x) + y' = xy' + y' \end{aligned}$$

olur. Böylece, $y \in M \Rightarrow y' \in M$ dir. Tümevarım Aksiyomundan
$M = N\,; her\ x, y \in N\ için\ x'y = xy + y$ dir.

Teorem 1.5 N içinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

İspat. N nin

$$M = \{x \in N: her\ y \in N\ için\ xy = yx\}$$

alt kümesini alalım. Lemma 1.3 ten, $1 \in M$ dir. Ayrıca, $x \in M$ ise, her $y \in N\ için\ xy = yx$ olup

$$\begin{aligned} x'y &= xy + y && \text{(Lemma 1.4)} \\ &= yx + y && (x \in M) \\ &= yx' && \big((1.10)\ \text{özelliği}\big) \end{aligned}$$

dür. Böylece, $x \in M \Rightarrow x' \in M$ dir. Tümevarım Aksiyomundan $M = N$; her $x, y \in N\ için\ xy = yx$ dir.

Teorem 1.6 Her $x, y, z \in N\ için\ x(y + z) = xy + xz$ dir.

İspat. $M = \{z \in N : her\ x, y \in N\ için\ x(y + z) = xy + xz\}$ alalım. Bu takdirde, her $x, y \in N$ için

$$x(y + 1) = xy' = xy + x = xy + x1$$

ve böylece, $1 \in M$ dir. Ayrıca, $z \in M\ ise, her\ x, y \in N$ için

$$\begin{aligned} x(y + z') = x(y + z)' = x(y + z) + x &= (xy + xz) + x \\ = xy + (xz + x) &= xy + xz' \end{aligned}$$

olur. Böylece, $z \in M \Rightarrow z' \in M$ dir. Tümevarım Belitinden $M = N$; her $x, y, z \in N\ için\ \ x(y + z) = xy + xz$ dir.

Tanım 1.1 Her $x, y, z \in N\ için\ x(y + z) = xy + xz$ olması özelliği, doğal sayılarda çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği olarak bilinir.

Uyarı 1.3 Teorem 1.5 ve Teorem 1.6 birleştirilerek, her $x, y, z \in N$ için

$$x(y + z) = xy + xz$$

olduğu görülür.

Teorem 1.7 N içinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

İspat. N nin

$$M = \{z \in N: her\ x, y \in N\ için\ (xy)z = x(yz)\}$$

alt kümesini alalım. Bu takdirde, her $x, y \in N$ için (1.9) dan

$$(xy)1 = xy = x(y1)$$

ve böylece, $1 \in M$ dir. Ayrıca, $z \in M\ ise, her\ x, y \in N$ için

$$\begin{aligned} (xy)z' &= (xy)z + xy && ((1.10)özelliği) \\ &= x(yz) + xy && (z \in M) \\ &= x(yz + y) && (Teorem\ 1.6) \\ &= x(yz') && ((1.10)\ özelliği) \end{aligned}$$

olur. Böylece, $z \in M \Rightarrow z' \in M$ dir. Tümevarım Belitinden $M = N$; her

$$x, y, z \in N\ için\ (xy)z = x(yz)$$

dir [3]

Bulgular ve Yorum

Peano aksiyomlarında toplama ve çarpmayı tanımlamamızdaki asıl amaç; bu işlemlerin bir fonksiyon olduğu, çarpmanın da toplamanın bir fonksiyonu olduğu ve işlem sırasının belirlenmesinde fonksiyon kavramının kullanıldığını göstermektir.

İşlem sırasındaki öncelik ilk olarak; kuvvet alma daha sonra çarpma ve bölme ve son olarak toplama ve çıkarma olmasının sebebi; kuvvet alma işleminin çarpmanın bir fonksiyonu, çarpmanın da toplamanın bir fonksiyonu olmasıdır.

Bunu daha iyi kavrayabilmek için örnekler üzerinde inceleyelim.

$$4 + 3.5 = ?$$

Burada çarpma işlemi toplamanın bir fonksiyonu olduğundan öncelikle çarpma işlemini yapmamız gereklidir. Buradaki çarpma işlemi de; Peano Aksiyomlarını kullanılarak ;

$$\begin{aligned} 35 &= 2'.5 && (Tanım) \\ &= 2.5 + 5 && ((1.10)\ \text{özelliği}) \\ &= 1'.5 + 5 && (\text{Tanım}) \\ &= 1.5 + 5 + 5 && ((1.10)\ özelliği) \\ &= 5 + 5 + 5 && ((1.9)\ özelliği) \\ &= 15 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 4+3.5 &= 4+15 \\ &= 19 \end{aligned}$$

bulunur. Şayet işleme toplamadan başlasaydık;

$$4+3.5 = 7.5 = 35$$

bulunurdu. Bu da bizi yanlış sonuca götürürdü.

"Toplamadan önce çarpma" kuralı kolay görünebilir, ancak bu üç kelime gözlerimizin gördüğünden çok fazlasını kapsar. Cebir alanının içinde olduğumuz için, "(sıfır olmayan) bir c sayısına bölme", "$1/c$ ile çarpma" ile aynı şeydir. Fazlası, "eksi c", "artı $(-c)$" ile aynıdır [4]. Aşağıdaki örneği inceleyelim;

$$18 \div 6 - 2 = ?$$

Burada 6 sayısına bölmek, $\frac{1}{6}$ ile çarpmak anlamındadır. Yani;

$$\begin{aligned}
18.\tfrac{1}{6} &= 17'\,\tfrac{1}{6} && \text{(Tanım)} \\
&= 17.\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6} && \text{((1.10) özelliği)} \\
&= 16'.\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6} && \text{(Tanım)} \\
&= 16.\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6} && \text{((1.10) özelliği)} \\
&\ \ \vdots && \vdots \\
&= 1'.\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\cdots\tfrac{1}{6} && \text{(Tanım)} \\
&= \underbrace{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\cdots+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}}_{18\ tane\ e} && \text{((1.9) özelliği)} \\
&= \tfrac{18}{6} \\
&= 3
\end{aligned}$$

olup buradan

$$18 \div 6 - 2 = 3 + (-2) = 1$$

elde edilir. Yani bölme işlemi de çarpma işlemi gibi toplamadan daha önceliklidir.

Ayrıca bölme ve çarpma işleminin aynı anda bulunduğu aritmetik işlemlerde öncelik sırasına bakmak istersek; soldan sağa işlemlerin yapılacağı kanısı vardır. İşlem sırası göz önüne alındığında, buna gerek olmadığı fark edilecektir. Örneğin;

$$9 \div 3 + 3.5 = ?$$

Aritmetik işleminde işlem sırasını göz ardı edip soldan sağa yapacak olursak yanılgıya düşeriz. Aşağıda olduğu gibi;

$$9 \div 3 + 3.5 = \left(\frac{9}{3} + 3\right).5 = (3+3).5$$
$$= 6.5 = 30$$

Aritmetik işlem sırasını göz önüne alırsak;

$$9 \div 3 + 3.5 = 9.\frac{1}{3} + 3.5$$
$$= 3 + 15$$
$$= 18$$

bulunur ki bu da istenilen çözümdür.

Bu örnekten de görüldüğü gibi işlem sırası kullanılacak olursa, soldan sağa kuralı anlamını yitirir.

$$9 \div 3.2 = ?$$

Örneğine bakacak olursak, bu aritmetik işlemi soldan sağa yapılması gerektiği düşünülmektedir. Fakat burada önemli olan, 3'e bölme işleminin $\frac{1}{3}$ ile çarpmak olduğunu fark edebilmektir. Burada $\frac{1}{3}$ ile çarpma işlemi geldiğinden, rasyonel sayılardaki çarpmaya dönüşür ki pay pay ile payda da payda ile çarpılır. Yani 2 ile 3 pay ile payda olduğundan çarpılamazlar. Yani;

$$9 \div 3.2 = 9.\frac{1}{3}.2 = 3.2 = 6$$

Şimdi kuvvet alma işlemini çarpmadan önce yapılacağını gösterelim.
a^n in anlamı $\underbrace{a.a.a\ldots a}_{n \text{ tane}}$ $(a, n \in R)$. a taban sayı, n üs diye adlandırılır. Biz bu ifadeyi *a'nın kuvveti* diye adlandırırız.

Örneğin;

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

Bu da gösteriyor ki kuvvet işlemi çarpmanın bir fonksiyonu olduğu ve kuvvet alma işleminin çarpmadan önce yapılması gerektiği aşikârdır.

Örnekler

1) $3^2.5 + 3 = (3.3).5 + 3$
$$= 9.5 + 3$$
$$= 45 + 3$$
$$= 48$$

2) $5^2 + 15 \div 3.2^3 = (5.5) + 15 \div 3.(2.2.2)$

$$= 25 + 15 \div 3.8$$

$$= 25 + 15.\tfrac{1}{3}.8$$

$$= 25 + 40$$

$$= 65$$

3) $2^3(3+4)^2 - 25 = 2^3.(7)^2 - 25$

$$= (2.2.2).(7.7) - 25$$

$$= 8.49 - 25$$

$$= 392 - 25$$

$$= 367$$

4) $3[(5+2)-1] = 3(7-1)$

$$= 3.6$$

$$= 18$$

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Aritmetikte işlem öncelik sırası sırasıyla aşağıdaki gibidir.

- ✓ Parantez içi
- ✓ Kuvvet alma
- ✓ Çarpma / Bölme
- ✓ Toplama / Çıkarma

Çünkü kuvvet alma işlemi ardışık çarpanlara, çarpma işlemi de ardışık toplamalara indirgeyip, toplama şeklinde bir aritmetik işlem oluşur ve bu kuralları ortaya çıkarır.

Matematik eğitiminde yapılan çalışmalar matematikte işlemsel ve kavramsal öğrenme olarak farklı iki öğrenme tipinin olduğunu belirtmektedir (DiSessa, 1985, Skemp, 1987; Garofalo & Durant, 1991; Baki, 1994). İşlemsel bilgi sembolleri tanıma, işlemleri yürütme gibi becerilerin oluşturduğu kavrama dayanmayan tamamen mekanik bir bilgi, ikincisi ise; matematiksel kavramları sembolleştirebilme, onları ilişkilendirebilme ve onlarla işlem yapabilme becerilerinin oluşturduğu kavrama dayalı bir bilgidir (Baki, 1994). Bu iki kavram net çizgilerle birbirinden ayrılmaz. Matematik kavramları soyut yapıları sebebiyle yanlış anlaşılması olası kavramlardır. Bu kavramlar öğrenilirken, neyi neden yapacağını bilme anlamına gelen ilişkisel anlama (Skemp, 1978) gerçekleşmezse öğrencide kavram yanılgıları yada kavramla ilgili güçlükler oluşabilmektedir. Bu çalışmada vurgu yapılan nokta işlemsel bilgi olarak verilen aritmetik işlemlerde işlem sırasının aslında temelinde kavramsal bilginin yattığıdır. Öğrenciye işlem sırası hiçbir gerekçe gösterilmeden ve açıklama yapılmadan verilirse öğrenci sadece ezber yapan ve uygulayan öğrenci rolünü, öğretmen de kural ve yöntemleri bilen ve öğrenciye sunan bir otorite rolünü oynamış olur. Anlamlı öğrenmenin gerçekleşebileceği bir öğrenme ortamı oluşturmak yerine öğrencilerin bazı kural ve algoritmaları ezberlemeye yönlendirilmesi, işlemsel ve kavramsal bilgilerin ilişkilendirilememesi gibi sebeplerle kavramların tam olarak anlaşılması güçleşmekte ve hatta kavram yanılgıları ortaya çıkabilmektedir. (NCTM, 2000)

İşlem sırasındaki sıralamanın yukarıdaki gibi olmasının sebebi; kuvvet alma işleminin çarpmanın bir fonksiyonu, çarpmanın da toplamanın bir fonksiyonu olmasıdır. Daha ilköğretimin başlangıç yıllarında doğal sayılar kümesinde dört işlem konusunu öğrenen öğrencilerin farkında olmadan fonksiyon kavramıyla uygulamalar yaptıklarını söyleyebiliriz (Eisenberg, 1991). Çünkü 2+3=5 işlemini düşünecek olursak bu işlemdeki toplam operatörü (+), N'den iki elemanı almakta, bu elemanları işleme tabi tuttuktan sonra 5 gibi yeni bir elemana dönüştürmektedir.

Bilişsel ve sosyal aktiviteler bütünü olarak tanımlayabileceğimiz 'öğretim' karmaşık bir yapıya sahiptir (Leinhardt, 1988). Öğretmenler, ne öğretecekleri, nasıl öğretecekleri, öğretim esasında hangi araç ve gereçleri kullanacakları, hangi içerik ve kalitede soruları çözecekleri gibi birden çok değişkeni göz önünde bulundurarak zihinlerinde bir öğretim modeli oluştururlar. Daha sonra bu öğretim modelini sınıf ortamında pratiğe dökerler ki bu uygulama aşamasında öğretimin sosyolojik ve sanatsal boyutu kendini gösterir. Bilişsel ve sosyal bir süreç olan öğretimin nihai hedefi ise öğrencilere bilgi edinmeleri noktasında yardımcı olmak ve rehberlik yapmaktır (Bayazıt, 2004).

Yapılandırmacı yaklaşım çerçevesinde 'buluş yoluyla öğretim', 'problem çözme yoluyla öğretim' (problem dayalı öğretim) , ve 'proje tabanlı öğretim' gibi farklı öğretim modelleri kullanılarak işlem önceliği konusunun öğretimi etkin bir şekilde yapılabilir. Bu öğretim modelleri 'işbirlikçi öğrenme – grup çalışması' gibi yöntemlerle desteklenerek öğrenmenin kalitesi ve kalıcılığı artırılabilir. Bu noktada işlem önceliği konusunun ruhuna en uygun modellerin başında 'kavram eksenli öğretim' modeli gelir. Kavram eksenli öğretim modelinin en temel özelliği öğrencilerde kavramsal bilginin gelişimine katkı yapmayı hedeflemiş olmasıdır. (Heibert vd., 1997). Bu yaklaşımda öğretilmesi hedeflenen durum işlem önceliği ve bu kavramın temel özellikleridir. İşlemsel bilgilerin aktarımı bu öğretim modelinin ana hedefi değildir ve işlemsel bilgiler öğrencilerin foksiyon ve işlem önceliği kavramları üzerine yürüteceği yoğun düşünsel aktiviteler ve bu kavramlarla yapacağı uygulamalar sonucunda elde edecekleri doğal kazanımlar olarak görülür.

Sonuç olarak, matematik eğitiminde bazı kavramları ezberletmek yerine matematiğin özüne ve bilgiye nasıl ulaşacağını öğretmek amaç olmalıdır.

Kaynakça

Baki, A. (1994). Breaking with tradition: A stuy of Turkish student teachers' experiences within a logo-based mathemtical enviroment, Yayınlanmamış doktora Tezi, University of London, London.

Baki, A. (1998) *Matematik öğretiminde işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesi*. Matematik Sempozyumu. Atatürk Üniversitesi.

Bayazıt, I. Ve Gray, E. (2004). Understanding Inverse Functions: The Relationship between Teaching Practice and Student Learning. In M. J. Honies ve A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of 28th Conference of the International Group fort he Psychology of Mathematics Educaion (pp. 103-1110). Norway: Bergen University

DiSessa, A. (1985) Learning about knowning. In Klen, E. (ed). New direction for child development. San Francisco, Jossey-Basic Inc.

Dönmez, A. (2005). Matematiğin öyküsü ve serüveni. İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Eisenberg, T. (1991). Function and associated learning difficulties. D. O. Tall (Eds.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Garofalo, J & Durant, K. (1991) Where did that come from? A frequent response to mathematics instruction. School Science and Mathematics, 91(17), (pp 318-321)

Göker, L. (1997) Matematik Tarihi Ve Türk İslam Matematikçilerinin Yeri. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Heibert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. & Human, P. (1997). A day in the life of a conceptually based ınsruction classroom. Paeke, L. (Eds.), Making sense: teaching and learning mathematics with understanding (pp 101-114). Greenwood: Heinemann

Karakaş, H. İ. (2001). Matematiğin temelleri sayı sistemleri ve cebirsel yapılar. Ankara, Metu Pres Yayınları.

Leinhardt, G. (1988). Expertise in ınstructional lessons: an example from fractions. D. A. Grouws & T. J. Cooney (Eds.), Perspectives on research on effective mathematics teaching (44-66). Hillsdlae, NJ: Lawrence Erlbaum

Skemp, R.R. (1987) The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrance Erlbaum Associates.

Extendend Abstract

The arithmetic as the widest and most well-known branch of mathematics, is a mathematical discipline that explores the properties of addition, subtraction, multiplication, and division in the set of positive integers (1,2,3,4…). In arithmetic it is often possible to obtain results with experimentation and reasoning. Mathematics

is used together with traditional mathematics to solve more difficult problems based entirely on deduction (Goker, L., 1997). One of the mistakes in the school mathematics curriculum is the useless practices in numbers, definitions and traditional methods, rather than spending time on the essence of mathematics. These mistakes arise in the value judgments attaching importance to not only whether students do not know the actual mathematics, but also whether they do not know anything about the causes of its existence and whether they do not memorize hard-to-understand rules or unreasonable traditions. If students are taught the concept of function as a basis of mathematics in an appropriate way instead of teaching or making them memorize the unnecessary rules, the students will already learn the order of priority in arithmetic operations intuitively. For this reason, we can utilize from the Peano axioms to understand the order of priority in arithmetic operations. The main purpose of our definition for the addition and multiplication operations in Peano axioms is to demonstrate that these operations are a function, that both multiplication and addition are functions, and that the concept of function is used to determine the order of operations.

The order of priority in operation is as follows; power taking, multiplication and division, and finally addition and subtraction. The reason for this order is that the power function is a function of multiplication, and also the function of multiplication is a function of addition. Operational knowledge is a purely mechanical knowledge that is not based on the knowledge created by the skills such as recognizing symbols, executing symbols, etc. Also it is a knowledge based on the skills that are able to symbolize, associate, and deal with mathematical concepts (Baki, 1994). The concept of 'teaching' that we can define as a whole of cognitive and social activities, has a complex structure (Leinhardt, 1988). Teachers form an instructional model in their minds by taking into consideration the variables including what to teach, how to teach, what tools and materials to use during the teaching, which content and quality questions to solve. Then, this teaching model is practiced in the classroom environments, in which the sociological and artistic dimension of instructional practice manifests itself. The ultimate goal of the teaching, which is a cognitive and social process, is to help and guide students to acquire knowledge (Bayazit, 2004).

Within the constructivist approach, teaching of the operation priority can be provided effectively using different teaching models such as 'teaching through invention', 'teaching through problem solving' (problem-based teaching), and 'project-based teaching'. These teaching models can be supplemented with the methods including 'collaborative learning - group work', to improve the quality and permanence of learning. At this point, the most appropriate model for the spirit of operation priority is the concept-oriented teaching model. The most basic feature of the concept-oriented teaching model is that it aims to contribute to the development of conceptual knowledge in students. (Heibert et al., 1997). This approach aims to teach the concept of operation priority and the basic features of this concept.

Transfer of operational knowledge is not the main goal of this teaching model, and operational knowledge is seen as the natural gains that students will achieve as a result of the intensive intellectual activities that they will carry out on functional and operation priority concepts, and of the applications that they will perform with these concepts.