DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ

Emre EROĞLU*
İbrahim GÜNEY**

Özet

Bu çalışmada, verilen bir kaynak tarafından oluşturulan elektromagnetik alan kuvveti mükemmel elektrik iletken yüzeye sahip bir dalga kılavuzunda zaman dönemi analitik bir metot olan Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (EAE) uygulanarak sunulmuştur.

TE dalga kılavuzu modunun tam kümesi *zaman döneminde* elde edilmiştir. Problem analitik olarak EAE çatısı altında çözülmüştür. Her alan iki etkenden oluşmaktadır. Biri Neumann sınır özdeğer probleminin uygun sınır koşulları altında çözülmesi ile elde edilen fonksiyon, diğeri zaman ve eksenel koordinat'a bağlı olan modal genliklerdir. Bu genlikler Klein-Gordon kısmi diferansiyel denklemi çözülerek elde edilmiştir. Analitik sonuçlar grafikler ile desteklenmiştir. Grafikler Bessel fonksiyonunun tamsayı ve yarı tamsayı durumları için gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elektromagnetik teori, Maxwell denklemleri, zaman-dönemi, evrim denklemleri, modal baz, modal genlik, Bessel fonksiyonu.

Abstract

In this study, the problem of electromagnetic field strength which are produced by a given source function which has arbitrary time dependency in a waveguide having perfect electric conductor surface is considered by an analytical time domain method called Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE).

A complete set of *TE* waveguide mode is obtained in *time domain*. The problem is solved within the analytical framework of the evolutionary approach

* *Matematikçi, İstanbul İl Milli Eğitim Müdürlüğü.*
** *Prof. Dr., İstanbul Aydın Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü.*

to electromagnetics. Every field component is product of two factors. One of them is a vector function of *transverse* waveguide coordinates. They are specified via solutions to Neumann boundary eigenvalue problem. Every element of the modal basis satisfies appropriate boundary conditions over the waveguide surface. The other factors, which are scalar functions, have physical sense of the modal amplitudes for the waveguide field components. They are obtained explicitly as the products of a simple algebraic factors, which specify the modal amplitudes depend on the waveguide axial coordinate and time. Analytical and Graphical results are presented for the cases when the orders of the Bessel fuctions are all possible integer and semi-integer numbers.

Key Words: Electromagnetic theory, Maxwell equations, time-domain, evolutionary equations, modal basis, modal amplitude, Bessel function.

GİRİŞ

Bu çalışmada tartışmalar Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım yöntemi ile yapılmıştır. EAE'nin temel prensibi Maxwell denklemlerindeki elektromagnetik alanların bulunmasında ∂_t zaman türevini koruyup sistemden alanları çekerek Klein-Gordon denkleminden genlikleri ve potansiyelleri de Helmholtz denkleminden elde edip çözüme ulaşmasıdır.

Elektomagnetik teorinin Maxwell denklemeleri üzerine kurulduğunun kabul edilmesinin ardından, problemlerin çoğu Fourier uzayında geliştirilmiştir. Elektromagnetik problemlerinin çözümlerinde Fourier dönüşümünün kullanılması zamanı bağımsız değişken olmaktan çıkarmış ve saptanan etkin frekans değerlerindeki alan ifadelerinin genlikleri ters Fourier dönüşümü ile zaman dönemine indirgenerek, elektromagnetik problemlerin zaman dönemi cevapları aranmıştır. [Erden, 2009]

Fakat; burada ele alınan EAE yöntemi, ∂_t zaman türevi korunarak ki Matematikçilerin Evrim Denklemleri olarak adlandırdığı zaman türevli diferansiyel denklemlerin bu sayede $t_0 = 0$ ve $t_1 = t$ aralığındaki tekamülünü hesaplayıp gözlemleyebilmek imkanı tanımıştır. Metodun farklılığı uygun başlangıç şartları altında, yine uygun sınır koşulları (nasıl bir kesit-alanda çalışılıyor ise buna bağlı sınır koşulları) uygulanarak hesaplanan elektromagnetik alanların zaman dönemindeki davranışlarının gözlemlenebilirliğidir. Klein-Gordon denkleminden elde edilen modal genlikler zamana (ve eksenel koordinat z'ye) bağlıdırlar. Denklemden elde edilen çözümler zaman-bağımlı olduğu gibi bu diferansiyel denklemin α 'nın $(0,\infty)$ aralığındaki değerleri için bir seri çözümü oluştururlar.

Bu fikir 1980'lerde O. A. Tretyakov tarafından ortaya atılmış ve Rus bilimsel dergilerinde yayınlanmıştır [Tretyakov, 1986], [Tretyakov, 1989]. Yöntemin İngilizce versiyonu ise ilk olarak 90'lı yıllarda yayınlanmıştır [Tretyakov, 1993], [Tretyakov, 1994]. EAE yönteminin değişik uygulamaları hakkında yakın zamanlardaki yayınlar fikir verecektir [Aksoy and Tretyakov, 2002], [Aksoy and Tretyakov, 2003], [Aksoy and Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005].

EAE yöntemi iki ana fikre dayanmaktadır. Yayınlar kronolojik incelendiğinde elektromagnetik problemlerin zaman döneminde çalışılması fikrinin öncüleri 1940'larda ve 1950'lerde görülmektedir. J. C. Slater [Slater, 1946], G. V. Kisun'ko [Kisun'ko, 1949], K. Kurokawa [Kurokawa, 1958] ve R. Miller [Miller, 1961] alanları özmodların serileri şeklinde sunmaya çalışan ilk kişilerdir. Elektromagnetik alanda daha sonra yayımlanan J. Van Bladel'in eseri bu fikri detaylı bir şekilde içerir [Van Bladel, 1985]. Bu fikir, alanların kompleks genlikleri için ileri sürülmüş ve şimdiye dek uygulanmaya devam edilmiştir. Zaman dönemindeki Maxwell denklemlerine Fourier dönüşümü uygulanarak; ∂_t, $i\omega$ ile değiştirilmiş ve genel durumda lineer olmayan bünye denklemleri lineer hale getirilmiştir [Erden, 2009]. Dolayısıyla, sadece bir yol kalmıştır: Elektromagnetik problemi frekans döneminde lineerleştirmek. Ancak, lineer elektromagnetik problemlerde bile Fourier dönüşümü göründüğü kadar kolay değildir [Erden, 2009]. Bu konuda karşılaşılan problemlere ilişkin derinlemesine bir inceleme P. Hillion'un makalesinde mevcuttur [Hillion, 1993].

ZAMAN DÖNEMİ MODLARI PROBLEMİ

Dalga kılavuzları boyunca sinyal transferinin analizi iki ana kısımdan oluşur. İlki, zaman-dönemi dalga kılavuzu modlarının *modal bazda* sunumudur. İkincisi ise, Klein-Gordon dalga denkleminin çözülmesidir. Klein-Gordon denkleminin çözümü bize sinyal transferini sağlayan zaman-bağımlı modal genlikleri gösterir. Klein-Gordon denkleminin çözümü nedensellik (causality) prensibine bağlı kalınarak bulunur. Bu çözümler seri halinde evrimsel olarak ifade edilir.

Boş (hollow) bir dalga kılavuzundaki sinyallerin yayılması ve iletilmesi problemi analitik bir zaman-dönemi metodu olarak düşünülür. Dalga kılavuzu geometrik olarak homojen, Oz ekseni boyunca regüler ve onun kesit-alanı yeteri kadar düzgün yüzeyli kapalı tekli-bağlantılıdır. Bu yüzeyin mümkün olan hiçbir açısı π dereceyi aşmamaktadır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektik iletkendir. Tam *TE* dalga kılavuzları modu direk olarak zaman-döneminde elde edilmiştir. Her bir modal alan enlemsel (transverse) ve eksenel (longitudinal) kısımlarının vektör uzantılarının toplamı olarak alınmıştır. Her bir uzantı iki etkenden oluşur. Biri dalga kılavuzunun bir elemanı ve enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının vektör fonksiyonu olan *modal baz*, diğeri t zamanı ve eksenel koordinat z nin skalar bir fonksiyonu olan bir modal genlik. Modal bazların bütün elemanları skalar potansiyel yardımıyla belirlenir. Bunlar uygun bir yol ile normalize edilmiş Laplacian için Neumann sınır-değer probleminin özçözümleridir. Modal bazın her bir elemanı dalga kılavuzu yüzeyinde uygun sınır koşulları sağlar. Modal genlikler evrimsel kısmi diferansiyel denklemler sisteminin zamana (ve eksenel koordinat z'ye) bağlı çözümleridir.

3-bileşenli pozisyon vektörü $\mathbf{R}$ ve ∇-operatörü, dalga kılavuzu kesit-alanın S yüzeyi ve **z**-ekseni,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{z}z, \qquad \nabla = \nabla_\perp + \mathbf{z}\partial_z \tag{1}$$

olarak alınacaktır. Burada z, Oz ekseni boyunca yönelmiş birim vektör, $\mathbf{r}$ S kesit alanlı dalga kılavuzundaki 2-bileşenli pozisyon vektörü ve $\nabla_\perp$, ∇'nin enlemsel kısmıdır. Diferansiyel operatörü $\nabla_\perp$ sadece enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarında $(\mathbf{r})$ çalışır. 3-bileşenli elektromanyetik alan kuvvet vektörleri $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ her biri aşağıdaki gibi iki-bileşenli ve bir-bileşenli vektörlerin toplamı olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{R},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},z,t) + \mathbf{z}E_z(\mathbf{r},z,t) \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{R},t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r},z,t) + \mathbf{z}H_z(\mathbf{r},z,t) \end{aligned} \tag{2}$$

sunulmuştur.

Sınır koşulları,

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})_{|L} = 0, \quad (\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})_{|L} = 0, \quad (\mathbf{z}\cdot\mathbf{E})_{|L} = 0 \tag{3}$$

dır. Burada **n** normal birim vektor, **l** teğet birim vektor ve **z** eksenel koordinattır. Bu çalışmada sadece *TE* zaman-dönemi modu tartısılmıştır.

TE Zaman-Dönemi Modu

TE zaman-dönemi modları için Neumann problemini çözerek başlanmalıdır.

$$\left(\nabla_{\perp}^{2}+\upsilon_{m}^{2}\right)\psi_{m}(\mathbf{r})=0$$

$$\partial_{n}\psi_{m}(\mathbf{r})_{|L}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\upsilon_{m}^{2}}{S}\int_{S}\left|\psi_{m}(\mathbf{r})\right|^{2}ds=1$$

burada $\partial_n = \mathbf{n}\cdot\nabla_{\perp}$, L konturu üzerinde normal türev, $\upsilon_m^2 > 0$, $m = 1,2,....$ özdeğerler, m indisi reel eksende artan bir sıra ile sıralanan numerik değerler, $\psi_m(\mathbf{r})$ lerde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir.

Örnek1:

Tipik $0 \le x \le a$ ve $0 \le y \le b$ ile sınırları belirlenen dikdörtgen şeklinde bir dalga kılavuzu olan L konturunu düşünelim. A_m^h normalizasyon sabiti olmak üzere $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyelini $\Psi_m(\mathbf{r}) = A_m^h\psi_m(\mathbf{r})$ olarak alalım. $\psi_m(\mathbf{r}) = \cos(p\pi x/a)\cos(\pi q y/b)$ dir. p ve q parametreleri $p,q = 0,1,2,..,p+q \neq 0$ şartını sağlayan tamsayılardır. (4) problemini çözerek

$$\upsilon_m^2 = \pi^2\left(p^2/a^2 + q^2/b^2\right) \equiv \upsilon_{p,q}^2$$

$$A_m^h = \sqrt{\left(2-\delta_{p,0}\right)\left(2-\delta_{q,0}\right)}/\upsilon_{p,q} \equiv A_{p,q}^h \qquad (5)$$

elde edilir. Burada $\delta_{p,0}$ ve $\delta_{q,0}$ Kronecker deltasıdır. υ_m^2 özdeğerlerini reel eksen üzerinde konumlayan indis m indisidir: i.e., $m \to (p,q)$. $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli zaman-dönemi *TE* modlarının tanımının bir parçasıdır.

$$\mathbf{E}_{zm}^h = 0$$

$$\upsilon_m^{-1}\mathbf{E}_m^h = \langle -\partial_{(\upsilon_m ct)} h_m(z,t) \rangle \left[\sqrt[-2]{\varepsilon_0} \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z} \right]$$

$$\upsilon_m^{-1}\mathbf{H}_m^h = \langle \partial_{(\upsilon_m z)} h_m(z,t) \rangle \left[\sqrt[-2]{\mu_0} \nabla_\perp \psi_m(\mathbf{r}) \right] \tag{6}$$

$$\upsilon_m^{-1}\mathbf{H}_{zm}^h = \langle h_m(z,t) \rangle \left[\upsilon_m \sqrt[-2]{\mu_0} \psi_m(\mathbf{r}) \right]$$

burada $\partial_{(\upsilon_m ct)} = \dfrac{1}{c\upsilon_m}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{(\upsilon_m z)} = \dfrac{1}{\upsilon_m}\dfrac{\partial}{\partial t}$ ve $c = \sqrt[-2]{\varepsilon_0 \mu_0}$ boşlukta ışık hızıdır.

Modal alan çiftleri dalga kılavuzu kesit-alanında $[*]$ köşeli parantez ile gösterilir. Buradaki potansiyellerin hepsi Laplacian'dan elde edilirler. $\langle * \rangle$ kırık parantez ile ifade edilen faktörler uygun modal alan uzantılarının modal genlikleri fiziksel manasına sahiptir. Hepsi Klein-Gordon denkleminden elde edilen bir $h_m(z,t)$ potansiyeli tarafından belirlenir.

$$\left(\partial_{\upsilon_m ct}^2 - \partial_{\upsilon_m z}^2 + 1 \right) h_m(z,t) = 0 \tag{7}$$

(4) problemi bir sıfır aşikar çözümüne daha sahiptir. Bu çözüm $\upsilon_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelir ve harmonik $\Psi_0(\mathbf{r})$ fonksiyonu için $\nabla_\perp^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = 0$, $\partial_n \Psi_0(\mathbf{r})|_L = 0$ problemini üretir. $\mathbf{r} \in L + S$ ve c_1 bir sabit olmak üzere harmonik fonksiyonlar maksimum-minimum teoreminden $\Psi_0(\mathbf{r}) = c_1$ elde edilir. $\Psi_0(\mathbf{r})$ potansiyeli bir *TE* modu daha üretir.

$$\mathbf{E}_0^h(\mathbf{r},z,t) = 0, \qquad \mathbf{H}_0^h(\mathbf{r},z,t) = \mathbf{z}c_1 \tag{8}$$

burada $\mathbf{H}_0^h$ alanının modal genliği de bir sabittir.

Weyl Teoremi *TE* zaman-dönemi modunun L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [Weyl, 1940].

Uyarı 1:

Her bir ayrı sabit değerli m indisi için, (6) zaman-dönemi modu sınır koşullarını sağlar

Uyarı 2:

(6) denklemi her zaman-dönemi $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ modal alanı ∂_t zaman türevini koruyan Maxwell denklemler sisteminin belirli bir çözümüdür:

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}_m \quad \text{ve} \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_m \tag{9}$$

∂_t zaman türevini koruyan Maxwell denklemlerinin bir çözümü olarak zaman-dönemi modal alanları özel rölativite teorisine uygun olarak hesaplanmalıdır.

Klein-Gordon Denklemi İçin Başlangıç Koşulları

Klein-Gordon denklemi herhangi diğer *ikinci dereceden* kısmi diferansiyel denklemler (PDE) gibi "başlangıç koşulları" *çifti* ile desteklenmelidir. Fiziksel olarak, bunlar uygun bir sinyal kaynağının eksitasyonunda rol oynar. Bu kaynağın *t=0* anından önce uyarılmadığı (hareketsiz olduğu) fakat *t=0* anında eksitasyona başladığı farz edilsin. Eğer böyleyse, başlangıç koşulu

$$f(\xi,\tau)\big|_{\xi=0} = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \ için \\ 0, & \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \ için \end{cases}$$

$$\partial_\tau f(\xi,\tau)\big|_{\xi=0} = \begin{cases} \breve{\varphi}(\tau), & \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \ için \\ 0, & \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \ için \end{cases} \tag{10}$$

olarak yazılmalıdır. $\varphi(\tau)$, $\breve{\varphi}(\tau)$ verilmelidir ve $\xi = 0 \Rightarrow z = 0$ olmalıdır. Son gerçekte *TE* zaman-dönemi moduda bu çatılarda uniformdur. "Boyutsuz" zaman τ ve eksenel koordinat ξ'yı

$$\tau = \upsilon_m ct \;\; ve \;\; \xi = \upsilon_m z \qquad (11)$$

seçelim. O zaman (7) ve (12) ikisi de aynı denklemdir.

$$\left(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 + 1\right) f(\xi, \tau) = 0 \qquad (12)$$

burada, $\tau = \upsilon_m ct$, $\xi = \upsilon_m z$ olmak şartıyla $f(\xi,\tau)$, $h_m(\xi,\tau)$ yerindedir.

MODAL GENLİK PROBLEMİ

Klein-Gordon denklemi, *grup teorinin* iskelet çatısındaki *Poincare grubu* altında çalışıldığında kendi özelliklerini korur. W. Jr. Willer Klein-Gordon denklemini bu yönüyle çalışmış ve bu denklemin çözümünde "*simetrinin yörüngeleri*" denen *onbir* (11) birbiri ile dik (ortogonal) fonksiyon oluşturmuştur. Çalışmaların sonuçları zaman- döneminde elektromagnetik alan teorisinin gelişmesinde geniş uygulama alanı bulmuştur. Aşağıda bu konuda bir örnek bulabilirsiniz.

(12) Klein-Gordon denkleminin $f(\xi,\tau)$ çözümünün modal genlikler için potansiyel belirlediği hatırlansın. Düşünülsün ki *henüz bilinmeyen* "yeni" (u,v) değişkenleri ile verilen bir fonksiyon $f[u(\xi,\tau), v(\xi,\tau)]$ ve (u,v) iki kere diferansiyellenebilen "eski" (ξ,τ) değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $f[u(\xi,\tau), v(\xi,\tau)]$ fonksiyonunun (12) denkleminin çözümü olarak yerine konması basit manipülasyonlardan sonra denklemi yeni haliyle verir.

f fonksiyonunu aşağıdaki gibi değişkenlerine ayrılsın

$$f \equiv f(\xi,\tau) = f[u(\xi,\tau), v(\xi,\tau)] \equiv f(u,v) = U(u)V(v) \qquad (13)$$

(12) denklemini (u,v) cinsinden yeniden şekillendirilirse,

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right]\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right]\frac{\partial f}{\partial v}+2\left[\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+f=0 \tag{14}$$

yeni denklemi elde edilir. Burada f fonksiyonu (u,v) bağımsız değişkenlerine bağlı bir kaynak fonksiyonudur. Bir sonraki hedefimiz (14) denkleminden eski (ξ,τ) bağımsız değişkenlerinin elimine edilmesidir. u ve v ye uygulanan ∂_τ ve ∂_ξ kısmi türevleri yardımıyla burada verilmiştir. Bundan dolayı, bu hedef u ve v nin (ξ,τ) değişkenlerinin fonksiyonu olarak belirlenebilmesi ile gerçekleştirilebilir. $u(\xi,\tau)$ ve $v(\xi,\tau)$ fonksiyon çiftlerinin elde edilebilmesi basit bir durumdur.

MODAL GENLİKLERİN BESSEL FONKSİYONU YARDIMI İLE ÇÖZÜLMESİ

Miller'in listesinden $2)$ durumuna (case2) detaylı bir göz atalım.

$$\tau = u\cosh v, \quad \xi = u\sinh v, \quad 0\le u\le\infty, \quad -\infty\le v\le\infty \tag{15}$$

olarak alınsın. Önce $u(\xi,\tau)$ ve $v(\xi,\tau)$ değişkenlerine geçiş yapılmalıdır. Bundan dolayı,

$$\tau^2 = u^2\cosh^2 v \qquad \text{ve} \qquad \xi^2 = u^2\sinh^2 v,$$
$$\tau^2-\xi^2 = u^2\underbrace{\left(\cosh^2 v-\sinh^2 v\right)}_{1} = u^2$$

ve böylece,

$$u^2=\tau^2-\xi^2 \Rightarrow u=\sqrt{\tau^2-\xi^2}, \; 0\le u<\infty. \tag{16}$$

elde edilir. Buna ilaveten

$$\frac{\xi}{\tau}=\frac{u\sinh v}{u\cosh v}=\tanh v, \qquad \text{yani,} \qquad \operatorname{arctan}h\frac{\xi}{\tau}=v, \quad -\infty<v<\infty \tag{17}$$

yazılabilir. Ve bu denklemde

$$v=\operatorname{arctan}h\frac{\xi}{\tau}\equiv\frac{1}{2}\ln\frac{\tau+\xi}{\tau-\xi} \tag{18}$$

şeklinde daha kullanışlı hale getirilebilir.

Sadeleştirmelerin ardından

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+1-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)f(u,v)=0 \tag{19}$$

kısmi diferansiyel denklemi (PDE) elde edilir. Bernoulli'nin çarpım metodu u ve v değişkenlerine uygulanarak

$$f\equiv f(\xi,\tau)=f[u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)]\equiv f(u,v)=U(u)V(v)$$

yazılır. Bu son değişkenlerine ayrılmış çarpımın (19) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+1-\frac{1}{u^2}\underbrace{\frac{V''(v)}{V(v)}}_{\alpha^2}\right)U(u)=0 \tag{20}$$

kısmi diferansiyeli denklemi elde edilir. Yani,

$$\begin{gathered} U''_\alpha(u)+\frac{1}{u}U'_\alpha(u)+\left(1-\frac{\alpha^2}{u^2}\right)U_\alpha(u)=0 \\ V''_\alpha(v)-\alpha^2V_\alpha(v)=0 \end{gathered} \tag{21}$$

(21) *adi* diferansiyel denklem çiftine varılır. Burada α değişkenlerine ayrılma metodunun bir sabitidir. (21) denkleminin $U(u)$ fonksiyonuna ait *adi* diferansiyel denklem kısmındaki Bessel diferansiyel denkleminden *Bessel fonksiyonu,* $V(v)$ fonksiyonuna ait olan kısmından ise bir *üstel fonksiyon* elde edilir. Her iki denklem de iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$V(v)$ fonksiyonu α keyfi sabit bir parametre olmak üzere $V''(v)=\alpha^2 V(v)$ yazılarak

$$V(v)=a_\alpha e^{\alpha v}+b_\alpha e^{-\alpha v}$$

yazılabilir. Burada $a_\alpha, b_\alpha \in \Re$ olmak üzere keyfi reel parametrelerdir. Fakat aşağıda f fonksiyonu oluşturulacağı için bu keyfi parametreler şimdilik ihmal edilecektir. Yani,

$$V(v)=e^{\pm\alpha v} \tag{22}$$

olarak ifade edilebilir.

Ardından, $U(u)$ fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemini verir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+1-\frac{\alpha^2}{u^2}\right)U(u)=0. \tag{23}$$

Bu denklem lineer bağımsız iki çözüme sahiptir,

$$U(u)=A_\alpha J_\alpha(u)+B_\alpha Y_\alpha(u) \tag{24}$$

burada A_α ve B_α keyfi sabitlerdir. Denklemde, J ve Y Bessel fonksiyonları olmak üzere, $Y(x)$ orijin etrafında ıraksak olduğundan $U(u)$ çözümü A_α keyfi sabit olmak üzere

$$U(u)=A_\alpha J_\alpha(u) \tag{25}$$

dir. Şimdi bu *üstel* fonksiyon ve *Bessel* fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilen f fonksiyonu yazılsın.

$$f \equiv f(\xi,\tau)=f[u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)]\equiv f(u,v)=U(u)V(v)$$

idi. Buradan,

Bunların kombinasyonu (ξ,τ) bağımsız değişkenleri cinsinden fiziksel olarak dikkate değer:

$$f_\alpha(\xi,\tau)=\left[C_\alpha\left(\frac{\tau-\xi}{\tau+\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\left(\sqrt{\tau^2-\xi^2}\right)+D_\alpha\left(\frac{\tau+\xi}{\tau-\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\left(\sqrt{\tau^2-\xi^2}\right)\right] \tag{26}$$

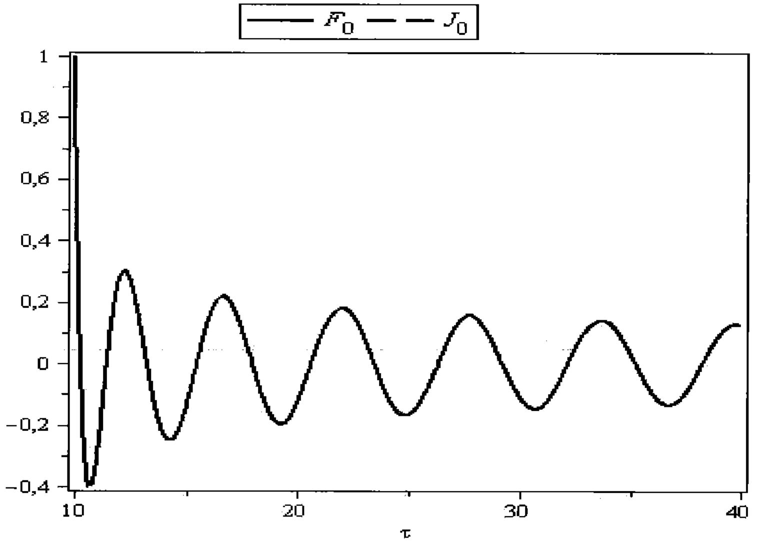
çözümü elde edilir. Çözümün $\xi = 0$ 'a göre simetrik olduğunu görmek kolaydır. Bu noktadan sonra artık $\xi \geq 0$ uzayının mümkün olduğu ve keyfi sabit (constant)'in ihmal edildiği, α keyfi sabit bir parametre olmak üzere,

$$f_\alpha(\xi,\tau) = \left(\frac{\tau-\xi}{\tau+\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(\sqrt{\tau^2-\xi^2}\right) \tag{27}$$

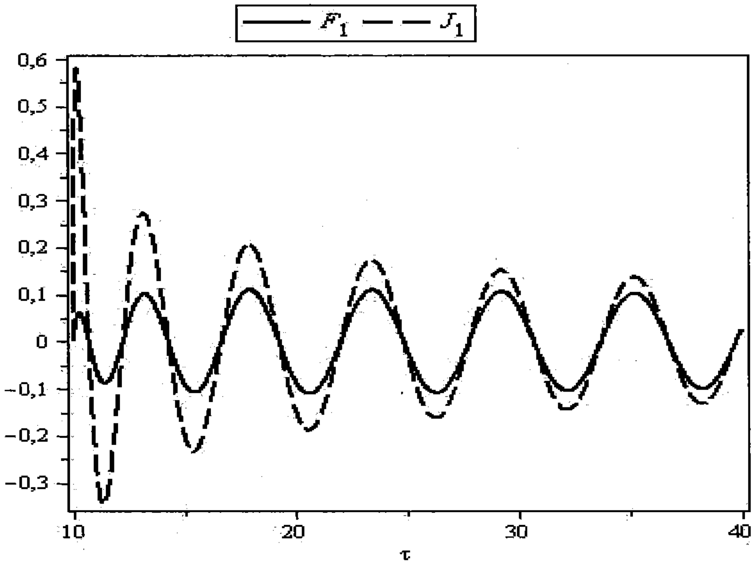
denklemi elde edilmiş olur.

GRAFİKLER

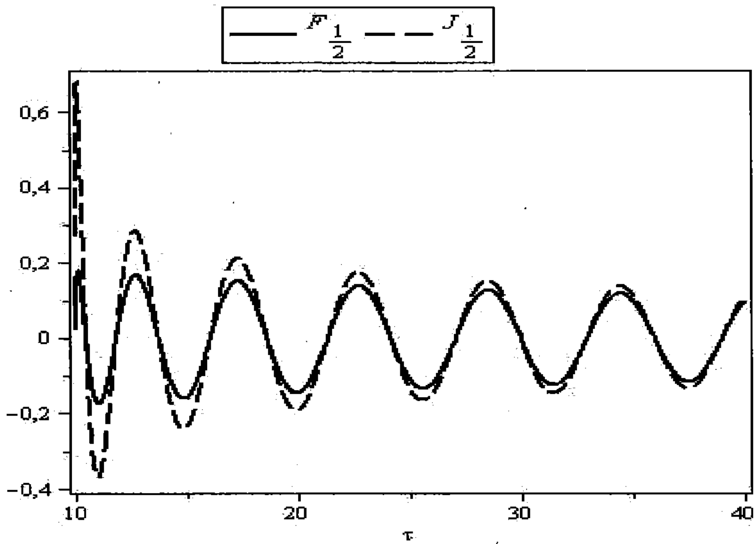
Aşağıdaki grafiklerde ξ sabit tutularak $f_\alpha(\xi,\tau)$ kaynak fonksiyonu ve $J_\alpha\left(\sqrt{\tau^2-\xi^2}\right)$ Bessel fonksiyonunun zamanla değişimi gösterilmiştir.



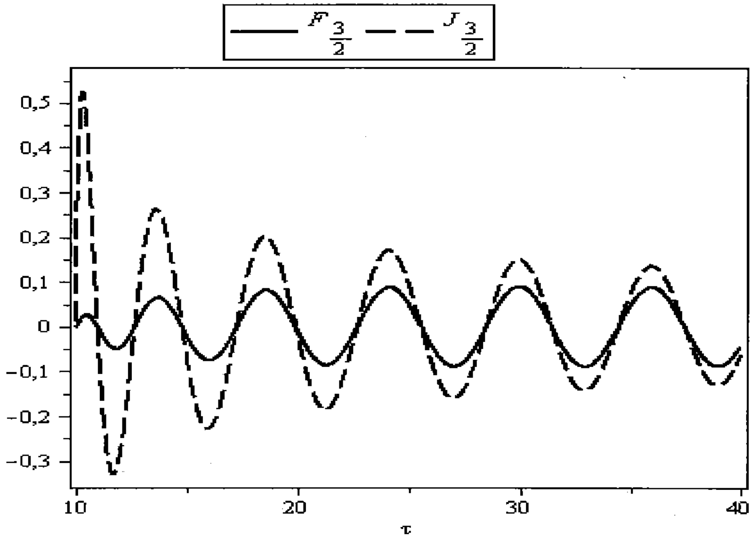
$\alpha = 0$, eksenel koordinat ξ sabit, τ boyutsuz zaman



$\alpha = 1$, eksenel koordinat ξ sabit, τ boyutsuz zaman



$\alpha = 1/2$, eksenel koordinat ξ sabit, τ boyutsuz zaman



$\alpha = 3/2$, eksenel koordinat ξ sabit, τ boyutsuz zaman

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Maxwell denklemlerinde ∂_t zaman türevi korunduğunda sinyalin nasıl evrildiği gözlemlenebilir. Her alan zamanın değişen değerleri için farklılıklar gösterir.

Maxwell denklemlerinden çekilen operatörler kendine-eş (self-adjoint) operatörlerdir. Bundan dolayı özdeğerler reel değerlidir.

TE modu sonuçları nedensellik prensibini sağlar.

Miller'in listesinin dışında da hesaplanacak alanlar için birbirine ortogonal olamayan sistemlerlede çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Aksoy S., Tretyakov O. A., "*Study of a Time Variant Cavity System*", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol: 16, no: 11, pp:1535-1553, 2002.

Aksoy S., Tretyakov O. A., "*Evolution Equations for Analytical Study Digital Signals in Waveguides*", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol: 17, no: 12, pp:1665-1682, 2003.

Aksoy S., Tretyakov O. A.,"*The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal*", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 52, no. 1 , pp. 263-270, Jan. 2004.

Erden F., "*Kavitelerde Zorlanmış Salınımların Zaman Dönemi Analizlerinin İncelenmesi*", Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Doktora Tezi, 2009.

Bladel J. V., "*Electromagnetic Fields*", Hemisphere, Washington, 1964.

Hillion P., "*Some comments on electromagnetic signals*", in ed. by A.Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.

Kisun'ko G.V., "*Electrodynamics of Hollow Systems*", VKAS Press, Leningrad, 1949 (in Russian).

Kurokawa K., "*The Expansion of Electromagnetic Fields in Cavities*", IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol:6, pp:178-187, 1958.

Miller R., "*Theory of cavity resonators*", in Electromagnetic waveguides and cavities, G. Goubau (Ed.), ch. 2., Pergamon Press, London, 1961.

Slater J. C., "*Microwave Electronics*", Review of Modern Physics, vol.18, No. 4, pp: 441-452, 1946.

Tretyakov O. A. "*Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory*", Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O. A., Science House Company, Tokyo, Japan, 1993.

Tretyakov O. A., "*Evolutionary equations for the theory of waveguides*", Proc. IEEE AP-S Int. Symp. Dig., 2465–2471, Seattle, WA, Jun. 1994.

Tretyakov O. A., Erden F., "*Separation of the Instantaneous and Dynamic Polarizations in Studies of Dispersive Dielectrics*", The Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW'07), 25-30 June 2007, Kharkov, Ukraine, vol: 1, pp: 42-48.

Weyl H., "*The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory*", Duke Math. Journal, vol:7, pp:411-44, 1940.