DUAL KUATERNİYONLAR VE PROJEKTİF YAPILAR

Basri ÇELİK[1]
H. Esin YILDIZ[2]

Özet

Bu çalışmada, genel kuaterniyon cebirleri tanıtılmış ve bu cebirler yardımıyla koordinatlanan projektif yapılar üzerinde durulmuştur.

Dual Quaternions and Projective Structures

Abstract

In this study we summarize to quaternion algebras and we give projective structures which are coordinatized with this algebras.

1.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya temel teşkil edecek olan bazı kavramlar [3] ve [5] nolu kaynaklardan yararlanılarak tanıtılacaktır.

Tanım1.1. $\mathbf{G}$ boş olmayan bir küme ve $*$ $\mathbf{G}$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer;

i) $\forall x, y, z \in \mathbf{G}$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ dir (birleşme özelliği).

---

[1] *Doç. Dr., Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü*
[2] *Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Yüksek Lisans Öğr.*

ii) $\forall x \in \mathbf{G},\ \exists e \in \mathbf{G} \ni x * e = e * x = x$ dir (etkisiz eleman özelliği).

iii) $\forall x \in \mathbf{G},\ \exists u \in \mathbf{G} \ni x * u = u * x = e$ dir (ters eleman özelliği).

şartları sağlanıyorsa $(\mathbf{G},*)$ ikilisine *grup* denir. Bir $(\mathbf{G},*)$ grubunda

iv) $\forall x, y \in \mathbf{G}$ için $x * y = y * x$

şartı sağlanıyorsa $(\mathbf{G},*)$ grubuna *değişmeli grup* ya da *abel grubu* denir. $(\mathbf{G},*)$ grubu kısaca $\mathbf{G}$ ile gösterilir.

Tanım1.2. $(\mathbf{H},+)$ bir abel grubu ve $(\cdot)$ $\mathbf{H}$ üzerinde tanımlı bir iç işlem olsun.

Eğer $\forall x, y, z \in \mathbf{H}$ için

i) $(x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z)$

ii) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ve $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$

şartları gerçekleniyorsa $\mathbf{H}=(H,+,\cdot)$ üçlüsüne bir *halka* denir.

Bir $(\mathbf{K},+,\cdot)$ cebirsel sisteminde $(+)$ toplama işlemine göre etkisiz eleman varsa 0, $(\cdot)$ işlemine göre etkisiz eleman varsa 1 ile gösterilecektir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana *özdeşlik* ya da *birim eleman* denilecektir.

Tanım1.3. Eğer $(F,+,\cdot)$ bir halka ve F nin sıfırdan farklı her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(\mathbf{F},+,\cdot)$ üçlüsüne *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. $(\cdot)$ işlemi değişmeli olan asosyatif (yani birleşme özelliğini sağlayan) bir bölümlü halkaya *cisim* adı verilir.

Tanım1.4. $(\mathbf{F},+,\cdot)$ bir cisim ve $(\mathbf{V},\oplus)$ bir abel grubu ve $\odot:\mathbf{F}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ dış işlemi verilsin. Eğer ;

V1) $\forall\alpha\in\mathbf{F},\forall u,v\in\mathbf{V}$ için $\alpha\odot(u\oplus v)=(\alpha\odot u)\oplus(\alpha\odot v)$,

V2) $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{F},\forall u\in\mathbf{V}$ için $(\alpha+\beta)\odot u=(\alpha\odot u)\oplus(\beta\odot u)$,

V3) $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{F},\forall u\in\mathbf{V}$ $(\alpha\cdot\beta)\odot u=\alpha\odot(\beta\odot u)$,

V4) $\forall u\in\mathbf{V}$ için $1\odot u=u$ dur. $(1\in F$ özdeşlik elemanı),

şartları sağlanıyorsa, $\mathbf{V}=\big((\mathbf{V},\oplus),(\mathbf{F},+,\cdot),\odot\big)$ sistemine *vektör uzayı* denir.

Tanım1.5. $\mathbf{V}=\big((\mathbf{V},\oplus),(F,+,\cdot),\odot\big)$ vektör uzayı olsun.

$\otimes:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ iç işlemi için

i) $(c\odot u)\otimes v=u\otimes(c\odot v)=c\odot(u\otimes v)$

ii) $(u_1+u_2)\otimes v=(u_1\otimes v)\oplus(u_2\otimes v)$ ve $u\otimes(v_1+v_2)=(u\otimes v_1)\oplus(u\otimes v_2)$

şartları sağlanıyorsa $\mathbf{V}=\Big(\big((\mathbf{V},\oplus),(\mathbf{F},+,\cdot),\odot\big),\otimes\Big)$ sistemine *cebir* denir.

Not: $\mathbf{V}=\Big(\big((\mathbf{V},\oplus),(\mathbf{F},+,\cdot),\odot\big),\otimes\Big)$ cebirinde,

i) $\otimes$ işlemi değişmeli ise **V** ye *değişmeli cebir* adı verilir.

ii) $\otimes$ işlemi birleşmeli ise **V** ye *birleşmeli cebir* adı verilir.

iii) $\otimes$ işlemi özdeşlik elemanına sahipse **V** ye *özdeşlikli* ya da *birimli cebir* adı verilir.

iv) Bir karışıklık söz konusu olmayacaksa $+,\oplus$ işlemleri yerine sadece + ve $\cdot,\odot,\otimes$ işlemleri yerine de yan yana yazma kullanılacaktır.

Tanım1.6. $(G,*)$ bir grup ve $f: \mathbf{G} \xrightarrow{1-1\ \text{örten}} \mathbf{G}$ fonksiyon olsun. Eğer;

$f^2 = i$ ve $\forall\, x, y \in \mathbf{G}$ için $f(x * y) = f(y) * f(x)$

şartları sağlanıyorsa f ye **G** nin bir *involüsyonlu antiotomorfizmi* denir. Burada i ile özdeşlik dönüşümü gösterilmiştir.

Tanım 1.7. Elemanlarına noktalar denilen bir **N** kümesi, elemanlarına doğrular denilen bir **D** kümesi ayrık kümeler olsun ve adına üzerinde olma bağıntısı denilen $\in\subset \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{D}$ bağıntısı gözönüne alınsın. Herhangi bir N noktası ve d doğrusu için (N, d) nin $\in$ de olması $N \in d$ ile gösterilsin ve bu "N noktası d doğrusu üzerindedir." veya "d doğrusu N noktasından geçer." biçiminde okunsun. Bu durumda, $\mathbf{P} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{D}, \in)$ sistemi için eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa **P** ye *projektif düzlem* denir:

P1) Herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

P2) Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

(Yani her iki doğrunun da üzerinde olan en az bir nokta vardır.)

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan (aynı doğru üzerinde olmayan) dört nokta vardır.

(Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktaya *dörtgen* denir.)

2. GENEL KUATERNİYON CEBİRLERİ

Bu bölümde genel kuaterniyon cebirlerinin nasıl inşa edildiğini ve reel kuaterniyonların bu cebirlerin hangi özel durumuna karşılık geldiğini vereceğiz. Bu bölümde vereceğimiz bilgiler genel olarak [4] den alınmıştır.

2.1. Birimli Olmayan Bir Cebirden Birimli Cebir Elde Etme Yöntemi.

Bu kısımda birimli olmayan bir cebirden birimli bir cebir elde edilebileceği gösterilecektir. Bu nedenle bu çalışma boyunca kullanacağımız cebirlerin aksi belirtilmedikçe birimli cebir olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.1. $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ cismi üzerinde birimli olmayan bir cebir olsun. Bu takdirde

$V=\{(\alpha,u) : \alpha\in\mathbf{F}\ , u\in\mathbf{U}\ \} = \mathbf{F} \times \mathbf{U}$

kümesi üzerinde tanımlanan

$(\alpha_1, u_1) + (\alpha_2, u_2) = (\alpha_1+\alpha_2\ , u_1 + u_2)$

$\lambda(\alpha_1, u_1) = (\lambda\alpha_1\ , \lambda\alpha_2)$

ve

$(\alpha_1, u_1)(\alpha_2, u_2) = (\alpha_1\alpha_2\ , \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2 + u_2 u_1)$

işlemleri ile birlikte **V** birimli bir cebir olur. θ, **U** nun sıfır elemanı ve 1, **F** nin birim elemanı olmak üzere l=(1,θ) elemanı **V** nin birim elemanıdır. (Bundan sonra eğer bir karışıklık olmayacaksa kullanılan cebirsel yapıların sıfır elemanı 0, birim elemanı ise 1 ile gösterilecektir.).

İspat: Vektör uzayı şartlarının sağlandığı basit işlemlerle görülebilmektedir. Biz burada sadece çarpma işleminin 2-lineer olduğunu göstereceğiz:

$\forall \gamma \in \boldsymbol{F}$ ve $x = (\alpha_1, u_1), y = (\alpha_2, u_2), z = (\alpha_3, u_3) \in \mathbf{V}$ için ;

i)

$$\begin{aligned}(\gamma x)y &= (\gamma\alpha_1, \gamma u_1)(\alpha_2, u_2)\\ &= \big((\gamma\alpha_1)\alpha_2, \alpha_2(\gamma u_1) + (\gamma\alpha_1)u_2 + u_2(\gamma u_1)\big)\\ &= \gamma(\alpha_1\alpha_2, \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2 + u_2 u_1)\\ &= \gamma(xy)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}x(\gamma y) &= (\alpha_1, u_1)(\gamma\alpha_2, \gamma u_2)\\ &= (\alpha_1(\gamma\alpha_2), (\gamma\alpha_2)u_1 + \alpha_1(\gamma u_2) + (\gamma u_2)u_1)\\ &= \gamma(\alpha_1\alpha_2, \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2 + u_2 u_1)\\ &= \gamma(xy)\end{aligned}$$

olduğundan $(\gamma x)y = x(\gamma y) = \gamma(xy)$ sonucu elde edilir.

ii) $(x+y)z = \big((\alpha_1, u_1) + (\alpha_2, u_2)\big)(\alpha_3, u_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, u_1 + u_2)(\alpha_3, u_3)$

$$= \big((\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3\ ,\ \alpha_3(u_1 + u_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)u_3 + u_3(u_1 + u_2)\big)$$

$$= (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\ ,\ \alpha_3 u_1 + \alpha_3 u_2 + \alpha_1 u_3 + \alpha_2 u_3 + u_3 u_1 + u_3 u_2)$$

$$= (\alpha_1\alpha_3\ ,\ \alpha_3 u_1 + \alpha_1 u_3 + u_3 u_1) + (\alpha_2\alpha_3\ ,\ \alpha_3 u_2 + \alpha_2 u_3 + u_3 u_2)$$

$$= [(\alpha_1, u_1)(\alpha_3, u_3)] + [(\alpha_2, u_2)(\alpha_3, u_3)]$$
$$= xz + yz$$

ve

$$x(y+z) = (\alpha_1, u_1)\big((\alpha_2, u_2) + (\alpha_3, u_3)\big)$$
$$= (\alpha_1, u_1)(\alpha_2 + \alpha_3, u_2 + u_3)$$

$$= (\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3), (\alpha_2 + \alpha_3)u_1 + \alpha_1(u_2 + u_3) + (u_2 + u_3)u_1)$$

$$= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3, \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_1 + \alpha_1 u_2 + \alpha_1 u_3 + u_2 u_1 + u_3 u_1)$$
$$= [(\alpha_1, u_1)(\alpha_2, u_2)] + [(\alpha_1, u_1)(\alpha_3, u_3)]$$
$$= xy + xz$$

olduğundan

$$(x+y)z = xz + yz$$

ve

$$x(y+z) = xy + xz$$

sonucu elde edilir.

2.2. n-Boyutlu Bir Cebirden 2n-Boyutlu Bir Cebir Elde Etme Yöntemi.

Bu kısımda, literatürde Cayley-Dickson yöntemi adıyla bilinen n-boyutlu bir cebirden 2n-boyutlu bir cebir elde etme yöntemini tanıtacağız. Önce gerekli bir tanım ve bazı sonuçları vereceğiz.

V, **F** cismi üzerinde birimli bir cebir olsun. **V** üzerinde $\forall\, x, y \in V$ için $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$ özelliklerini sağlayan $x \to \bar{x}$ lineer dönüşümüne **V** nin bir *involüsyonu* (involüsyonlu antiotomorfizmi) denir.

İnvolüsyon tanımından dolayı $\forall x \in \boldsymbol{V}$ için

$\overline{x\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{1}}\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{\mathbf{1}}\bar{x}$ ve $\overline{\mathbf{1}x} = \bar{x}\bar{\mathbf{1}} \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}\bar{\mathbf{1}}$

olduğundan

$\bar{\mathbf{1}}\bar{x} = \bar{x} = \bar{x}\bar{\mathbf{1}}$

sonucu bulunur ki bu $\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$ olduğunu gösterir. Bu durumda, involüsyon lineer olduğundan $\forall \alpha \in \boldsymbol{F}$ için $\bar{\alpha} = \overline{\alpha\,\mathbf{1}} = \alpha\,\bar{\mathbf{1}} = \alpha\,\mathbf{1} = \alpha$ olduğu bulunur. Yani involüsyonun **F** üzerine kısıtlanmışı özdeşlik dönüşümüdür . **F** cisim olduğundan değişmelidir ve $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ için $\overline{\alpha\,\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta} = \alpha\,\beta = \beta\,\alpha = \bar{\beta}\,\bar{\alpha} = \overline{\beta\,\alpha}$ olur.

Teorem 2.2. **B**, **F** cismi üzerinde n-boyutlu, birim elemanı 1 olan bir cebir ve $x \to \bar{x}$, **B** üzerinde tanımlı bir involusyon olsun.

$$\mathbf{U}=\mathbf{B}\mathrm{x}\mathbf{B}=\{\, x=(x_1,x_2) : x_1, x_2 \in \mathbf{B} \,\}$$

kümesi üzerinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri bileşen bileşene, çarpma işlemi $\mu \in \mathbf{F}$, $\mu \neq 0$ olmak üzere;

$$(x_1, x_2)\,(y_1, y_2) = (\, x_1\, y_1 + \mu\, y_2 \overline{x_2}\;,\; \overline{x_1}\, y_2 + y_1\, x_2)$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde **U**, üzerinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir cebirdir.

İspat: Toplama ve çarpma işlemleri bileşen bileşene tanımlandığından **U** nun vektör uzayı olduğunu göstermek kolaydır. **U** da tanımlı çarpma işleminin 2-lineer olduğu gösterildiğinde **U** nun **F** üzerinde bir cebir olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bunu gösterelim:

$\forall \propto \in F$ x=(x_1,x_2) , y=(y_1,y_2) , u=(u_1,u_2) $\in$ **U** için

$$(\propto x)y = (\propto (x_1,x_2))(y_1,y_2) = (\propto x_1, \propto x_2)(y_1,y_2)$$
$$= ((\propto x_1)y_1 + \mu\, y_2\, \overline{\propto x_2}, \overline{\propto x_1}\, y_2 + y_1(\propto x_2))$$
$$= (\propto (x_1y_1) + \mu\, y_2 \propto \overline{x_2}, \propto \overline{x_1}\, y_2 + \propto y_1 x_2)$$
$$= \propto (x_1y_1 + \mu\, y_2\overline{x_2}, \overline{x_1}\, y_2 + y_1x_2)$$
$$= \propto (xy)$$

ve

$$x(\propto y) = (x_1,x_2)(\propto y_1, \propto y_2)$$
$$= (x_1(\propto y_1) + \mu\, (\propto y_2)\overline{x_2}, \overline{x_1}(\propto y_2) + (\propto y_1)x_2)$$
$$= \propto (xy)$$

olup $x(\propto y) = \propto (xy)$ olduğu görülür. O halde $(\propto x)y = x(\propto y) = \propto (xy)$ olur. Ayrıca ;

$$(x+y)u = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)(u_1,u_2)$$
$$= ((x_1 + y_1)u_1 + \mu u_2\overline{(x_2 + y_2)}, \overline{x_1 + y_1}u_2 + u_1(x_2 + y_2))$$

olur. İnvolüsyonun lineer olduğu ve **B** nin cebir olduğu kullanılarak;

$$(x+y)u = (x_1u_1 + y_1u_1 + \mu(u_2\overline{x_2} + u_2\overline{y_2}), (\overline{x_1} + \overline{y_1})u_2 + u_1x_2 + u_1y_2)$$

$$= ((x_1u_1 + \mu u_2\overline{x_2}) + (y_1u_1 + \mu u_2\overline{y_2}), (\overline{x_1}u_2 + u_1x_2) + (\overline{y_1}u_2 + u_1y_2))$$

$$= (x_1u_1 + \mu u_2\overline{x_2}, \overline{x_1}u_2 + u_1x_2) + (y_1u_1 + \mu u_2\overline{y_2}, \overline{y_1}u_2 + u_1y_2)$$

$$= xu + yu$$

olduğu ve benzer nedenlerle,

$$x(y+u) = (x_1,x_2)(y_1+u_1,y_2+u_2)$$
$$= (x_1(y_1+u_1) + \mu(y_2+u_2)\overline{x_2}, \overline{x_1}(y_2+u_2) + (y_1+u_1)x_2)$$

$$= (x_1y_1 + x_1u_1 + \mu y_2\overline{x_2} + \mu u_2\overline{x_2}, \overline{x_1}y_2 + \overline{x_1}u_2 + y_1x_2 + u_1x_2)$$

$$= (x_1y_1 + \mu y_2\overline{x_2}, \overline{x_1}y_2 + y_1x_2) + (x_1u_1 + \mu u_2\overline{x_2}, \overline{x_1}u_2 + u_1x_2)$$
$$= xy + xu$$

eşitliğinin geçerli olduğu bulunur. Bu da **U** nun bir cebir olduğunu gösterir.□

2.3. Cayley-Dickson Yönteminin İlk İki Adımı

Bu kısımda, bir önceki kısımda verilen n-boyutlu cebirden 2n-boyutlu cebir elde etme yöntemi olan Cayley-Dickson yöntemini $n = 1$ den başlayarak peşpeşe uygulayacağız ve böylece önce ilk adımda kompleks cebirler adı verilen cebirleri, sonra ikinci adımda kuaterniyon cebirleri adı verilen cebirleri inşa etmiş olacağız.

2.3.1.Kompleks Cebirler

Teorem 2.2 de (yani Cayley-Dickson yönteminde) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}$ alındığında

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^2 = \{(x_1,x_2) : x_1,x_2 \in \boldsymbol{F}\}$$

olur. $x = (x_1,x_2) \in \boldsymbol{C}$ için $\bar{x} = (\overline{x_1}, -x_2) = (x_1, -x_2)$ biçiminde tanımlı dönüşümün bir involüsyon olduğu kolayca gösterilebilir. **C** üzerinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri bileşen bileşene tanımluolup, $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in C$ için $\mu_1\neq 0,\ \mu_1\in F$ olmak üzere Cayley-Dickson yöntemindeki çarpma işleminin karşılığının **C** üzerinde

$xy=(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1+\mu_1\, y_2\overline{x_2}, \overline{x_1}\,y_2+y_1x_2)=(x_1y_1+\mu_1\, y_2x_2, x_1y$

$\mu, x_i, y_i \in F,\ i=1{,}2$ biçiminde olduğu görülür. Burada **F** bir cisim olup cisimde değişme özelliği geçerli olduğundan $xy=(x_1y_1+\mu_1\,x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$ yazılabilir. Böyle bulunan **C** cebirlerine *kompleks cebirler* denir.

Şimdi **C** de değişme ve birleşme özelliklerinin sağlanıp sağlanmadığını araştıralım. İşlemleri kolaylaştırmak maksadıyla, çarpma işlemi için

```
> c2:=proc(x::{list,set}, y::{list,set});
[x[1]*y[1]+mu[1]*x[2]*y[2], x[1]*y[2]+y[1]*x[2]];
end proc;
c2 := proc(x::{set, list}, y::{set, list})
    [x[1]*y[1] + mu[1]*x[2]*y[2], x[1]*y[2] + y[1]*x[2]]
end proc
```

```
> c2([a1,a2],[b1,b2]);
```

$[a1\ b1+\mu_1\ a2\ b2, a1\ b2+b1\ a2]$

biçiminde hazırladığımız bir Maple prosedürünü kullanacağız. Bu prosedür anlaşılacağı üzere **C** nin elemanları için çarpma işlemini yapmaktadır. (Maple ile sıralı n-liler köşeli parantez ile yazılmak zorundadır.)

```
> x:=[x1,x2];y:=[y1,y2];z:=[z1,z2];
x := [x1, x2]
y := [y1, y2]
z := [z1, z2]
```

> c2(x,y);

$[x1\,y1 + \mu_1\,x2\,y2, x1\,y2 + y1\,x2]$

> c2(y,x);

$[x1\,y1 + \mu_1\,x2\,y2, x1\,y2 + y1\,x2]$

> c2(x,y)-c2(y,x);

$[0, 0]$

olduğundan **C** nin değişmeli olduğu elde edilir. Benzer biçimde,

> c2(x,c2(y,z));

$$[x1\,(y1\,z1 + \mu_1\,y2\,z2) + \mu_1\,x2\,(y1\,z2 + z1\,y2), x1\,(y1\,z2 + z1\,y2) + (y1\,z1 + \mu_1\,y2\,z2)\,x2]$$

> c2(c2(x,y),z);

$$[(x1\,y1 + \mu_1\,x2\,y2)\,z1 + \mu_1\,(x1\,y2 + y1\,x2)\,z2, (x1\,y1 + \mu_1\,x2\,y2)\,z2 + z1\,(x1\,y2 + y1\,x2)]$$

> simplify(c2(x,c2(y,z))-c2(c2(x,y),z));

$[0, 0]$

sonucu **C** de birleşme özelliğinin geçerli olduğunu göstermektedir.

C nin bir bazı olarak e1=(1,0) ve e2=(0,1) alınabileceği aşikârdır. Bu durumda **C** deki çarpma işlemi için işlem tablosu yapmak gerekirse,

> # C İÇİN İŞLEM TABLOSU.........
> e1:=[1,0]; e2:=[0,1];

$e1 := [1, 0]$

$e2 := [0, 1]$

> c2(e1,e1);

$[1, 0]$

> c2(e1,e2);

$[0, 1]$

> c2(e2,e1);

$[0, 1]$

> c2(e2,e2);

$[\mu_1, 0]$

	e1	e2
e1	e1	e2
e2	e2	μ1.e1

olduğu görülür.

Burada $F = R$ *ve* $\mu 1 = -1 \in R$ seçerek iyi bilinen reel kompleks sayılar cebri elde edilir. Bunun için sadece $x = (x_1, x_2)$ gösterimi yerine e1=1, e2=i alınarak $x = x_1 + ix_2$ gösterimini kullanmak yeterlidir.

2.3.2. Kuaterniyonlar cebirleri.

Teorem 2.2 de (yani Cayley-Dickson yönteminde) $B = C$ alındığında $u = (x_1, x_2)$, $v = (x_3, x_4)$,

$Q = C \times C = \{(u, v): u, v \in C\} = \{((x_1, x_2), (x_3, x_4)): x_1, x_2, x_3, x_4 \in F\}$

olur ve $w = (u, v) \in Q$ için

$$\bar{w} = \overline{(u, v)} = (\bar{u}, -v) = \left(\overline{(x_1, x_2)}, (-x_3, -x_4)\right)$$
$$= \left((\overline{x_1}, -x_2), (-x_3, -x_4)\right)$$
$$= \left((x_1, -x_2), (-x_3, -x_4)\right)$$

olduğu elde edilir. Kolaylık olması bakımından $\big((x_1,x_2),(x_3,x_4)\big)$ yerine (x_1,x_2,x_3,x_4) gösterimi kullanılır. Yani $\boldsymbol{Q} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_i \in \boldsymbol{F}, i = 1,2,3,4\}$ ve $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \boldsymbol{Q}$ için $\bar{x} = (x_1,-x_2,-x_3,-x_4)$ olur. $\boldsymbol{Q}$ da toplama ve skalarla çarpma işlemleri bileşen bileşene tanımlıdır. Çarpma işlemi ise,

$x = \big((x_1,x_2),(x_3,x_4)\big)$ ve $y = \big((y_1,y_2),(y_3,y_4)\big)$ için

$\mu_2 \in \boldsymbol{F}$ ve $\mu_2 \neq 0$ olmak üzere

$$xy = \Big((x_1,x_2)(y_1,y_2) + \mu_2(y_3,y_4)\overline{(x_3,x_4)}, \overline{(x_1,x_2)}(y_3,y_4) + (y_1,y_2)(x_3,x_4)\Big)$$

$$= \big((x_1,x_2)(y_1,y_2) + \mu_2(y_3,y_4)(x_3,-x_4)\ ,(x_1,-x_2)(y_3,y_4) + (y_1,y_2)(x_3,x_4)\big)$$

$$\begin{aligned}= \big(&(x_1y_1 + \mu_1\ y_2\overline{x_2}\ ,\overline{x_1}\,y_2 + y_1x_2) + \mu_2(y_3x_3 - \mu_1x_4\overline{y_4},-\overline{y_3}x_4 + x_3y_4),\\ &(x_1y_3 - \mu_1y_4\overline{x_2}\ ,\overline{x_1}\,y_4 - y_3x_2) + (y_1x_3 + \mu_1x_4\overline{y_2},\overline{y_1}x_4 + x_3y_2)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \big(&(x_1y_1 + \mu_1x_2\,y_2 + \mu_2x_3y_3 - \mu_1\mu_2x_4y_4\ ,x_1y_2 + x_2y_1 + \mu_2x_3y_3 - \mu_1\mu_2x_4y_4),\\ &(x_1y_3 - \mu_1x_2\,y_4 + x_3y_1 + \mu_1x_4\,y_2\ ,x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (&x_1y_1 + \mu_1x_2\,y_2 + \mu_2x_3y_3 - \mu_1\mu_2x_4y_4\ ,x_1y_2 + x_2y_1 + \mu_2x_3y_3 - \mu_1\mu_2x_4y_4,\\ &x_1y_3 - \mu_1x_2\,y_4 + x_3y_1 + \mu_1x_4\,y_2\ ,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)\end{aligned}$$

biçimindedir.

Kompleks cebirlerden Cayley-Dickson yönetmi ile elde edilen bu $\boldsymbol{Q}$ cebirlerine *kuaterniyon cebirleri* adı verilir.

2.3.1. kısımda yaptığımız Maple programlarının benzerlerini kuaterniyon cebirleri için de yapıp, bu cebirlerde değişme ve birleşme özelliklerinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyeceğiz ve standart baz yardımıyla kuaterniyon cebirleri için çarpım tablosu yapacağız.

```
> restart:
> # KUATERNİYON CEBİRLERİ İÇİN ÇARPMA İŞLEMİ...........
> c4:=proc(x::{list,set}, y::{list,set});
[x[1]*y[1]+mu[1]*x[2]*y[2]+mu[2]*x[3]*y[3]-
mu[1]*mu[2]*x[4]*y[4],x[1]*y[2]+x[2]*y[1]-
mu[2]*x[4]*y[3]+mu[2]*x[3]*y[4],                    x[1]*y[3]-
mu[1]*x[2]*y[4]+x[3]*y[1]+mu[1]*x[4]*y[2],x[1]*y[4]-
x[2]*y[3]+x[3]*y[2]+x[4]*y[1]];
end proc;
c4 := proc(x::{set, list}, y::{set, list})
    [x[1]*y[1] + mu[1]*x[2]*y[2] + mu[2]*x[3]*y[3] − mu[1]
    *mu[2]*x[4]*y[4], x[1]*y[2] + x[2]*y[1] − mu[2]*x[4]*y
    [3] + mu[2]*x[3]*y[4], x[1]*y[3] − mu[1]*x[2]*y[4] + x[3
    ]*y[1] + mu[1]*x[4]*y[2], x[1]*y[4] − x[2]*y[3] + x[3]*y
    [2] + x[4]*y[1]]
end proc

> # c4  İŞLEMİ DEĞİŞMELİ MİDİR, BİRLEŞMELİ MİDİR?....
> a:=[a1,a2,a3,a4]; b:=[b1,b2,b3,b4]; c:=[c1,c2,c3,c4];
```

$a := [a1, a2, a3, a4]$

$b := [b1, b2, b3, b4]$

$c := [c1, c2, c3, c4]$

```
> k1:=c4(a,b);
```

$$k1 := \left[a1\, b1 + \mu_1\, a2\, b2 + \mu_2\, a3\, b3 - \mu_1\, \mu_2\, a4\, b4, a1\, b2 + a2\, b1 - \mu_2\, a4\, b3 + \mu_2\, a3\, b4, a1\, b3 - \mu_1\, a2\, b4 + a3\, b1 + \mu_1\, a4\, b2, a1\, b4 - a2\, b3 + a3\, b2 + a4\, b1\right]$$

```
> k2:=c4(b,a);
```

$$k2 := [a1\,b1 + \mu_1\,a2\,b2 + \mu_2\,a3\,b3 - \mu_1\,\mu_2\,a4\,b4, a2\,b1 + a1\,b2 - \mu_2\,a3\,b4 + \mu_2\,a4\,b3, a3\,b1 - \mu_1\,a4\,b2 + a1\,b3 + \mu_1\,a2\,b4, a4\,b1 - a3\,b2 + a2\,b3 + a1\,b4]$$

> k1-k2;

$$[0, 2\,\mu_2\,a3\,b4 - 2\,\mu_2\,a4\,b3, 2\,\mu_1\,a4\,b2 - 2\,\mu_1\,a2\,b4, 2\,a3\,b2 - 2\,a2\,b3]$$

> simplify(k1-k2);

$$[0, 2\,\mu_2\,a3\,b4 - 2\,\mu_2\,a4\,b3, 2\,\mu_1\,a4\,b2 - 2\,\mu_1\,a2\,b4, 2\,a3\,b2 - 2\,a2\,b3]$$

k1-k2 sonucu [0,0,0,0] olmadığından, ab≠ba dır. Yani çarpma işlemi değişmeli değildir. Aşağıda bir sayısal örnek veriyoruz.

> orn1:=[1,1,1,0]; orn2:=[1,0,1,1];

$$orn1 := [1, 1, 1, 0]$$

$$orn2 := [1, 0, 1, 1]$$

> c4(orn1,orn2);

$$[1 + \mu_2, 1 + \mu_2, 2 - \mu_1, 0]$$

> c4(orn2,orn1);

$$[1 + \mu_2, 1 - \mu_2, 2 + \mu_1, 2]$$

> c4(orn1,orn2)-c4(orn2,orn1);

$$[0, 2\,\mu_2, -2\,\mu_1, -2]$$

> # c4 İŞLEMİ BİRLEŞMELİ MİDİR?..............
> denk1:=expand(c4(a,c4(b,c)));
> denk2:=expand(c4(c4(a,b),c));

$$denk2 := [a1\, b1\, c1 + a1\, \mu_1\, b2\, c2 + a1\, \mu_2\, b3\, c3 - a1\, \mu_1\, \mu_2\, b4\, c4 + \mu_1\, a2\, b1\, c2 + \mu_1\, a2\, b2\, c1 - \mu_1\, a2\, \mu_2\, b4\, c3 + \mu_1\, a2\, \mu_2\, b3\, c4 + \mu_2\, a3\, b1\, c3 - \mu_2\, a3\, \mu_1\, b2\, c4 + \mu_2\, a3\, b3\, c1 + \mu_2\, a3\, \mu_1\, b4\, c2 - \mu_1\, \mu_2\, a4\, b1\, c4 + \mu_1\, \mu_2\, a4\, b2\, c3 - \mu_1\, \mu_2\, a4\, b3\, c2 - \mu_1\, \mu_2\, a4\, b4\, c1, a1\, b1\, c2 + a1\, b2\, c1 - a1\, \mu_2\, b4\, c3 + a1\, \mu_2\, b3\, c4 + a2\, b1\, c1 + a2\, \mu_1\, b2\, c2 + a2\, \mu_2\, b3\, c3 - a2\, \mu_1\, \mu_2\, b4\, c4 - \mu_2\, a4\, b1\, c3 + \mu_2\, a4\, \mu_1\, b2\, c4 - \mu_2\, a4\, b3\, c1 - \mu_2\, a4\, \mu_1\, b4\, c2 + \mu_2\, a3\, b1\, c4 - \mu_2\, a3\, b2\, c3 + \mu_2\, a3\, b3\, c2 + \mu_2\, a3\, b4\, c1, a1\, b1\, c3 - a1\, \mu_1\, b2\, c4 + a1\, b3\, c1 + a1\, \mu_1\, b4\, c2 - \mu_1\, a2\, b1\, c4 + \mu_1\, a2\, b2\, c3 - \mu_1\, a2\, b3\, c2 - \mu_1\, a2\, b4\, c1 + a3\, b1\, c1 + a3\, \mu_1\, b2\, c2 + a3\, \mu_2\, b3\, c3 - a3\, \mu_1\, \mu_2\, b4\, c4 + \mu_1\, a4\, b1\, c2 + \mu_1\, a4\, b2\, c1 - \mu_1\, a4\, \mu_2\, b4\, c3 + \mu_1\, a4\, \mu_2\, b3\, c4, a1\, b1\, c4 - a1\, b2\, c3 + a1\, b3\, c2 + a1\, b4\, c1 - a2\, b1\, c3 + a2\, \mu_1\, b2\, c4 - a2\, b3\, c1 - a2\, \mu_1\, b4\, c2 + a3\, b1\, c2 + a3\, b2\, c1 - a3\, \mu_2\, b4\, c3 + a3\, \mu_2\, b3\, c4 + a4\, b1\, c1 + a4\, \mu_1\, b2\, c2 + a4\, \mu_2\, b3\, c3 - a4\, \mu_1\, \mu_2\, b4\, c4]$$

> **denk1-denk2;**

[0, 0, 0, 0]

denk1-denk2=0 olduğundan c4 işlemi birleşme özelliğini sağlar.

> # c4 **İÇİN İŞLEM TABLOSU.........**

```
> q1:=[1,0,0,0]; q2:=[0,1,0,0]; q3:=[0,0,1,0]; q4:=[0,0,0,1];
```
$q1 := [1, 0, 0, 0]$

$q2 := [0, 1, 0, 0]$

$q3 := [0, 0, 1, 0]$

$q4 := [0, 0, 0, 1]$

> c4(q1,q1);
$[1, 0, 0, 0]$

> c4(q1,q2);
$[0, 1, 0, 0]$

> c4(q1,q3);
$[0, 0, 1, 0]$

> c4(q1,q4);
$[0, 0, 0, 1]$

> c4(q2,q1);
$[0, 1, 0, 0]$

> c4(q2,q2);
$[\mu_1, 0, 0, 0]$

> c4(q2,q3);
$[0, 0, 0, -1]$

> c4(q2,q4);
$[0, 0, -\mu_1, 0]$

> c4(q3,q1);
$[0, 0, 1, 0]$

> c4(q3,q2);
$[0, 0, 0, 1]$

> c4(q3,q3);
$[\mu_2, 0, 0, 0]$

> c4(q3,q4);
$[0, \mu_2, 0, 0]$

> c4(q4,q1);

$[0, 0, 0, 1]$

> **c4(q4,q2);**

$[0, 0, \mu_1, 0]$

> **c4(q4,q3);**

$[0, -\mu_2, 0, 0]$

> **c4(q4,q4);**

$[-\mu_1 \mu_2, 0, 0, 0]$

olduğundan kuaterniyon cebirleri için baz elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibidir:

	q1	q2	q3	q4
q1	q1	q2	q3	q4
q2	q2	μ1.q1	-q4	-μ1.q3
q3	q3	q4	μ2.q1	μ2.q1
q4	q4	μ1.q3	-μ2.q2	-μ1.μ2.q1

Burada $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$ ve $\mu 1 = \mu 2 = -1 \in \boldsymbol{R}$ seçerek iyi bilinen reel kuaterniyonlar cebri elde edilir. Bunun için sadece $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ gösterimi yerine q1=1, q2=*i* , q3=*j*, q4=*k* alınarak $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ gösterimini kullanmak yeterlidir.

Aşağıda, bir sonraki bölümde gerekli olacağından sıfırdan farklı bir kuaterniyonun tersinin var olduğunu gösteren ve tersi için formül veren Maple prosedürünü veriyoruz.

> **# SIFIRDAN FARKLI BİR a=[a1,a2,a3,a4] KUATERNİYONUNUN (ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE)TERSİ.....**

```
> c4t:=proc(x::{list,set});
[x[1]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2+x[1]^2-x[2]^2*mu[1]-mu[2]*x[3]^2),-
x[2]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2+x[1]^2-x[2]^2*mu[1]-mu[2]*x[3]^2),-
x[3]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2+x[1]^2-x[2]^2*mu[1]-mu[2]*x[3]^2),-
1/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2+x[1]^2-x[2]^2*mu[1]-mu[2]*x[3]^2)*x[4]];
end proc;
>
```

```
c4t := proc(x::{set, list})
    [x[1]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2 + x[1]^2 − x[2]^2*mu[1
    ] − mu[2]*x[3]^2), − x[2]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2 + x[1]
    ^2 − x[2]^2*mu[1] − mu[2]*x[3]^2), − x[3]/(mu[2]*mu[1
    ]*x[4]^2 + x[1]^2 − x[2]^2*mu[1] − mu[2]*x[3]^2), − x[4
    ]/(mu[2]*mu[1]*x[4]^2 + x[1]^2 − x[2]^2*mu[1] − mu[2]
    *x[3]^2)]
end proc
```

Örneğin (1,1,1,1) kuaterniyonunun tersi,

```
> c4t([1,1,1,1]);
```

$$\left[\frac{1}{\mu_2\mu_1+1-\mu_1-\mu_2},\ -\frac{1}{\mu_2\mu_1+1-\mu_1-\mu_2},\ -\frac{1}{\mu_2\mu_1+1-\mu_1-\mu_2},\ -\frac{1}{\mu_2\mu_1+1-\mu_1-\mu_2}\right]$$

olur. Diğer taraftan,

```
> c4(a,c4t(a));
```

$$\left[\frac{a1^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} - \frac{\mu_1 a2^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} - \frac{\mu_2 a3^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} + \frac{\mu_1 \mu_2 a4^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2}, 0, 0, 0\right]$$

> simplify(%);

$[1, 0, 0, 0]$

ve

> c4(c4t(a),a);

$$\left[\frac{a1^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} - \frac{\mu_1 a2^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} - \frac{\mu_2 a3^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2} + \frac{\mu_1 \mu_2 a4^2}{\mu_2 \mu_1 a4^2 + a1^2 - a2^2 \mu_1 - \mu_2 a3^2}, 0, 0, 0\right]$$

> simplify(%);

$[1, 0, 0, 0]$

olduğundan,

> a:=[a1,a2,a3,a4];

$[a1, a2, a3, a4]$

elemanının tersinin,

> c4t(a);

$$\left[\frac{a1}{\mu_2\,\mu_1\,a4^2 + a1^2 - a2^2\,\mu_1 - \mu_2\,a3^2},\ -\frac{a2}{\mu_2\,\mu_1\,a4^2 + a1^2 - a2^2\,\mu_1 - \mu_2\,a3^2},\ -\frac{a3}{\mu_2\,\mu_1\,a4^2 + a1^2 - a2^2\,\mu_1 - \mu_2\,a3^2},\ -\frac{a4}{\mu_2\,\mu_1\,a4^2 + a1^2 - a2^2\,\mu_1 - \mu_2\,a3^2}\right]$$

olduğu sonucu bulunur. a=0=(0,0,0,0) kuaterniyonunun tersi olmadığı aşikârdır.

3.LOKAL HALKALAR VE BU HALKALARLA KOORDİNATLANAN PROJEKTİF YAPILAR.

Bu bölümde önce lokal halkalar tanıtılacak ve dual kuaterniyonlar kümesinin üzerinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir lokal halka olduğu gösterilecek, daha sonra ise bu tür halkalarla koordinatlanan geometrik yapılardan biri inşa edilecektir.

3.1. Bir Lokal Halka Örneği: Dual Kuaterniyonlar.

Bu kısımda lokal halka kavramı tanıtılacak ve daha sonra dual kuaterniyonların oluşturduğu kümenin üzerinde tanımlayacağımız işlemlerle birlikte bir lokal halka olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.1. (**H**, +, .) özdeşlikli bir halkasının çarpma işlemine göre tersi olmayan elemanlarının kümesi **I** ile gösterilsin. Eğer **I** , **H** nın bir ideali ise **H** ya *lokal halka* denir.

Teorem 3.2. $Q(\varepsilon) := Q + Q\varepsilon = \{x + y\varepsilon : x, y \in Q\}$ kümesi, üzererinde tanımlanan

$a+ \quad + \quad + \quad = \quad + \quad + \quad +$

$a+ \quad + \quad = \quad + \quad +$

toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir birimli lokal halkadır. (Bu halkaya *dual kuaterniyonlar halkası* denir.).

İspat. $(Q(\varepsilon), +, \cdot)$ nın halka olduğunu göstermek kolaydır. $1 = 1 + 0\varepsilon \in Q(\varepsilon)$ elemanının birim eleman olduğu basit işlemlerle gösterilebilir. İki dual sayının eşitliği

$x + y\varepsilon = u + v\varepsilon \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$

biçiminde tanımlandığından

$(b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = 1 \Leftrightarrow (bc)\varepsilon = 1$

olması mümkün değildir. Bu nedenle, $(b\varepsilon)$ türünden elemanların tersi yoktur.

$a \neq 0, a \in Q$ için $a^{-1} \in Q$ olduğu 2.3.2. kısımda verilmiştir. Bu durumda,

$(a + b\varepsilon)(a^{-1} - a^{-1}ba^{-1}\varepsilon) = 1 - ba^{-1}\varepsilon + ba^{-1}\varepsilon = 1$

eşitliği ve benzer biçimde

$(a^{-1} - a^{-1}ba^{-1}\varepsilon)(a + b\varepsilon) = 1$

eşitliği geçerli olduğundan $a \neq 0$ iken $(a + b\varepsilon)^{-1} = a^{-1} - a^{-1}ba^{-1}\varepsilon$ olur. Bu nedenle $Q(\varepsilon)$ da tersi olmayan elemanların kümesi $Q\varepsilon$ dir. $Q\varepsilon$ un bir alt halka olduğu aşikar olup

$(a + b\varepsilon)(q\varepsilon) = (aq)\varepsilon$ ve $(q\varepsilon)(a + b\varepsilon) = (qa)\varepsilon$

olduğundan $Q\varepsilon$ bir idealdir. O halde $Q(\varepsilon)$ bir lokal halkadır.□

3.2. Projektif Klingenberg Düzlemleri.

Bu kısımda lokal halkalarla koordinatlanabilen projektif yapılar olan Projektif-Klingenberg düzlemleri tanıtılacaktır ve $Q(\varepsilon)$ lokal halkası ile koordinatlanan Projektif-Klingenberg düzlemleri üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 3.3. Elemanlarına noktalar denilen bir **N** kümesi, elemanlarına doğrular denilen bir **D** kümesi ayrık kümeler olsun ve adına üzerinde olma bağıntısı denilen $\in \subset N \times D$ bağıntısı gözönüne alınsın. $\sim$, **N** ve **D** kümeleri üzerinde bir denklik bağıntısı olsun ve *komşuluk bağıntısı* olarak isimlendirilsin. Bu durumda, $\mathbf{S} = (N, D, \in, \sim)$ sistemi için eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa **S** ye *Projektif-Klingenberg* düzlemi (PK-düzlem) denir:

PK1) Aynı komşulukta olmayan herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

PK2) Aynı komşulukta olmayan herhangi iki doğrunun bir tek arakesit noktası vardır.

PK3) $\mathbf{S}^* = (N^*, D^*, \in)$ bir projektif düzlem olmak üzere, üzerinde olmayı koruyan bir $\Psi : S \to S^*$

örten homomorfizmi

Her $A,B \in \boldsymbol{N}$, $c,d \in \boldsymbol{D}$ için $\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B$ ve $\Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$

şartını sağlayacak biçimde vardır.

Tanım 3.4. Eğer $A \sim B$ ve $B \in d$ olacak biçimde bir $B \in \boldsymbol{N}$ noktası varsa A noktasına d doğrusunun *yakınındadır* denir ve $A \sim d$ ile gösterilir. PK-düzlemlerinde herhangi üçü aynı doğrunun yakınında olmayan dört noktaya *dörtgen* denir.

3.2.1. Projektif-Klingenberg düzleminin koordinatlanması.

S bir PK-düzlem ve (O,E,U,V) **S** de bir dörtgen olsun ve OE doğrusu d ile, UV doğrusu d_∞ ile gösterilsin. W:=d $\cap$ UV olmak üzere;

$H :=$ $\in$ | $\in$ $\not\square$ $W\}$

$I :=$ $\in$. $\square$

olsun ve özel olarak 0:=O, 1:=E olarak alınsın. Bu durumda **S** nin noktaları aşağıdaki gibi koordinatlanır:

3.2.1.1. Noktaların Koordinatlanması.

d nin üzerindeki d_∞ a yakın olmayan noktaları $x \in \mathbf{H}$ olmak üzere $(x,x,1)$ ile koordinatlansın. $w,z,q,n \in \mathbf{I}$ olmak üzere düzlemin bir N noktası aşağıdaki gibi, noktanın durumuna göre üç farklı durumda koordinatlanır:

1.Durum: $N \not\sim d_\infty$ ise

$NV \cap \quad =$

ve

$NU \cap \quad =$

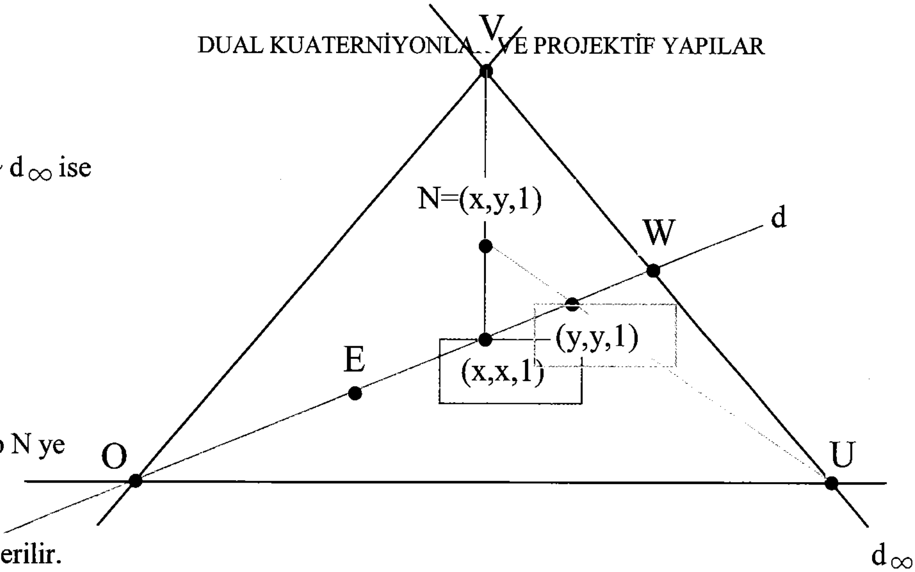
biçiminde olup N ye

$N =$

koordinatları verilir.

Özel olarak

E=(1,1,1) ve O=(0,0,1) dir.



Şekil 1

2.Durum: $N \sim d_\infty$ ve $N \not\sim V$ ise

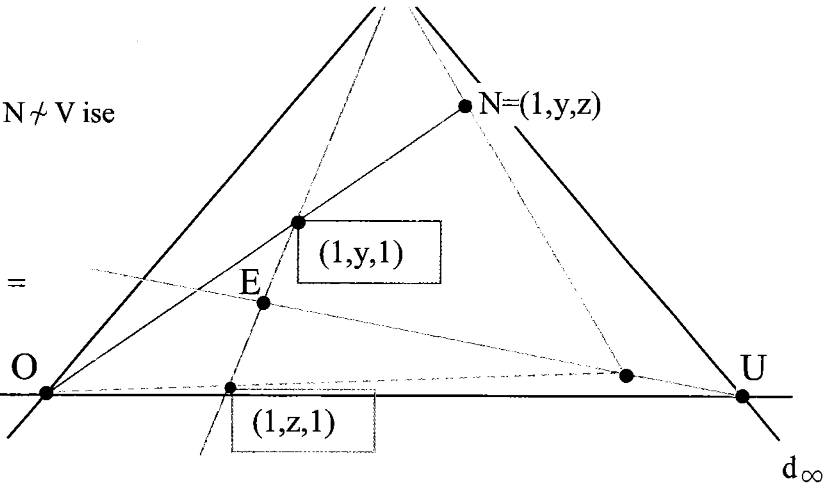
$ON \cap \quad =$

$(NV \cap \quad \cap \quad =$

olup N için

$N =$

koordinatları verilir.



Şekil 2

3.Durum: N~V ise

$ON \cap$ =

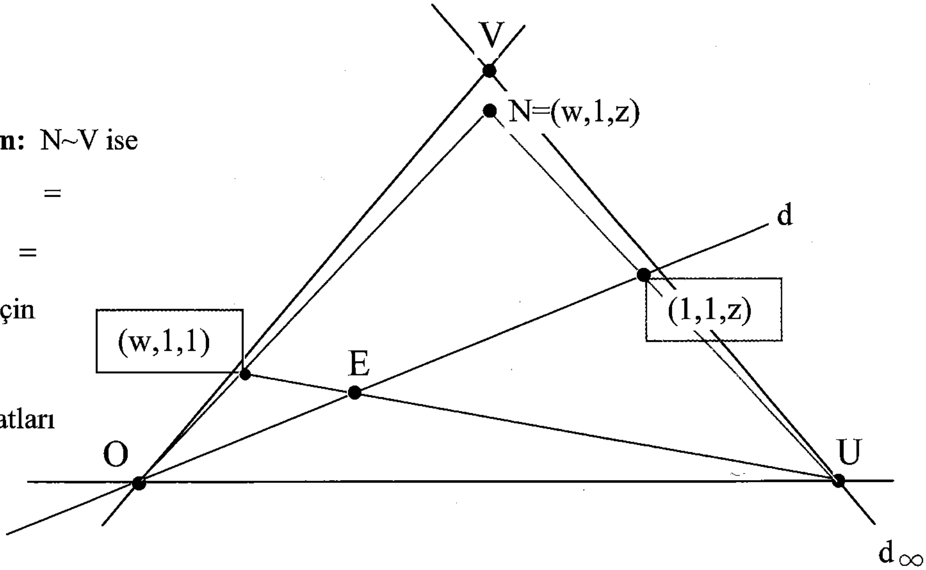
$NU \cap$ =

olup N için

$N =$

koordinatları

verilir.



Şekil 3

3.2.1.2. Doğruların Koordinatlanması.

Düzlemin herhangi bir c doğrusu da noktalarda olduğu gibi üç farklı duruma ayrılarak koordinatlanır.

1.Durum: c ≁ V ise

$c \cap$ =

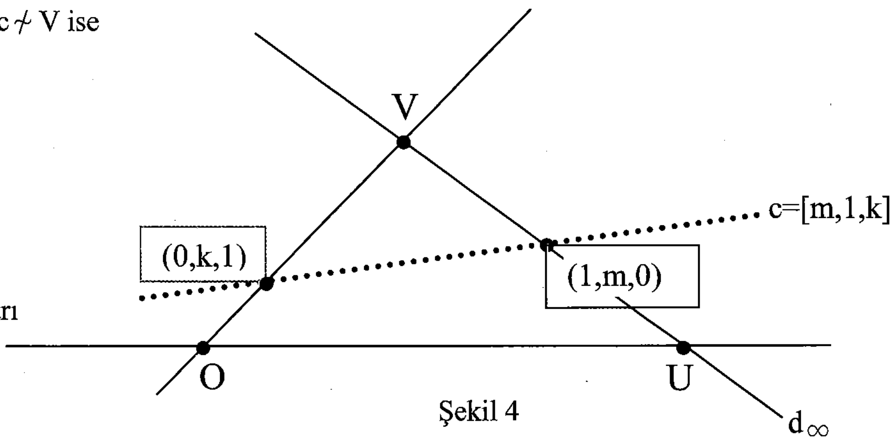
$c \cap$ =

olup c için

$c =$

koordinatları

verilir.



Şekil 4

2.Durum: c~V ve c$\not\sim$ d$_\infty$ ise

$c\cap$ =

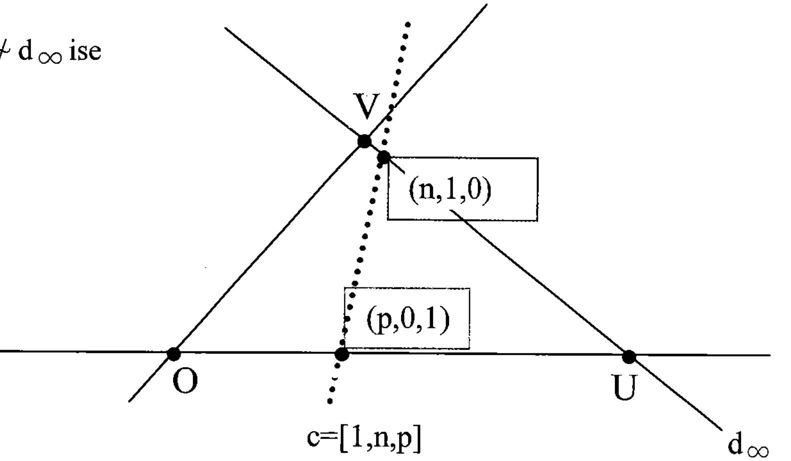
$c\cap$ =

olup c için

c =

koordinatları

verilir.



Şekil 5

3.Durum: c~d$_\infty$ ise

$c\cap$ =

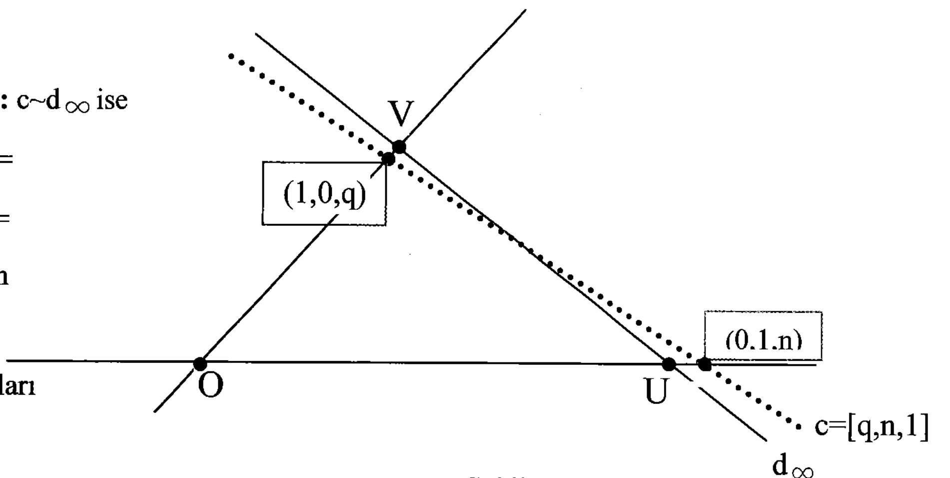
$c\cap$ =

olup c için

c =

koordinatları

verilir.



Şekil 6

Aşağıda ispatı [2] de bulunabilecek bir teoremi ispatsız olarak veriyoruz:

Teorem 3.5. **H** bir lokal halka ve **I** tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu ideal olsun. Noktalar kümesi

$\boldsymbol{N} = \{(x,y,1): x,y \in \boldsymbol{H}\} \cup \{(1,y,z): y \in \boldsymbol{H}, z \in \boldsymbol{I}\} \cup \{(w,1,z): w,z \in \boldsymbol{I}\}$

ve doğrular kümesi

$\boldsymbol{D} = \{[m,1,k]: m,k \in \boldsymbol{H}\} \cup \{[1,n,p]: p \in \boldsymbol{H}, n \in \boldsymbol{I}\} \cup \{[q,n,1]: q,n \in \boldsymbol{I}\}$

olarak tanımlansın. Üzerinde olma bağıntısı $\in$;

$(x,y,1) \in [m,1,k] \Rightarrow y = xm + k$

$(x,y,1) \in [1,n,p] \Rightarrow x = yn + p$

$(x,y,1) \notin [q,n,1]$

$(1,y,z) \in [m,1,k] \Rightarrow y = m + zk$

$(1,y,z) \in [q,n,1] \Rightarrow z = q + yn$

$(1,y,z) \notin [1,n,p]$

$(w,1,z) \in [q,n,1] \Rightarrow z = wq + n$

$(w,1,z) \in [1,n,p] \Rightarrow w = n + zp$

$(w,1,z) \notin [m,1,k]$

biçiminde ve komşulukta olma bağıntısı $\sim$;

$(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3) \Rightarrow x_i - y_i \in I, i = 1,2,3$

$[a_1,a_2,a_3] \sim [b_1,b_2,b_3] \Rightarrow a_i - b_i \in I, i = 1,2,3$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{D}, \in, \sim)$ bir projektif-Klingenberg düzlemidir. □

Bir **H** lokal halkası yardımıyla koordinatlanan projektif klingenberg düzlemi $PK(\boldsymbol{H})$ ile gösterilecektir.

Sonuç 3.6. $PK(\boldsymbol{H})$ düzleminde doğrular üzerindeki noktaların kümesi olarak,

$$[m,1,k] = \{(x,y,1): x,y = xm + k \in \boldsymbol{H}\} \cup \{(1,y,z): y = m + zk \in \boldsymbol{H}, z \in \boldsymbol{I}\}$$

$$[1,n,p] = \{(x,y,1): x = yn + p, y \in \boldsymbol{H}\} \cup \{(w,1,z): w = n + zp, z \in \boldsymbol{I}\}$$

$$[q,n,1] = \{(1,y,z): y \in \boldsymbol{H}, z = q + yn \in \boldsymbol{I}\} \cup \{(w,1,z): w, z = wq + n \in \boldsymbol{I}\}$$

biçimindedir.

3.3. Dual Kuaterniyonlar Halkası İle Koordinatlanan PK Düzlemleri

Bu kısımda $\boldsymbol{Q}(\varepsilon)$ lokal halkası ile koordinatlanan Projektif-Klingenberg düzlemleri, yani $\mathrm{PK}(\boldsymbol{Q}(\varepsilon))$ üzerinde çalışılıp bu düzleminin doğru ve noktaları ile üzerinde olma ve komşulukta olma bağıntılarını incelenecektir.

3.3.1. $\mathrm{PK}(\boldsymbol{Q}(\varepsilon))$ da doğrular.

Bu kısımda $\mathrm{PK}(\boldsymbol{Q}(\varepsilon))$ düzleminin doğruları üzerindeki noktaların sağladığı özellikler araştırılacaktır.

3.3.1.1. $[m, 1, k]$ tipinden doğrular.

$m, k \in Q(\varepsilon)$ olup bu tip doğrular üzerinde $x, y \in Q(\varepsilon), z \in Q\varepsilon$ olmak üzere sadece $(x, y, 1)$ ve $(1, y, z)$ tipinden noktalar bulunmaktadır. Bu nedenle $x = x_1 + x_2\varepsilon$, $y = y_1 + y_2\varepsilon$ ve $z = z_2\varepsilon$ formundadır.

i) $(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = (x_1 + x_2\varepsilon)(m_1 + m_2\varepsilon) + k_1 + k_2\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = x_1m_1 + (x_1m_2 + x_2m_1)\varepsilon + k_1 + k_2\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = (x_1m_1 + k_1) + (x_1m_2 + x_2m_1 + k_2)\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow y_1 = x_1m_1 + k_1,\ \ y_2 = x_1m_2 + x_2m_1 + k_2$$

olur. Yani ;

$$(x_1 + x_2\varepsilon, (x_1m_1 + k_1) + (x_1m_2 + x_2m_1 + k_2)\varepsilon, 1) \in [m_1 + m_2\varepsilon, 1, k_1 + k_2\varepsilon]$$

sonucu bulunur.

ii) $(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = m_1 + m_2\varepsilon + (z_2\varepsilon)(k_1 + k_2\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = m_1 + m_2\varepsilon + (z_2k_1)\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow y_1 + y_2\varepsilon = m_1 + (m_2 + z_2k_1)\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow y_1 = m_1,\ \ y_2 = m_2 + z_2k_1$$

olur. Yani ;

$$(1, m_1 + (m_2 + z_2k_1)\varepsilon, z_2\varepsilon) \in [m_1 + m_2\varepsilon, 1, k_1 + k_2\varepsilon]$$

dur ve dolayısıyla

$$[m_1 + m_2\varepsilon, 1, k_1 + k_2\varepsilon]$$
$$= \{(x_1 + x_2\varepsilon, (x_1m_1 + k_1) + (x_1m_2 + x_2m_1 + k_2)\varepsilon, 1) : x_1, x_2 \in$$
$$\cup \{(1, m_1 + (m_2 + z_2k_1)\varepsilon, z_2\varepsilon) : z_2 \in Q\}$$

olduğu sonucu bulunur.

3.3.1.2. $[1,n,p]$ tipinden doğrular.

$n = n_2\varepsilon \in Q\varepsilon$, $p = p_1 + p_2\varepsilon \in Q(\varepsilon)$ olup bu tip doğrular üzerinde $x, y \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$ ve $w, z \in \mathbf{Q}\varepsilon$ olmak üzere sadece $(x, y, 1)$ ve $w, 1, z$ tipinden noktalar bulunmaktadır. Bu nedenle $x = x_1 + x_2\varepsilon$, $y = y_1 + y_2\varepsilon$ ve $w =$, $z = z_2\varepsilon$ formundadır.

i) $x, y, 1 \in$ $\Leftrightarrow = +$

$\Leftrightarrow + = + \quad + +$

$\Leftrightarrow + = \quad + +$

$\Leftrightarrow + = + \quad +$

$\Leftrightarrow = \quad x_2 = \quad +$

olur. Yani $p_1 +$ $+$ $+$ $\in$ $+$ $+$ dur.

ii) $w, 1, z \in$ $\Leftrightarrow = +$

$\Leftrightarrow = + \quad +$

$\Leftrightarrow = + \quad \Leftrightarrow = +$

$\Leftrightarrow = +$

olur. Yani $n_2 +$ $\in$ $+$ $+$ dur.

3.3.1.3. $q, n, 1$ Tipinden Doğrular

$q, n \in \mathbf{Q}\varepsilon$ olduğundan $q = \quad =$ olup bu tip doğrular üzerinde $y \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$ ve $w, z \in \mathbf{Q}\varepsilon$ olmak üzere sadece $1, y, z$ ve $w, 1, z$ tipinden noktalar bulunmaktadır. Bu nedenle $y = + \quad = \quad =$ formundadır.

i) $1, y, z \in \quad \Leftrightarrow \; = \; +$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_ + \; \_ + \_ \quad \_$$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_ + \; \_ \_$$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_ + \; \_ \_$$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_ + \; \_ \_$$

olur. Yani $1, y_1 + \_ \quad \_ + \; \_ \_ \quad \in \_ \quad \_$ dir.

ii) $w, 1, z \in \quad \Leftrightarrow \; = \quad +$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_ \quad \_ + \_$$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_$$

$$\Leftrightarrow \; \_ = \_$$

olur. Yani $w_2 \varepsilon \quad \_\varepsilon \in \_ \quad \_$ dir.□

3.3.2. PK$(Q(\varepsilon))$ da Noktalar:

PK$(Q(\varepsilon))$ nun noktalarından geçen doğrular için 3.3.1 de yapılan incelemenin benzeri tamamaen dual ifadeler kullanılarak yapılabilir.

3.3.3. PK$(Q(\varepsilon))$ da aynı komşulukta olma (komşudaşlık).

Bu kısımda **PK$(Q(\varepsilon))$** düzleminin noktaları ve doğruları için komşudaşlık şartları araştırılacaktır. Noktaların ve doğruların birbiriyle aynı komşulukta olması bileşen bileşene farkların idealde olması olarak tanımlandığından, sadece doğrular için inceleme yapmak yeterli olacaktır. Noktalar için inceleme doğrular için yapılan incelemede köşeli parantezlerin yuvarlak parantezlerle değiştirilmesi ile yapılır.

3.3.3.1. $[m, 1, k]$ tipinden doğruların komşudaşlığı.

$m,1,k$ ·/ ve $m,1,k$ ·/ olur. Çünkü, $n \in$ **Qε** olduğundan $1-\ \notin$ **Qε** dur. Bu nedenle $m,1,k$ tipinden doğrular sadece kendi tipinden doğrulara komşu olabilir. Bu durumda $m, k, u, v \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$ olup,

$$m,1,k \sim u,1,v \Leftrightarrow - \in \mathbf{Q\varepsilon} \wedge k- \in \mathbf{Q\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow + - + \in \mathbf{Q\varepsilon} \wedge$$

$$k_1 + - + \in \mathbf{Q\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow - + - \in \mathbf{Q\varepsilon} \wedge$$

$$k_1 - + - \in \mathbf{Q\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow - = \wedge k_1 - =$$

$$\Leftrightarrow = \wedge k_1 =$$

sonucu bulunur. O halde genel bir formül olarak

$$m_1 + \quad + \sim m_1 + ,1, +$$

olduğu elde edilir.

3.3.3.2. $[1,n,p]$ tipinden doğruların komşudaşlığı.

$[1,n,p]$ doğrusu için $n = n_2\varepsilon \in Q\varepsilon$ ve $p = p_1 + p_2\varepsilon \in Q(\varepsilon)$ olup, $[1,n,p] \nsim [m,1,k]$ ve $[1,n,p] \nsim [q,r,1]$ olur. Çünkü $q = q_2\varepsilon \in Q\varepsilon$ olduğundan $n-1, 1-q \notin Q\varepsilon$ dur. Bu nedenle $[1,n,p]$ tipinden doğrular sadece kendi tipinden doğrulara komşu olabilir . $[1,u,v]$ doğrusu için $u = u_2\varepsilon \in Q\varepsilon, v = v_1 + v_2\varepsilon$ olup,

$$[1,n,p] \sim [1,u,v] \Leftrightarrow n-u \in Q\varepsilon \wedge p-v \in Q\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (n_2-u_2)\varepsilon \in Q\varepsilon \wedge (p_1-v_1)+(p_2-v_2)\varepsilon \in Q\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow p_1 - v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow p_1 = v_1$$

sonucu bulunur. O halde genel bir formül olarak

$$[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon] \sim [1, u_2\varepsilon, p_1 + v_2\varepsilon]$$

olduğu elde edilir.

3.3.3.3. $[q,n,1]$ tipinden doğruların komşudaşlığı.

$[q,n,1]$ doğrusu için $q = q_2\varepsilon, n = n_2\varepsilon \in Q\varepsilon$ olup, $[q,n,1] \nsim [m,1,k]$ ve $[q,n,1] \nsim [1,r,p]$ dir. Çünkü $n-1, q-1 \notin Q\varepsilon$ dur. Bu nedenle $[q,n,1]$ tipinden doğrular sadece kendi tipinden doğrulara komşu olabilir . $[u,v,1]$ doğrusu için $u = u_2\varepsilon, v = v_2\varepsilon \in Q\varepsilon$ olup,

$$[q,n,1] \sim [u,v,1] \Leftrightarrow q-u \in Q\varepsilon \wedge n-v \in Q\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (q_2-u_2)\varepsilon \in Q\varepsilon \wedge (n_2-v_2)\varepsilon \in Q\varepsilon$$

Sonucunun daima geçerli olduğu aşikârdır. O halde her $u = u_2\varepsilon, v = v_2\varepsilon \in \mathbf{Q}\varepsilon$ için

$[q_2\varepsilon, n_2\varepsilon, 1] \sim [u_2\varepsilon, v_2\varepsilon, 1]$

olduğu sonucu elde edilir.

KAYNAKLAR

Baker, C.A., Lane, N.D., Lorimer, J.W., *A coordinatization on for Moufang-Klingenberg Planes,* Simon Stevin, 65, 3-22, 1991.

Çelik,B., *Non-assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Yapılar (Düzlemler)*, Doktora tezi, U.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 1995.

Kaya, R., *Projektif Geometri*, Eskişehir, Anadolu Üniv. Yay., No: 551.463, 1992.

Schafer, R.D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Acad. Pres. New York, 1966.

Stevenson, F.W., *Projective Planes*, San Francisco, W.H. Freeman Co. 416, 1972