KİRİŞLER METRİĞİ

Ali DÖNMEZ[1]

Özet

Bu çalışmada, düzlemdeki x ve y noktaları için

$$d(x,y) = \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+x\overline{x}}\,\sqrt{1+y\overline{y}}}$$

ve

$$d(x,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+x\overline{x}}}$$

fonksiyonlarının birer metrik oldukları gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler: *Metrik, konform*

[1]Aydın Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

1.GİRİŞ

X, boş olmayan herhangi bir küme olsun. Eğer

i. Tüm $x, y \in X$ öğeleri için $d(x, y) \geq 0$,

ii. Tüm $x, y \in X$ öğeleri için $d(x, y) = d(y, x)$ olan simetri koşulu

iii. $d(x, y) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $x = y$ olması ve

iv. Tüm $x, y, z \in X$ öğeleri için

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

olan üçgen eşitsizliklerini gerçekleyen $X \times X$ kümesinden gerçel sayılar kümesine olan d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metriktir denir. Bunu kısaca (X, d) ikilisi biçiminde gösteririz. Dikkat edilirse, d metriği bir kümenin herhangi iki öğesinin arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Bu arada, iki eğri arasındaki açının yönünü ve büyüklüğünü koruyan dönüşüme de konform denir.

Kirişler metriğinin bir metrik oluşturduğunu göstermek o kadar kolay değildir. İlk üç koşulun sağlandığını mutlak değer özelliğinden kolayca söyleyebiliriz. Fakat, üçgen eşitsizliğini göstermek o kadar kolay değildir. Bunun için bir dizi özelliği göstermemiz gerekiyor.

2.TEOREMLER

Birim Riemann küresinin merkezinden ekvator düzlemini geçiriniz. Bu düzlemdeki bir nokta $M(x,y)$ olsun. Bu M noktası ile P ile gösterilen güney kutbunu birleştiren doğru parçası küreyi $M'(a,b,c)$ noktasında kessin. Kürenin güney kutbu $P(0,0,-1)$ olsun. Buna göre,

i. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{1+c},\ x=\dfrac{a}{1+c},\ y=\dfrac{b}{1+c}\ \ ve\ \ z=\dfrac{a}{1+c}+i\dfrac{b}{1+c}$
olduklarını gösteriniz.

ii. $a=\dfrac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}},\ b=\dfrac{1}{i}\dfrac{z-\overline{z}}{1+z\overline{z}}\ \ ve\ \ c=\dfrac{1-z\overline{z}}{1+z\overline{z}}$
sonuçlarını çıkarınız.

iii. Küre üzerindeki M' noktasından geçen iki eğri arasındaki açı, bu eğrilerin düzlem üzerinde iz düşümü olan M noktasındaki açı ile aynıdır. Yani, izdüşüm konformdur.

iv. Düzlem üzerindeki doğru veya çemberin, küre üzerindeki izdüşümünün bir çember olacağını gösteriniz.

v. Küre üzerindeki iki nokta arasındaki kiriş uzunluğu, düzlemdeki $z=x$ ve $z=y$ terimleri cinsinden

$$d(x,y)=\frac{2|x-y|}{\sqrt{1+x\overline{x}}\sqrt{1+y\overline{y}}}$$

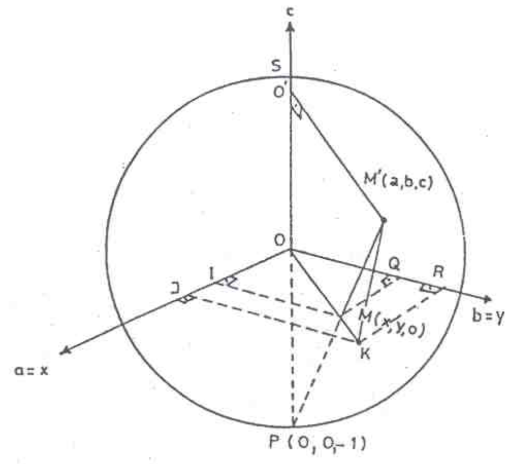
olacağını gösteriniz. Ayrıca,

$$d(x,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+x\overline{x}}}$$

sonucunu bulunuz. $d(x,y)$ ifadesi bir metrik midir?

3.İSPATLAR

i. $OK = O'M'$, $OI = x$, $OJ = a$, $O'P = 1 + c$, $OQ = y$ ve $OR = b$ olduklarını, aşağıdaki şekilden görebiliriz. M ve M' noktalarının koordinatları arasındaki bağlılık bulunacaktır. Benzer üçgenlerden,



$$\frac{x}{a} = \frac{OM}{OK} = \frac{y}{b}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{OM}{OK} = \frac{OM}{O'M'} = \frac{PO}{PO'} = \frac{1}{1+c}$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{1+c} = \frac{y}{b}, \quad x = \frac{a}{1+c}, \quad y = \frac{b}{1+c} \text{ ve } z = \frac{a+ib}{1+c}$$

olarak bulunur.

ii. Bir kere, merkezcil birim kürenin denklemi, $a^2+b^2+c^2=1$ şeklindedir. $z=\dfrac{a+ib}{1+c}$ olduğundan, $\overline{z}=\dfrac{a-ib}{1+c}$ olur. Buradan $(1+c)(z+\overline{z})=2a$ ve $(1+c)(z-\overline{z})=2ib$ yazılır. Öte yandan,

$$1+z\overline{z}=1+\frac{a^2+b^2}{(1+c)^2}=1+\frac{1-c^2}{(1+c)^2}=1+\frac{1-c}{1+c}=\frac{2}{1+c}$$

yazılır. Böylece,

$$c=\frac{1-z\overline{z}}{1+z\overline{z}}=\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2},\ a=\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}=\frac{2x}{1+|z|^2}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ b=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

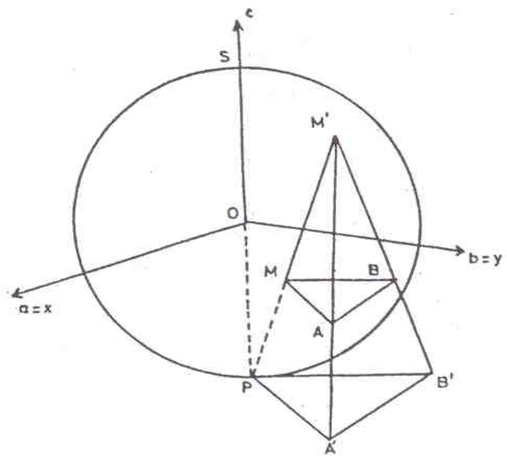
olarak bulunur.

iii. M' noktasında kesişen iki eğriye bu noktada çizilen teğetler, sırasıyla, ekvator düzlemini ve P noktasında küreye teğet olan düzlemi A, B ve A', B' noktalarında kessin. A' ve B' noktalarından küreye $A'P, A'M', B'P$ ve $B'M'$ teğetleri çizilmiş olduğundan, $A'P=A'M'$ ve $B'P=B'M'$ olur. $A'B'$ kenarı, $M'A'B'$ ve $PA'B'$ üçgenlerinde ortaktır. Öyleyse, $M'A'B'$ üçgeni ile $PA'B'$ üçgeni K.K.K. bağlılığına göre eşittir. Buradan, $A'M'B'$ açısı= AMB açısı olur. Bu da, küre üzerindeki bir M' noktasında kesişen iki eğri arasındaki açının, ekvator düzlemine olan izdüşüm açısı ile aynı olduğunu gösterir. Yani, teğetler arasındaki açının büyüklüğü ve yönü korunduğundan, izdüşüm konformdur.

iv. Ekvator düzlemindeki bir d doğrusu ile S kutbundan geçen düzlemin küre ile olan arakesiti, bir çemberdir. Yine, ekvator düzlemindeki bir çemberle S kutbunun belirlediği koninin küre ile olan kesişimi bir çemberdir. Fakat, bu açıklamalar oldukça geometrik görünümlüdür. Matematiksel ispatı düşünülmelidir. Bunun için,

$$M'(a,b,c),\ M\left(\frac{a}{1+c},\frac{b}{1+c},0\right)\ ve\ P(0,0,-1)$$

oldukları düşünülürse,



$$PM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(1+c)^2}+1} = \sqrt{\frac{2}{1+c}}$$

ve

$$PM' = \sqrt{a^2+b^2+(1+c)^2} = \sqrt{2(1+c)}$$

yazılır. Buradan, $PM.PM' = 2$ bulunur. Ekvator düzleminde, $x^2+y^2=r^2$ çemberi göz önüne alınırsa, $x = a/(1+c)$ ve $y = b/(1+c)$ değerleri, $x^2+y^2=r^2$ denkleminde kulanı-lırsa,

$$\frac{a^2+b^2}{(1+c)^2} = r^2 \; veya \; a^2+b^2-r^2-2r^2c-r^2c^2=0$$

olur. Buradan, $c=-1$ ve $c=(1-r^2)/(1+r^2)$ bulunur. $a^2+b^2+c^2=1$ küresi ile $c=-1$ düzleminin ortak çözümünden, $a^2+b^2=0$ olan P noktası bulunur. $c=(1-r^2)/(1+r^2)$ ile kürenin ortak çözümünden,

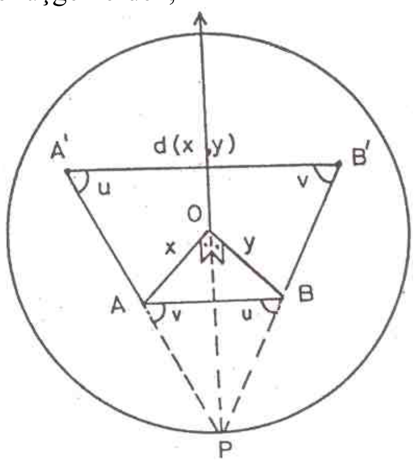
$$a^2+b^2 = 1-\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2 = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}$$

bulunur. İzdüşüm konform ve 1-1 olduğundan, düzlem üzerindeki doğru veya çemberlerin, küre üzerine olan dönüşümünün çember olacağını hemen söyleyebiliriz.

v. Ekvator düzlemindeki A ve B noktalarına karşılık, küre üzerinde, sırasıyla, A' ve B' noktalarını karşılık getirelim. $A'B'$ kirişinin uzunluğunu, $d(A',B')$ işareti ile gösterelim. (iv) kısmında olduğu gibi, $PA.PA' = 2 = PB.PB'$ olduğundan, $PA/PB' = PB/PA'$ yazılır. Yani, PAB ve $PA'B'$ üçgenleri benzerdir. Pisagor Teoremine göre,

$$PA = \sqrt{1+|x|^2} \ ve\ PB = \sqrt{1+|y|^2}$$

şeklindedir. Benzer üçgenlerden,



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PB} = \frac{PA.PA'}{PA.PB} = \frac{2}{PA.PB}$$

yazılır. Buradan,

$$d(x,y) = A'B' = \frac{2AB}{PA.PB} = \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$$

bulunur. Özel olarak,

$$\lim_{y\to\infty}\frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{2y|x/y-1|}{y\sqrt{1/|y|^2+1}\sqrt{1+|x|^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

yazılır.
Kiriş uzunluğu $d(x,y)=d(y,x), d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ve $d(x,y)\le d(x,t)+d(t,y)$ koşullarını sağladığından, $d(x,y)$ gösterimi bir metrik oluşturur.

4.KAYNAKLAR

Hile, E., (1959, 1962). *Analytic Function Theory*, Ginn and Co., Boston.

Nehari, Z., (1952). *Conformal Mapping*, McGraw-Hill Book Co., New York.

Marsden, J. E., (1975). *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Co., San Francisco.

Miller, K. S., (1960). *Advanced Complex Calculus*, Harper and Row, New York.