İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 16, 2023, 1, 26-38

Geliş/Received:07.06.2023, Kabul/Accepted: 22.06.2023

Araştırma Makalesi / Research Article

Dabrowska tahmin yöntemiyle çoklu hayat ürünlerinin fiyatlandırılması

Tuğba Aktaş
Kırıkkale Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
71452-Yahşihan, Kırıkkale, Türkiye
tugbaaktas@kku.edu.tr
0000-0002-2050-8763

Emel Kızılok Kara
Kırıkkale Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
71452-Yahşihan, Kırıkkale, Türkiye
emel.kizilok@kku.edu.tr
0000-0001-7580-5709

Meral Sucu
Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Çankaya, Ankara, Türkiye
msucu@hacettepe.edu.tr
0000-0002-7991-1792

Öz

Bu çalışmada Kaplan-Meier yöntemi kullanılarak, çoklu hayat ürünlerine ilişkin fiyatlandırma yapılmıştır. Bu amaçla, Kanada sigorta verilerinden yararlanılarak ortak yaşamların ölümlülük yapısı incelenmiştir. Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında, annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri ile bireylerin bağımlılık durumuna göre net yıllık prim tutarları elde edilmiştir. Sonuç olarak, bağımlılığın sigorta ürünleri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bağımlılık, Çoklu hayat ürünleri, Dabrowska tahmini, Kaplan-Meier yöntemi, Prim.

Abstract

Pricing of multiple life products by Dabrowska estimation method

In this study, pricing of multiple life products is performed using the Kaplan-Meier method. For this purpose, the mortality structure of joint lives is analysed using Canadian insurance data. Under the assumption that individuals' future life times are dependent and independent, net single premiums of annuities and insurance products and net annual premiums according to the dependency status of individuals are obtained. are calculated. As a result, the effect of dependency on insurance products is shown.

Keywords: *Dependency, Multiple life products, Dabrowska estimation, Kaplan-Meier method, Premium.*

---

*Bu çalışma, birinci yazarın ikinci ve üçüncü yazarların danışmanlıklarında hazırladığı yüksek lisans tezinden üretilmiştir ve 9-10 Mart 2023 tarihleri arasında Konya'da düzenlenen 2. Uluslararası Atlas Uygulamalı Bilimler Kongresi'nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

1. Giriş

Hayat ürünleri, bir bireyin ne kadar süre hayatta kalacağıyla ilgili finansal belirsizliği yönetmek için tasarlanmış ürünlerdir [1]. Bireyin yaşama koşuluna bağlı olarak düzenlenen hayat ürünleri, sigorta sektöründe oldukça önemli bir yere sahiptir. İlk örneklerine 18. yüzyılda rastlanan bu ürünler, zamanla aktüerya bilimlerinin çalışma alanlarından biri haline gelmiştir. Hayat ürünlerine ilişkin yapılan ilk çalışmalarda, yalnızca bir kişinin yaşama durumu ele alınmıştır. İlerleyen zamanlarda ise birden fazla yaşamı dikkate alan çoklu hayat ürünleri geliştirilmiştir. Poliçedeki kişi sayısının artması, ürünlere ilişkin yapılan hesaplamaların değişmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla, tekli hayat ürünlerinden çoklu hayat ürünlerine doğru yapılan bu geçiş, aktüeryal yapının uygun bir şekilde genişletilmesini gerektirmektedir.

Birden fazla bireyin sigortalandığı hayat ürünlerinde, bireylerden birinin vefat etmesi halinde geride kalan bireyin gelecek yaşam süresinin bu durumdan ne ölçüde etkilendiğini belirlemek, sigorta şirketi açısından büyük önem taşımaktadır. Çoklu hayat ürünlerinin fiyatlandırılmasında en önemli unsur bireyler arasındaki bağımlılık yapısıdır. Bu noktada, sigortalılar arasındaki bağımlılığın hesaplamalara dahil edilmesi gerekmektedir. Çoklu yaşam durumunda bireyler arasındaki bağımlılığı ayrıntılı bir şekilde inceleyen ilk çalışma Bowers vd. [2] tarafından sunulmuştur.

Literatürde, parametrik ve parametrik olmayan yaklaşımlar aracılığıyla bağımlılık modellemesinin yapıldığı çalışmalar mevcuttur. Ancak uygulamada genellikle bireylerin gelecek yaşam süreleri birbirinden bağımsız kabul edilmektedir. Bu varsayım, birleşik yaşam olasılığının tek bir yaşam olasılığına indirgenmesi yoluyla fiyatlandırma hesaplamalarında kolaylık sağlasa da gerçeği yansıtmamaktadır [3]. Norberg [4], bağımlılığın ölümlülük modeline dahil edildiği takdirde çoklu yaşam durumunda oluşturulan sigorta ve annüite ürünlerinin net tek primlerinde değişim olduğunu göstermiştir.

Aktüeryal çalışmalarda bağımlılık modellenirken sıklıkla parametrik yaklaşımlar tercih edilmektedir. Bağımlı ölümlük modellerinin gelişim sürecine öncülük eden kavramların başında “kırık kalp sendromu” gelmektedir. Kırık kalp sendromu, eşlerden birinin ölmesi durumunda geride kalan bireyin ölümlülük oranında geçici bir artışa neden olan kısa süreli bağımlılığın en yaygın şeklidir [5]. İlk olarak, Parkes vd. [6] ve Ward [7] tarafından literatüre kazandırılan bu kavram daha sonları Jagger ve Sutton’nun [8] çalışmalarıyla desteklenmiştir. Bunun yanı sıra Hougaard’ın [9], Danimarkalı ikizler üzerine yapmış olduğu çalışmasında, ikizlerden birinin ölmesi halinde diğerinin uzun ömürlülük açısından nasıl etkileneceğini araştırılmıştır. Gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılık söz konusu olan bireylerin ölümlüğünü modellemede en popüler parametrik yöntemlerden bir diğeri ise “Kopula” yaklaşımlarıdır. Frees vd. [11], Sklar [10] tarafından tanıtılan kopula fonksiyonu yardımıyla bağımlılığı modellemeye yönelik öncü bir çalışma sunmuşlardır. Kızılok Kara [12,13] kopula yaklaşımını benimsediği çalışmalarında, bağımlılığın aktüeryal primler üzerindeki etkisini incelemiştir. Bakar ve Büyükyazıcı [14], Frank kopula modeliyle çiftlerin bağımlılığını analiz etmiş, uzun ömürlülüğün ve stokastik getiri oranlarının net tek primler üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Erdemir ve Sucu [15] kopula fonksiyonları üzerinde düzenleme yaparak esnek bir bağımlılık modellemesi elde etmişlerdir. Son zamanlarda, bireylerin gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın stokastik yaklaşımlar aracılığıyla da modellendiği görülmektedir [16, 17, 18].

Parametrik olmayan yöntemler ile prim tahmini üzerine yapılan çalışmalar parametrik yöntemlere kıyasla nispeten daha azdır. Ancak parametrik olmayan yaklaşımlar kullanılarak bireylerin ölümlülüklerine ilişkin önemli çıkarımlar yapılabilir. Buradan hareketle, yaşam analizlerinde Kaplan-Meier ve Dabrowska tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Luciano ve Vigna [19], Kaplan-Meier analiziyle İngiltere nüfusuna ait veriler üzerinde erkek bireylerin yaşama olasılıklarının zaman içindeki gelişimini araştırmışlardır. Zhang ve Brockett [16], Luciano vd. [20] çiftler arasındaki bağımlılığı Dabrowska tahminiyle analiz etmişlerdir.

Bu çalışmada, parametrik olmayan tahmin yöntemlerinden biri olan Kaplan-Meier yöntemi kullanılarak hayat ürünlerinin fiyatlandırılması ele alınmıştır. Çoklu yaşam durumunda bireylerin bağımlılık durumu, Dabrowska tahminiyle incelenmiştir. Uygulamada Kanada sigorta verilerinden yararlanılmıştır. Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında birleşik yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Ardından her iki durum için tekli ve çoklu yaşam durumunda oluşturulan hayat ürünlerinin net tek primleri elde edilmiştir. Çoklu hayat ürünlerinde hem birleşik yaşayan hem de son yaşayan durumu dikkate alınmıştır. Son olarak, bireylerin bağımlılık durumuna göre hayat ürünlerinin net yıllık prim tutarları hesaplanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın İkinci Bölümü'nde bireylerin marjinal yaşam olasılıklarının hesaplanmasında kullanılan Kaplan-Meier yöntemi ile birleşik yaşam olasılıklarının hesaplanmasında kullanılan Dabrowska yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde, Kanada sigorta verileri[1] kullanılarak, birleşik ve son yaşayan durumunda elde edilen net tek prim ve net yıllık prim tutarları verilmiştir. Çalışmanın sonucunda elde edilen sonuç ve bulgulara ise Dördüncü Bölüm'de yer verilmiştir.

2. Yaşam fonksiyonunun tahmin edilmesi

2.1. Kaplan-Meier tahmini

Kaplan-Meier tahmini, yaşam analizinin yapıldığı birçok çalışmada uygulama alanı bulmaktadır. Çarpım-Limit tahmini olarak da bilinen bu yöntem 1958 yılında Edward L. Kaplan ve Paul Meier [21] tarafından geliştirilmiştir. Kaplan-Meier tahmini, yaşam verilerinden marjinal yaşam fonksiyonunun tahmin edilmesinde kullanılan parametrik olmayan bir yöntemdir [21]. Bilgisayar kullanımının yaygınlaşması sonucunda bu yöntem zamanla küçük, orta ve büyük örneklemler için kullanılır hale gelmiştir [22].

Kaplan-Meier tahmini, analizi yapılan olayın zaman içindeki gelişimini ifade etmektedir. Araştırmaya konu olan olay, elektronik bir cihazın bozulması, şirketin iflas etmesi veya hayat sigortası poliçesi satın alan bir bireyin vefat etmesi olabilir. Bu yöntem, uygulanabilirlik yönünden basit olmakla beraber araştırmacıya oldukça etkili sonuçlar sağlamaktadır. Kaplan-Meier yönteminde, her gözlem zamanı için ilgilenilen olayın gerçekleşme olasılığı tahmin edilir. Analiz sonucunda elde edilen tahmini yaşam olasılıkları bir grafiğe döküldüğünde basamak fonksiyonu şeklinde gözükmektedir. Bunun sebebi, gözlem süresi boyunca olayın ortaya çıkma olasılığının değişmez kabul edilmesi ve ayrıca takip edilen zamanlarda olayın gerçekleşme olasılığının bir öncekinden bağımsız olarak değerlendirilmesidir. İnsan yaşamına ilişkin ölüm oranlarının gelişimi Kaplan-Meier yöntemiyle incelendiğinde, gözlemlenen süre içinde ölüm olasılığının değişmediği, ölüm zamanlarının birbirinden ayrık olduğu ve ardışık ölüm zamanlarında vefat durumunun olmadığı varsayılır.

Kaplan-Meier analizinin uygulanabilmesi için aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekmektedir;

1. Analizin yapılacağı zaman diliminin başlangıç ve bitiş tarihi bilinmelidir.
2. Deneklerin araştırmaya dahil olduğu tarih bilinmelidir.
3. Söz konusu olayın gerçekleşip gerçekleşmediği bilinmelidir. Olay gerçekleştiyse ortaya çıktığı tarih bilinmelidir.

$S(t)$ yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier tahmini aşağıdaki Çarpım-Limit formülüyle hesaplanmaktadır.

$$\hat{S}(t) = \prod_{i:t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right) \tag{1}$$

Burada n_i, t_i zamanına kadar yaşadığı bilinen kişi sayısını ve d_i, t_i zamanında gerçekleşen ölüm sayısını göstermektedir. Ayrıca, T bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken olmak üzere Kaplan-Meier formülü aşağıdaki gibi ifade edilir:

---

1 Bu verilerin kullanılmasına imkan sağlayan Edward Fress ve Emiliano Valdez'in izniyle Aktüerler Derneği'ne teşekkür ederiz.

$$\hat{S}(t_i) = \prod \hat{P}(T > t_i | T \geq t) \tag{2}$$

$\hat{P}(T > t_i | T \geq t)$ ifadesi t yaşına kadar yaşadığı bilinen bir bireyin $t_i - t$ yıl kadar yaşaması olasılığına karşılık gelmektedir.

2.2. Dabrowska tahmini

İki değişkenli yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier analizi Dabrowska tahmini olarak bilinmektedir. 1988 yılında Dabrowska [23] tarafından tanıtılan parametrik olmayan bu yöntemde, birleşik yaşam fonksiyonunun tahmini Çarpım-İntegral gösterimi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Ω kesin olay, F olay uzayı ve P olasılık ölçümü olmak üzere (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlı ve negatif olmayan $T = (T_1, T_2)$ rastgele değişken çifti verilsin. İki değişkenli birleşik yaşam fonksiyonu ve vektör değerli kümülatif tehlike fonksiyonu sırasıyla;

$$S(s,t) = P(T_1 > s, T_2 > t)$$

$$\Lambda(s,t) = \big(\Lambda_{10}(s,t), \Lambda_{01}(s,t), \Lambda_{11}(s,t)\big) \tag{3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Eş. (3)'te;

$$\Lambda_{11}(ds,dt) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 \in dt)}{P(T_1 \geq s, T_2 \geq t)} = \frac{S(ds,dt)}{S(s^-,t^-)}$$

$$\Lambda_{10}(ds,t) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 > t)}{P(T_1 \geq s, T_2 > t)} = -\frac{S(ds,t)}{S(s^-,t^-)}$$

$$\Lambda_{01}(s,dt) = \frac{P(T_1 > s, T_2 \in dt)}{P(T_1 > s, T_2 \geq t)} = -\frac{S(s,dt)}{S(s^-,t^-)}$$

ve başlangıç koşulları,

$$\Lambda_{10}(0,t) = \Lambda_{01}(s,0) = \Lambda_{11}(0,0) = 0$$

biçimindedir.

$T_1 = s^-$ ve $T_2 = t^-$ olması durumunda iki başarısızlığın da gerçekleşmesi olasılığı Λ_{11} ile ifade edilirken birinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı Λ_{10}, ikinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı ise Λ_{01} ile gösterilmektedir.

Buradan hareketle, $S(s,t)$ birleşik yaşam fonksiyonun Çarpım-İntegral gösterimi kümülatif tehlike fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$S(s,t) = \prod_{u \leq s}\big(1 - \Lambda_{10}(du,0)\big) \prod_{v \leq t}\big(1 - \Lambda_{01}(0,dv)\big) \times \prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}}\big(1 - L(du,dv)\big) \tag{4}$$

Eş. (4)'te;

$0 = u_0 < \cdots < u_m = s, 0 = v_0 < \cdots < v_n = t$ olmak üzere;

$$L(du,dv)=\frac{\Lambda_{10}(du,v^-)\Lambda_{01}(u^-,dv)-\Lambda_{11}(du,dv)}{\{1-\Lambda_{10}(\Delta u,v^-)\}\{1-\Lambda_{01}(u^-,\Delta v)\}}$$

$$\prod_{\substack{u\le s\\ v\le t}}\big(1-L(du,dv)\big)=\lim_{\substack{max|u_i-u_{i-1}|\to 0\\ max|v_j-v_{j-1}|\to 0}}\prod_{i,j}\Big(1-L\big((u_{i-1},u_i]\times(v_{j-1},v_j]\big)\Big)$$

$$L\big((u_{i-1},u_i]\times(v_{j-1},v_j]\big)=L(u_i,v_j)-L(u_{i-1},v_j)-L(u_i,v_{j-1})+L(u_{i-1},v_{j-1})$$

$$\prod_{u\le s}\big(1-\Lambda_{10}(du,0)\big)=S(s,0)$$

$$\prod_{v\le t}\big(1-\Lambda_{01}(0,dv)\big)=S(0,t)$$

biçimindedir.

Diğer taraftan;

$$1-\Lambda_{10}(du,v^-)=P(T_1>u|T_1\ge u,T_2\ge v)=\frac{S(u,v^-)}{S(u^-,v^-)}$$

$$1-\Lambda_{01}(u^-,dv)=P(T_2>v|T_1\ge u,T_2\ge v)=\frac{S(u^-,v)}{S(u^-,v^-)}$$

$$1-\Lambda_{11}(du,dv)=\big(1-\Lambda_{10}(du,v^-)\big)+\big(1-\Lambda_{01}(u^-,dv)\big)-P(T_1>u,T_2>v|T_1\ge u,T_2\ge v)$$

$$=\frac{S(u,v^-)}{S(u^-,v^-)}+\frac{S(u^-,v)}{S(u^-,v^-)}-\frac{S(u,v)}{S(u^-,v^-)}$$

biçimindedir. Bu durumda;

$$1-L(du,dv)=\frac{P(T_1>u,T_2>v|T_1\ge u,T_2\ge v)}{P(T_1>u|T_1\ge u,T_2\ge v)P(T_2>v|T_1\ge u,T_2\ge v)}=\frac{S(u,v)S(u^-,v^-)}{S(u,v^-)S(u^-,v)} \quad (5)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Sonuç olarak $S(s,t)$ birleşik yaşam fonksiyonunun formülü aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$S(s,t)=\prod_{u\le s}\frac{S(u,v^-)}{S(u^-,v^-)}\prod_{v\le t}\frac{S(u^-,v)}{S(u^-,v^-)}\times\prod_{\substack{u\le s\\ v\le t}}\frac{S(u,v)S(u^-,v^-)}{S(u,v^-)S(u^-,v)}$$

Eş. (5)'de, ilk iki çarpan marjinal yaşam olasılıklarını ifade ederken, son çarpan marjinal yaşam olasılıkları verildiğinde T_1 ve T_2 rastgele değişkenleri arasındaki bağımlılığı karakterize etmektedir.

Yapılan tanımlamalar doğrultusunda Dabrowska tahmin edicisi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\hat{S}(s,t)=\hat{S}(s,0)\hat{S}(0,t)\prod_{\substack{0<u\le s\\ 0<v\le t}}\Big(1-\hat{L}(\Delta u,\Delta v)\Big) \quad (6)$$

Eş. (6)'da;

$$\hat{S}(s,0) = \prod_{u \leq s} \left(1 - \widehat{\Lambda}_{10}(\Delta u, 0)\right)$$

$$\hat{S}(0,t) = \prod_{v \leq t} \left(1 - \widehat{\Lambda}_{01}(0, \Delta v)\right)$$

$$\hat{L}(\Delta u, \Delta v) = \frac{\widehat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)\widehat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v) - \widehat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)}{\left\{1 - \widehat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)\right\}\left\{1 - \widehat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)\right\}} \quad (7)$$

biçimindedir.
$\hat{S}(s,0)$ ve $\hat{S}(0,t)$ tek değişkenli Kaplan-Meier tahminine karşılık gelmektedir. Ayrıca, $\Delta u = u - u^-$ olmak üzere u ile u^- zamanları arasında geçen süreyi göstermektedir. Dabrowska tahmininde başarısızlık, ölüm olayının gerçekleşmesi olarak düşünülebilir. Bu durumda, birinci bireyin u^-, ikinci bireyin ise v^- zamanına kadar yaşadığı bilindiğinde $\widehat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)$ ifadesi iki bireyin (u, v) anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu iken $\widehat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)$ ve $\widehat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)$ ifadeleri sırasıyla birinci bireyin u anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu ve ikinci bireyin v anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonudur.

3. Uygulama: Çoklu hayat ürünlerinin Dabrowska yöntemiyle fiyatlandırılması

Çalışmada yaşam analizi, literatürde sıklıkla tercih edilen ve ortak yaşamlara ilişkin büyük bir veri seti olan Kanada sigorta verileri üzerinden gerçekleştirilmiştir. Veri seti, 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasında düzenlenen ve evli çiftlerin satın aldığı 14947 adet birleşik ve son yaşayan annüite sözleşmesinden oluşmaktadır. Her annüite sözleşmesinin başlangıç tarihi bilinmektedir. Sözleşmeler, her iki sigortalının doğum tarihini ve gözlem süresi içinde çiftlerden herhangi birinin ölmesi durumunda ölüm tarihini içermektedir. Sonuç olarak, Kaplan-Meier tahmininin yapılabilmesi için gerekli olan varsayımlar bu veri seti için sağlanmaktadır.

Uygulama yapılmadan önce veri setinde bazı kısıtlamalara gidilmiştir. Analizde, 1908 ile 1923 yılları arasında doğan ve yaş farkları beşten büyük olmayan çiftler dikkate alınmıştır. Böylece farklı yaş gruplarındaki ölüm trendlerinin zaman içindeki gelişimi incelenmiştir. Veri setindeki çift sayısının sınırlı olması nedeniyle kohort etkisi analize dahil edilmemiştir. Son olarak aynı cinsiyetli evliliklerin çıkarılmasıyla gözlem sayısı 5905 çifte indirgenmiştir. Hesaplamalar bu örneklem üzerinden gerçekleştirilmiştir. Veri setine ilişkin özet istatistikler Çizelge 1 ve Çizelge 2'de sunulmuştur.

Çizelge 1. Kişi sayıları

	Erkek	**Kadın**
Ölen kişi sayısı	913	371
Yaşayan kişi sayısı	6562	6045
Toplam kişi sayısı	7475	6416

Veri setinde, 1908-1923 yılları arasında doğan 7475 erkek ve 6416 kadın bulunmaktadır. 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasında, yani gözlemlenen beş yıl içerisinde 913 erkek ve 371 kadın vefat etmiştir. Çizelge 2'de yaşam analizinin yapıldığı çiftlerin sayıları özetlenmiştir. Çiftler arasında yaş farkı belirlenirken gün hesabı dikkate alınmıştır. Sonuç olarak, toplam 5905 çift elde edilmiştir.

Çizelge 2. Toplam çift sayısı

		Doğum Yılı (Kadın)															
		1908	**1909**	**1910**	**1911**	**1912**	**1913**	**1914**	**1915**	**1916**	**1917**	**1918**	**1919**	**1920**	**1921**	**1922**	**1923**
Doğum Yılı (Erkek)	**1908**	6	7	3	4	5	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1909	5	8	19	2	9	11	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	1910	1	8	13	11	14	9	20	15	8	0	0	0	0	0	0	0
	1911	3	7	12	19	25	20	26	24	14	11	0	0	0	0	0	0
	1912	7	3	4	16	18	34	26	40	23	23	10	0	0	0	0	0
	1913	10	4	10	12	23	27	36	56	37	56	26	13	0	0	0	0
	1914	4	7	1	15	6	23	45	48	52	51	59	56	22	0	0	0
	1915	0	2	1	6	19	19	40	66	84	60	64	67	74	26	0	0
	1916	0	0	0	2	14	10	44	47	71	51	76	74	68	56	42	0
	1917	0	0	0	0	0	14	15	25	44	72	76	86	83	76	47	30
	1918	0	0	0	0	0	1	10	16	39	57	68	77	112	104	71	61
	1919	0	0	0	0	0	0	5	18	28	31	36	64	84	116	76	95
	1920	0	0	0	0	0	0	0	6	17	29	51	85	118	136	105	96
	1921	0	0	0	0	0	0	0	0	10	15	26	35	83	114	128	89
	1922	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	15	28	55	78	110	129
	1923	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	14	34	50	49	98

Marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıklarının hesaplanabilmesi için analizin yapıldığı zaman aralığında gerçekleşen ölüm sayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Çalışmada, çiftlerin doğum yılları 1908-1923 yılları arasındaki 16 yıllık bir dönemi kapsamaktadır. Gözlem süresi de beş yıl olduğundan 21 yıllık periyot için ölüm sayıları belirlenmiştir. 1923 yılında doğmuş bir sigortalı 1988 yılında yani gözlem başlangıç tarihinde 65 yaşındadır. Dolayısıyla her iki cinsiyet için de minimum yaş 65 olup maksimum yaş 85'tir. Erkek birey "E", kadın birey "K" olmak üzere, veri setinden elde edilen ölüm sayıları Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 3. Ölen kişi sayıları

Yaş	d^E	d^K	Yaş	d^E	d^K	Yaş	d^E	d^K
65	5	2	72	54	49	79	42	20
66	13	5	73	84	26	80	43	15
67	15	8	74	71	20	81	34	15
68	56	18	75	86	34	82	24	10
69	44	19	76	77	19	83	17	4
70	57	32	77	60	17	84	4	3
71	75	34	78	51	21	85	1	0

Veriden çıkarılan ölüm istatistikleri Eş. (1)'de yerine yazılarak, erkek ve kadın bireylere ilişkin marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Elde edilen yaşam olasılıkları Çizelge 4'te verilmiştir;

Çizelge 4. Marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıkları

t	${}_tp_{65}^E$	${}_tp_{65}^K$	t	${}_tp_{65}^E$	${}_tp_{65}^K$	t	${}_tp_{65}^E$	${}_tp_{65}^K$
0	0,99933	0,99969	7	0,95732	0,97397	14	0,89431	0,94950
1	0,99759	0,99891	8	0,94609	0,96992	15	0,88856	0,94716
2	0,99559	0,99766	9	0,93659	0,96680	16	0,88401	0,94483
3	0,98809	0,99486	10	0,92508	0,96150	17	0,88080	0,94327
4	0,98221	0,99190	11	0,91478	0,95854	18	0,87853	0,94264
5	0,97458	0,98691	12	0,90676	0,95589	19	0,87799	0,94218
6	0,96455	0,98161	13	0,89993	0,95262	20	0,87786	0,94218

Erkek bireylerin marjinal yaşam olasılıklarında kadın bireylere kıyasla daha hızlı bir azalış olduğu görülmektedir. 65 yaşında olduğu bilinen erkek bireyin bir yıl yaşaması olasılığı 0,99759 iken aynı yaştaki kadın için bu oran 0,99891 olarak hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra, kadın bireylerin yaşama olasılıklarının erkek bireylere göre daha yüksek olduğu net bir şekilde görülmektedir.

Çiftler üzerinden yapılan yaşam analizinde, hem erkek hem de kadın bireylerin gözlemlenmeye başlandığı tarihte minimum yaşı 65 olduğundan yaşam olasılıkları koşullu olarak tahmin edilmiştir. T^K kadın bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken, T^E erkek bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken olsun. Bu durumda analizde kullanılacak koşullu birleşik yaşam fonksiyonunun Dabrowska tahmini aşağıdaki biçimde ifade edilebilir;

$$\hat{P}(T^E > s, T^K > t | T^E \geq 65, T^K \geq 65) = \hat{P}(T^E > s | T^E \geq 65)\hat{P}(T^K > t | T^K \geq 65) \times \prod_{\substack{0<u\leq s \\ 0<v\leq t}} \left(1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)\right) \quad (8)$$

Eş. (8)'deki son çarpan aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65) = \prod_{\substack{0<u\leq s \\ 0<v\leq t}} \left(1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)\right) \quad (9)$$

Burada, $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanının bire eşit olması erkek ve kadın bireylerin gelecek yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğu anlamına gelmektedir. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin arasında bağımlılık söz konusu ise bu çarpan birden büyük değerler almaktadır. Çizelge 5'te Eş. (8) yardımıyla analiz sonucunda ulaşılan $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanına ilişkin değerler verilmiştir;

Çizelge 5. $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanı

		Kadın					
	$s\backslash t$	0	1	2	3	4	≥ 5
Erkek	0	1	1	1	1	1	1
	1	1	1,00152	1,00186	1,00271	1,00340	1,00375
	2	1	1,00186	1,00511	1,00699	1,00768	1,00925
	3	1	1,00255	1,00598	1,01027	1,01149	1,01311
	4	1	1,00273	1,00617	1,01047	1,01393	1,01609
	≥ 5	1	1,00308	1,00654	1,01103	1,01502	1,02078

Hesaplamalar, kullanılan veri setine bağlı olarak ampirik bir şekilde yapılmıştır. Söz konusu veri setinde 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasındaki beş yıllık süre içinde meydana gelen ölüm bilgileri yer aldığından, olası 25 durum için analiz gerçekleştirilmiştir. Veri setinin sağdan sansürlü olması nedeniyle, gözlem süresi bittikten sonra takip edilen yıllar için beşinci yıldaki ölümlülük oranları kabul edilmiştir. Birleşik yaşam olasılıkları bu varsayım doğrultusunda hesaplanmıştır. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan ölüm olasılıkları ile veriden elde edilen gerçekleşen ölüm sayılarının dikkate alınarak hesaplandığı birleşik ölüm olasılıkları eşleştirilmiştir. Bu hesaplama sonucunda ortaya çıkan negatif fark, çiftler arasında pozitif yönde bir ilişkinin olduğunu göstermektedir [19]. Yapılan hesaplamaların sonucunda her gözlem aralığına karşılık gelen $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanının birden büyük bir değer aldığı görülmüştür. Bu durum, çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin birbiriyle bağımlı olduğu anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, Çizelge 5'e bakıldığında zaman ilerledikçe satır ve sütunlardaki çarpan değerlerinin yani çiftler arasındaki bağımlılık düzeyinin de arttığı görülmektedir.

Buradan hareketle, Eş. (8) kullanılarak çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında, birleşik ve son yaşayan durumları için yaşam olasılıkları elde edilmiştir. Hesaplamalar sonucunda ulaşılan olasılık değerleri Çizelge 6'da verilmiştir.

Çizelge 6. Birleşik ve son yaşayan durumunda yaşam olasılıkları

Birleşik Yaşam Durumu						Son Yaşayan Durumu					
	Bağımsız	Bağımlı		Bağımsız	Bağımlı		Bağımsız	Bağımlı		Bağımsız	Bağımlı
t	${}_tp^{E,K}_{65:65}$	${}_tp^{E,K}_{65:65}$	t	${}_tp^{E,K}_{65:65}$	${}_tp^{E,K}_{65:65}$	t	${}_tp^{E,K}_{\overline{65:65}}$	${}_tp^{E,K}_{\overline{65:65}}$	t	${}_tp^{E,K}_{\overline{65:65}}$	${}_tp^{E,K}_{\overline{65:65}}$
1	0,99650358	0,99801826	11	0,87685677	0,89507785	1	0,99999737	0,99848269	11	0,99646698	0,97824590
2	0,99325770	0,99833325	12	0,86676023	0,88477151	2	0,99998968	0,99491413	12	0,99588714	0,97787586
3	0,98301149	0,99310702	13	0,85729289	0,87510743	3	0,99993876	0,98984323	13	0,99525868	0,97744413
4	0,97424682	0,98781808	14	0,84915262	0,86679801	4	0,99985580	0,98628454	14	0,99466301	0,97701762
5	0,96182245	0,98180912	15	0,84161323	0,85910196	5	0,99966722	0,97968055	15	0,99411198	0,97662326
6	0,94680898	0,96648367	16	0,83523833	0,85259458	6	0,99934799	0,97967330	16	0,99360049	0,97624424
7	0,93240653	0,95178193	17	0,83083195	0,84809664	7	0,99888921	0,97951380	17	0,99323756	0,97597287
8	0,91762767	0,93669597	18	0,82813902	0,84534775	8	0,99837824	0,97930994	18	0,99303280	0,97582407
9	0,90549552	0,92431172	19	0,82722406	0,84441378	9	0,99789485	0,97907866	19	0,99294506	0,97575535
10	0,88947020	0,90795339	20	0,82709802	0,84428511	10	0,99711591	0,97863272	20	0,99293733	0,97575023

Çizelge 6'dan görüldüğü üzere, bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı varsayıldığında birlikte yaşamaları olasılığı, bağımsız duruma kıyasla daha yüksektir. Son yaşayan durumunda ise tam tersi söz konusudur. Yani, bağımlı durumda elde edilen yaşam olasılıkları, bağımsız duruma göre daha düşüktür. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılık yapısının değerlendirilmesi birlikte geçirecekleri zamanın uzunluğunu etkilemektedir.

Elde edilen yaşam olasılıklarına bağlı olarak, kesikli hayat ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Hesaplamalarda yıllık efektif faiz oranı (i) %3 olarak alınmıştır. Öncelikle tekli yaşam durumunda annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri elde edilmiş ve sonuçlar Çizelge 7'de verilmiştir. Buradaki aktüeryal hesaplamalarda kullanılan formüller ayrıntılı olarak Gerber'de [24] yer almaktadır.

Çizelge 7. Tekli yaşam durumunda net tek primler

Vade (n)	$\ddot{a}^{E}_{65:\overline{n}\rvert}$	$\ddot{a}^{K}_{65:\overline{n}\rvert}$	$A^{E}_{65^1:\overline{n}\rvert}$	$A^{K}_{65^1:\overline{n}\rvert}$	${}_nE^{E}_{65}$	${}_nE^{K}_{65}$
5	4,68322579	4,70161585	0,02289294	0,01173538	0,84068294	0,85131528
10	8,57476224	8,67357660	0,06188107	0,03191432	0,68834909	0,71544815
15	11,76400788	12,02835735	0,08700546	0,04170231	0,57033405	0,60794811
20	14,92092967	15,40845463	0,09349758	0,04473506	0,48604954	0,52165990

Erkek bireyler için düzenlenen hayat annüitelerinin net tek primleri kadın bireylere kıyasla daha düşük iken, sigorta ürünlerinin net tek primleri daha yüksektir. Bunun sebebi, erkek bireylerin yaşama olasılıklarının daha düşük olmasıdır. Ardından, tekli yaşam durumunda oluşturulan dönemsel ve karma hayat sigortasına ilişkin net yıllık prim tutarları hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 8'de verilmiştir.

Çizelge 8. Tekli yaşam durumunda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E}_{65^{1}:n]}\right)$					Karma Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E}_{65:n]}\right)$				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,004888	0,013213	0,018578	0,019964	5	0,184398	0,160195	0,140360	0,123750
10	0,002670	0,007217	0,010147	0,010904	10	0,100711	0,087493	0,076660	0,067588
15	0,001946	0,00526	0,007396	0,007948	15	0,073408	0,063773	0,055877	0,049264
20	0,001534	0,004147	0,005831	0,006266	20	0,057877	0,05028	0,044055	0,038841
Dönemsel Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{K}_{65^{1}:n]}\right)$					Karma Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{K}_{65:n]}\right)$				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,002496	0,006788	0,008870	0,009515	5	0,183565	0,158959	0,138176	0,120468
10	0,001353	0,003679	0,004808	0,005158	10	0,099503	0,086165	0,074900	0,065301
15	0,000976	0,002653	0,003467	0,003719	15	0,071751	0,062133	0,054010	0,047088
20	0,000762	0,002071	0,002706	0,002903	20	0,056011	0,048503	0,042162	0,036759

Dönemsel hayat sigortası poliçesi satın alan erkek bireylerin ödeyecekleri net yıllık prim tutarları, kadın bireylere göre daha yüksek bulunmuştur. Benzer durum karma hayat sigortası için de geçerlidir. Kadın bireylerin ödeyecekleri prim tutarları erkek bireylerden düşüktür.

Çoklu yaşam durumu için birleşik ve son yaşayan durumları ele alınmıştır. Her iki durum için de bireylerin bağımlılık yapısına göre annüite ve sigorta ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 9'da verilmiştir.

Çizelge 9. Birleşik ve son yaşayan durumunda net tek primler

		Vade (n)	5	10	15	20
Birleşik Yaşam Durumu	$\ddot{a}^{E,K}_{65:65:n]}$	Bağımsız	4,66793989	8,46705651	11,51545871	14,03701683
		Bağımlı	4,69549138	8,57355364	11,68530163	14,25925774
	$A^{E,K}_{65:65^{1}:n]}$	Bağımsız	0,03094095	0,08811420	0,12097564	0,12978759
		Bağımlı	0,01658929	0,07495060	0,10849490	0,11748996
	${}_{n}E^{E,K}_{65:65}$	Bağımsız	0,82967649	0,66184936	0,54019951	0,45794412
		Bağımlı	0,84691717	0,67560259	0,55142485	0,46746020
Son Yaşayan Durumu	$\ddot{a}^{E,K}_{\overline{65:65}:n]}$	Bağımsız	4,71690175	8,78128234	12,27690653	16,29236746
		Bağımlı	4,68935026	8,67478521	12,10706360	16,07012656
	$A^{E,K}_{\overline{65:65}^{1}:n]}$	Bağımsız	0,00368737	0,00568120	0,00773212	0,00844504
		Bağımlı	0,01803903	0,01884480	0,02021286	0,02074267
	${}_{n}E^{E,K}_{\overline{65:65}}$	Bağımsız	0,86232173	0,74194788	0,63808265	0,54976532
		Bağımlı	0,84508105	0,72819465	0,62685731	0,54024924

Bireyler arasındaki bağımlılığın hesaplamalara dahil edilmesi birleşik yaşam durumunda annüite ürünlerinin net tek primini arttırırken, son yaşayan durumunda azaltmaktadır. Sigorta ürünlerinin net tek primlerinde ise tam tersi bir değişim gözlemlenmektedir. Net tek prim tutarları elde edildikten sonra bireylerin bağımlılık yapısı dikkate alınarak, birleşik ve son yaşayan durumları için net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Sonuçlar Çizelge 10 ve Çizelge 11'de verilmiştir.

Çizelge 10. Birleşik yaşam durumunda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E,K}_{65:65^1:n]}\right)$									
Bağımsız					Bağımlı				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,006628	0,018876	0,025916	0,027804	5	0,003533	0,015962	0,023106	0,025022
10	0,003654	0,010407	0,014288	0,015329	10	0,001935	0,008742	0,012655	0,013704
15	0,002687	0,007652	0,010505	0,011271	15	0,001420	0,006414	0,009285	0,010055
20	0,002204	0,006277	0,008618	0,009246	20	0,001163	0,005256	0,007609	0,008240
Karma Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E,K}_{65:65:n]}\right)$									
Bağımsız					Bağımlı				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,184368	0,160663	0,141642	0,125908	5	0,183901	0,159846	0,140543	0,124577
10	0,101643	0,088574	0,078088	0,069414	10	0,100717	0,087543	0,076972	0,068227
15	0,074736	0,065127	0,057416	0,051038	15	0,073897	0,064231	0,056474	0,050059
20	0,061311	0,053428	0,047102	0,041870	20	0,060558	0,052636	0,046280	0,041022

Çizelge 11. Son yaşayan durumunda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E,K}_{65:65^1:n]}\right)$									
Bağımsız					Bağımlı				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,000782	0,001204	0,001639	0,001790	5	0,003847	0,004019	0,004310	0,004423
10	0,000420	0,000647	0,000881	0,000962	10	0,002079	0,002172	0,002330	0,002391
15	0,000300	0,000463	0,000630	0,000688	15	0,001490	0,001557	0,001670	0,001713
20	0,000226	0,000349	0,000475	0,000518	20	0,001123	0,001173	0,001258	0,001291
Karma Hayat Sigortası $\left({}_{m}P^{E,K}_{65:65:n]}\right)$									
Bağımsız					Bağımlı				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,183597	0,158500	0,136915	0,118343	5	0,184060	0,159306	0,137987	0,119631
10	0,098620	0,085139	0,073544	0,063568	10	0,099498	0,086116	0,074592	0,064669
15	0,070540	0,060897	0,052604	0,045468	15	0,071291	0,061703	0,053446	0,046336
20	0,053154	0,045888	0,039639	0,034262	20	0,053710	0,046486	0,040265	0,034909

Çizelge 10’dan görüldüğü üzere, bağımlılık varsayımı altında birleşik yaşam durumundaki dönemsel ve karma hayat sigortalarının net yıllık primleri bağımsız duruma göre daha düşüktür. Son yaşayan durumunda ise bağımlılık söz konusu olduğunda, dönemsel ve karma hayat sigortalarına karşılık gelen net yıllık prim tutarları daha yüksektir.

4. Sonuç ve öneriler

Aktüerya Bilimlerinde, hem hayat hem de hayat dışı sigortaları branşlarında riskin yönetilebilmesi için çeşitli yaklaşımlar benimsenmiştir. Hayat sigortalarında söz konusu olan ölüm riski modellenirken, bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişkenden yararlanılmaktadır. Ayrıca sigortalanan birey sayısının birden fazla olduğu hayat ürünlerinde bu rastgele değişkenler arasındaki ilişkiye göre de fiyatlandırma yapılabilmektedir.

Çoklu yaşam durumunda sigortalılar arasındaki bağımlılık yapısının fiyatlandırmaya yansıtılması, sigorta şirketi açısından son derece önemlidir. Ancak uygulamada çoğu sigorta şirketi, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğunu kabul etmektedir. Gerçekçi olmayan bu varsayım sigorta sektörü üzerinde potansiyel olarak önemli bir mali etkiye sahiptir. Dolayısıyla, olası finansal etkileri kontrol edebilmek için bağımlılığın göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

Bu çalışmada, bireylerin gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık durumu araştırılmıştır. Bu amaçla ampirik analiz yapılmış ve sonuçlar incelenmiştir. İlk olarak Kanada sigorta verileri üzerine yapılan Kaplan-Meier tahminiyle bireylerin marjinal yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Ardından, Dabrowska tahminiyle çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı olduğu gösterilmiş ve bireyler arasındaki bağımlılık düzeyleri hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak, birleşik ve son yaşayan durumunda yaşam olasılıkları hem bağımlı hem de bağımsız durum için elde edilmiştir. Sonrasında, tekli ve çoklu yaşam durumunda oluşturulan annüite ve sigorta ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır.

Bağımlılığın bireylerin birlikte yaşama olasılığını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca bağımlılık dikkate alındığında, birleşik yaşam durumunda oluşturulan sigorta ürünlerinin net tek primleri azalırken annüite ürünlerinin ne tek primleri artmıştır. Dolayısıyla, sigortalının ödemekle yükümlü olduğu net yıllık prim tutarı azalmıştır. Son yaşayan durumunda ise bağımlılık yapısı annüite ürünlerinin net tek primlerinde azalışa, sigorta ürünlerinin net tek primlerinde ise artışa neden olmuştur. Yani, ödenecek net yıllık prim tutarı artmıştır. Sonuç olarak, bağımlılığın birleşik ve son yaşayan durumunda oluşturulan hayat ürünleri üzerine etkisinin farklı olduğu görülmüştür. Bireyler arasındaki bağımlılığın aktüeryal hesaplamalara yansıtılması ödenecek net yıllık prim tutarını etkilemekte olup bu değerlendirmenin sigorta şirketleri açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışma risk ve sigorta alanında potansiyel uygulamalara sahiptir. Model birleşik yaşamların ölümlülüğündeki eğilimlere dikkat çektiğinden hane halkının finansal yönetimi ve emeklilik planlamasına rehberlik etmek için kullanılabilir. Daha sonraki çalışmalarda, modele çiftler arasındaki yaş farkı dahil edilerek sigorta ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarlarının nasıl değiştiği araştırılabilir.

Kaynaklar

[1] L. Xiaoming, 2008, Stochastic mortality modelling, PhD Thesis, Department of Statistics University of Toronto, Ontario.

[2] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt, 1997, Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, New York.

[3] K. Henshaw, C. Constantinescu and, O. Menoukeu Pamen, 2020, Stochastic Mortality Modelling for Dependent Coupled Lives, Risks, 8(1), 17.

[4] N. Ragnar, 1989, Actuarial Analysis of Dependent Lives, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 2, 243–254.

[5] J. Spreeuw, 2006, Types of Dependence and Time-dependent Association Between Two Lifetimes in Single Parameter Copula Models. Scandinavian Actuarial Journal, (5), 286–309.

[6] C. M. Parkes, B. Benjamin and R. G. Fitzgerald, 1969, Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers, British Medical Journal, 1(5646), 740-743.

[7] A. Ward, 1976, Mortality of Bereavement, British Medical Journal, 1(6011), 700-702.

[8] C. Jagger and C. J. Sutton, 1991, Death After Marital Bereavement-is the Risk Increased?, Statistics in Medicine, 10(3), 395-404.

[9] P. Hougaard, B. Harvald and N. V. Holm, 1992, Measuring the Similarities Between the Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881–1930, Journal of the American Statistical Association, 87(417), 17-24.

[10] A. Sklar, 1959, Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, Public Instution of Statistical University, 8, 229-231.

[11] E. W. Frees, J. F. Carriere and E. Valdez, 1996, Annuity Valuation with Dependent Mortality, The Journal of Risk and Insurance, 63(2), 229-261.

[12] E. Kızılok Kara, 2021, On Actuarial Premiums for Joint Last Survivor Life Insurance Based On Asymmetric Dependent Lifetimes. Current Academic Studies in Science and Mathematics Sciences-II, D. E. Yıldız, E. Y. Özkan (Eds), Livre de Lyon, France 33.

[13] E. Kızılok Kara, 2022, On the Impact of Asymmetric Dependence in the Actuarial Pricing of Joint Life Insurance Policies, Sains Malaysiana, 51(11), 3807-3817.

[14] Ö. Bakar, M. Büyükyazıcı, 2022, Stochastic Analysis of Longevity Risk in Dependent Multiple Life Annuities, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 40(2), 235-242.

[15], Ö. Karadağ Erdemir, M. Sucu, 2020, Eliptik sözde-kopulalar ile esnek bağımlılık modellemesi, İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya, 13(2), 61-77.

[16] Y. Zhang and P. Brockett, 2020, Modeling Stochastic Mortality for Joint Lives Through Subordinators, Insurance: Mathematics and Economics, 95, 166-172.

[17] P. Jevti´c and T. R. Hurd, 2017, The Joint Mortality of Couples in Continuous Time, Insurance: Mathematics and Economics, 75, 90–97.

[18] O. Walter, W. Patrick, 2021, Ottieno J. and Carolyne O., Positive Stable Frailty Approach in the Construction of Dependence Life-Tables, Open Journal of Statistics, 11(4), 506–523.

[19] E. Luciano, E. Vigna, 2005, Non Mean Reverting Affine Processes for Stochastic Mortality, ICER working paper and Proceedings of the XVth International AFIR Colloquium, Zurich.

[20] E. Luciano, J. Spreeuw, & E. Vigna, 2008, Modeling Stochastic Mortality for Dependent Lives, Insurance: Mathematics and Economics, 43(2), 234–244.

[21] E. L. Kaplan and P. Meier, 1958, Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, Journal of the American Statistical Association, 53(282), 457-481.

[22] E. T. Lee and, J. Wang, 2003, Statistical Methods for Survival Data Analysis, Vol. 476, John Wiley & Sons.

[23] D. M. Dabrowska, 1988, Kaplan–Meier Estimate on the Plane, The Annals of Statistics, 16(4), 1475–1489.

[24] H. U. Gerber, 1997, Life insurance mathematics, Springer, Tokyo.