$\mathbb{R}^{2n}$'de Kendine Duallik, Kalibrasyon ve Normlu Dualite Kavramları Üzerine

Yunus Özdemir

Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Eskişehir, +90 222 3350580
yunuso@anadolu.edu.tr

Geliş/Recieved: 31 Ağustos (August) 2016
Kabul/Accepted: 12 Aralık (December) 2016
DOI: 10.18466/cbayarfbe.320017

Özet

Bu çalışmada, temel olarak çift boyutlu Öklidyen uzayda, kendine duallik, kalibrasyon ve normlu dualite kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Kuvvetli kendine dual 2-form ve kuvvetli 2-kalibrasyon kavramları arasındaki ilişki net bir şekilde ortaya konulmuştur. Esas olarak, normlu dualite kavramı üzerinde detaylıca durulmuş ve bu yeni kavram kuvvetli 2-kalibrasyonların karakterizasyonu için kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler — Kalibrasyon, kendine duallik, kuvvetli kalibrasyon, kuvvetli kendine duallik, normlu dualite.

On the Notions of Self Duality, Calibration and Normed Duality on $\mathbb{R}^{2n}$

Abstract

In this work, basicly we investigate the relationships between the notions of self-duality, calibration and normed duality on even dimensional Euclidean space. We present explicitly the connection between strong self-dual 2-forms and strong 2-calibrations. We put emphasis on the notion of normed duality in depth and use this notion to characterize strong 2-calibrations.

Keywords — Calibration, normed duality, self duality, strong calibration, strong self duality,

1 Giriş

$\mathbb{R}^{2n}$'de verilen bir φ formunun kendine dualliği, matematiksel fizikte oldukça önemli bir kavramdır. Örneğin $\mathbb{R}^{2n}$'deki bir formun kendine dualliği, Seiberg-Witten teorisinin genelleştirilmesinde ve Yang-Mills denklemlerinin çözümünde oldukça önem arz etmektedir. $\mathbb{R}^4$'deki $2-$formların kendine dualliği de ayrıca ayar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Bunun yanında kalibrasyon teorisi, Harvey ve Lawson [1] tarafından 1982 yılında ortaya konulmuş, Bryant [2] ve Joyce'un [3] sırasıyla G_2 ve $Spin(7)$ manifoldları üzerindeki çalışmaları ile de önem kazanmış bir teoridir. Hacmi minimize eden yüzeylerle olan yakın ilişkisi nedeniyle de son dönemlerde kalibrasyon teorisi önem kazanmış ve bu konuda önemli çalışmalar yapılmıştır. [4] çalışmasında, kalibrasyon kavramından hareketle kuvvetli kalibrasyon ve kuvvetli kalibrasyon alanı kavramları tanımlanmış ve çift boyuttaki kuvvetli $2-$kalibrasyonlar sınıflandırılıp, kuvvetli $2-$kalibrasyon alanlarının sabit olması gerektiği gösterilmiştir.

Bu çalışmanın hedeflerinden biri, (kuvvetli) kalibrasyonlar ve (kuvvetli) kendine dual formlar arasında var olduğu gözlemlenen ilişkiyi açık bir şekilde ortaya koymaktır. Bunun yanında bu çalışmada esas olarak, (normlu trialite kavramından hareketle) normlu dualite kavramı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiş, bu türden dualitelerin sınıflandırılması üzerinde durulup, bu kavramın (kuvvetli) 2-kalibrasyonlar ile olan yakın ilişkisi ortaya konmuştur. Ayrıca bir 2-formun kuvvetli 2-kalibrasyon olması ile ilgili anti-simetrik matrisin ortogonal olmasının denk olduğu gerçeği, normlu dualite kavramı yardımıyla net bir şekilde ifade edilip kanıtlanmıştır.

İkinci bölümde kendine duallik ve kalibrasyon kavramları üzerinde biraz daha detaylıca durulup, kuvvetli kendine duallik ve kuvvetli kalibrasyon kavramlarına yer verilmiştir. Bu bölümde özellikle kuvvetli 2-kalibrasyonların uygun bir matrisin özdeğerleri yardımıyla karakterizasyonu üzerinde detaylıca durulmuştur. 3. bölümde bir $2-$formun normlu dualite olması üzerinde durulmuş ve normlu dualite kavramı etraflıca tartışılmış, özellikleri incelenmiştir. Son bölümde ise bu 3 kavram arasındaki ilişki net bir şekilde ortaya konmuştur.

2 Kendine Duallik ve Kalibrasyon Kavramları

2.1 Kendine Dual ve Kuvvetli Kendine Dual Formlar

Kendine duallik deyince akla ilk gelen, $\mathbb{R}^{2n}$'de verilen bir $n-$formun Hodge anlamında kendine dualliğidir. V, n boyutlu yönlendirilmiş bir iç çarpım uzayı olsun. V üzerindeki iç çarpım yardımıyla $\Lambda^p V$ üzerinde bir iç çarpım $u, v \in \Lambda^p V$ $p-$vektörler olmak üzere

$$\langle u, v\rangle = \langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_p, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p\rangle = \det(\langle u_i, v_i\rangle)$$

ifadesinin bilineer genişletilmesiyle tanımlanabilir. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, V vektör uzayının pozitif yönlendirilmiş birimdikey bir tabanı olsun. Bu durumda

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

kümesi de $\Lambda^p V$'nin birimdikey bir taban olur. Benzer şekilde $\Lambda^p(V)^* \cong \Lambda^p V^*$ da bir iç çarpım uzayıdır ve dx_i, e_i elemanına karşılık gelen $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$ şeklinde tanımlı V^* dual uzayının elemanı olmak üzere,

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

kümesi de $\Lambda^p V^*$ vektör uzayının birimdikey bir tabanı olur. Verilen bir $p-$formuna bir $(n-p)-$formu karşılık getiren Hodge operatörü, $\Lambda^p V^*$ vektör uzayında bir lineer dönüşüm olarak tabanlar üzerinde şu şekilde tanımlanır:

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

hacim formunu göstermek üzere herhangi bir $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ taban elemanını $j_1 < \cdots < j_{n-p}$ olmak üzere

$$\left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) \wedge \left(\pm dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}\right) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

olacak şekildeki $\pm dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}$ elemanına resmeder. Taban elemanları üzerinde yukarıdaki gibi tanımladıktan sonra vektör uzayına lineer genişleterek tüm vektör uzayı üzerinde bir lineer dönüşüm elde etmiş oluruz. Bir φ formuna Hodge operatörü uygulanarak elde edilen form $*\varphi$ ile gösterilir ve bu forma φ formunun **Hodge duali** denir.

$\mathbb{R}^{2n}$'de bir φ $n-$formu verilsin. $*\varphi = \varphi$ ise φ'ye Hodge anlamında **kendine dual** form, $*\varphi = -\varphi$ ise φ'ye **tersine dual** form denir.

$\mathbb{R}^4$'de bir φ $2-$formunun Hodge anlamında kendine dual olabilmesi için

$$\begin{aligned}\varphi = a\,(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ + b\,(dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ + c\,(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3)\end{aligned}$$

ve tersine dual olabilmesi için

$$\begin{aligned}\varphi = a\,(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4) \\ + b\,(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \\ + c\,(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3)\end{aligned}$$

formunda olması gerektiği hemen görülebilir. Tanımdan açıktır ki, Hodge anlamındaki kendine duallik sadece $\mathbb{R}^{2n}$'deki $n-$formlar için kendine duallik tanımı olarak alınabilir. Fakat $2-$formların daha üst boyutlardaki kendine dualliği de önemli olduğundan, $\mathbb{R}^{2n}$'deki $2-$formların kendine dualliği için farklı tanım arayışları olmuştur. Örneğin 1977'de Trautman [5] $\mathbb{R}^{2n}$'deki bir φ $2-$formunun kendine dualliğini, φ^{n-1} formu φ'nin kendisiyle $n-1$ kez dış çarpımını göstermek üzere, $\varphi^{n-1} = \alpha(*\varphi)$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısının var olması şeklinde tanımlamış ve kullanmıştır. 1984'de Grossmann ve ark. [6] ve 1983'de Corrigan ve ark. [7] da farklı alternatif kendine duallik tanımı vermişlerdir.

$\mathbb{R}^{2n}$'de bir φ $2-$formu ve $\mathbb{R}^{2n}$'nin birimdikey bir tabanı verildiğinde, φ formunun bu tabana göre bileşenleri kullanılarak oluşturulan matris anti-simetriktir. Elde edilen anti-simetrik matrisin özdeğerleri

$$\pm i\lambda_k, k = 1,2, \ldots, n$$

formundaki kompleks sayılardır. $\mathbb{R}^4$'deki bir $2-$formun Hodge anlamında kendine (veya tersine) dual olabilmesi için, ilgili özdeğerlerin normca birbirine eşit olması gerektiği hemen görülebilir. Bilge ve ark. [8] tarafından $\mathbb{R}^{2n}$'deki bir φ $2-$formunun "kuvvetli kendine dualliği" tanımı verilmiş ve bu farklı tanımların denkliği gösterilmiştir [9].

Tanım 2.1 (Kuvvetli Kendine (Tersine) Duallik) φ, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir $2-$form ve $\pm i\lambda_k, k=1,2,\dots,n$ kompleks sayıları da φ'nin herhangi bir birimdikey tabana göre elde edilen anti-simetrik matrisinin özdeğerleri olsun. Eğer $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_n|\neq 0$ ise φ'ye kuvvetli kendine (ya da tersine) dual form denir [8].

Farklı bir şekilde ifade etmek gerekirse, φ formunun kuvvetli kendine (veya tersine) dual olması ile,

$$\varphi=\sum_{1\le i<j\le 2n} a^{ij}\,dx_i\wedge dx_j$$

şeklinde ise, yani matrisi

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a^{1\,2} & a^{1\,3} & \cdots & a^{1\,2n}\\ -a^{1\,2} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{2\,2n}\\ -a^{1\,3} & -a^{2\,3} & 0 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-1\,2n}\\ -a^{1\,2n} & -a^{2\,2n} & \cdots & -a^{2n-1\,2n} & 0\end{pmatrix}$$

ise, $A^2=-\alpha^2 I$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir α gerçel sayısının var olması denktir. Eğer φ^n $2n$-formu hacim formunun pozitif katı ise φ kuvvetli kendine dual, negatif katı ise kuvvetli tersine dual form adını alır.

2.2 Kalibrasyonlar ve Kuvvetli Kalibrasyonlar

$\mathbb{R}^m$ standart iç çarpım uzayı üzerindeki $p-$formların kümesini $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ ile gösterelim. $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, $\mathbb{R}^m$'nin standart taban vektörleri, $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_m\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen $(\mathbb{R}^m)^*$ dual uzayının elemanları olsun.

Tanım 2.2 (Kalibrasyon) $\varphi\in\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ $p-$formuna aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir $p-$kalibrasyon denir [1].

1. Her birimdikey $\{u_1,u_2,\dots,u_p\}\in\mathbb{R}^m$ kümesi için $|\varphi(u_1,u_2,\dots,u_p)|\le 1$ olsun.
2. En az bir $\{u_1,u_2,\dots,u_p\}\in\mathbb{R}^m$ birimdikey vektör kümesi için $|\varphi(u_1,u_2,\dots,u_p)|=1$ olsun.

Varsayalım $\varphi\in\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ bir kalibrasyon olsun. $p=1$ durumunda $\varphi\in\Lambda^1(\mathbb{R}^m)^*=(\mathbb{R}^m)^*$ olmak üzere

$$\varphi=a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots+a_mdx_m$$

şeklinde ifade edilen $1-$formun kalibrasyon olması için $a_1^2+\cdots+a_m^2=1$ olması gerektiği hemen görülebilir. Bir kalibrasyonun Hodge dualinin de yine bir kalibrasyon olduğu da kolayca görülebilir. Açıktır ki $\mathbb{R}^m$'de verilen bir $(m-1)$-formun kalibrasyon olması için yine katsayılarının kareleri toplamının 1 olması gerekir. $p=2$ durumunda, bir $\varphi\in\Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ anti-simetrik bilineer dönüşümüne karşılık gelen $A=(\varphi(e_i,e_j))$ anti-simetrik matrisinin özdeğerleri φ'nin kalibrasyon olup olmadığını belirlemektedir. A matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k, k=1,2,\dots,n$ olmak üzere, φ'nin

$$\varphi=\lambda_1dy_1\wedge dy_2+\lambda_2dy_3\wedge dy_4+\cdots+\lambda_ndy_{2n-1}\wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1,f_2,\dots,f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir (burada $\{dy_1,dy_2,\dots,dy_{2n}\}$, $\{f_1,f_2,\dots,f_{2n}\}$'nin dual tabanıdır). Bu durumda φ 2-formunun kalibrasyon olması için

$$\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\dots,|\lambda_n|\}=1$$

olması gerek ve yeter koşul olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu maksimumun 1'den farklı olması durumunda φ bir kalibrasyon olamaz. Yani $p=2$ durumunda $\mathbb{R}^{2n}$'de bir 2-formun (dolayısıyla Hodge duali olan bir $(2n-2)$ formun) kalibrasyon olup olmadığına özdeğerler yardımıyla hemen karar verilebilmektedir. Fakat $2<p<2n-2$ için bir $p-$formun kalibrasyon olup olmadığını kontrol etmek ya da belli bir boyuttaki tüm kalibrasyonları sınıflandırmak kolay değildir. Bununla ilgili özellikle $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^8$ üzerinde önemli çalışmalar yapılmıştır [10,11].

Örnek 2.1 $\varphi,\phi,\psi\in\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ formları

$$\varphi=\frac{1}{2}dx_1\wedge dx_2+\frac{1}{2}dx_3\wedge dx_4$$
$$\phi=\frac{1}{2}dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4$$
$$\psi=\frac{1}{2}dx_1\wedge dx_2+2dx_3\wedge dx_4$$

şeklinde verilmiş olsun. ϕ'nin $\mathbb{R}^4$ üzerinde bir kalibrasyon olmasına karşın, φ ve ψ birer kalibrasyon değildir.

$\mathbb{R}^m$ vektör uzayı üzerinde tanımladığımız gibi herhangi bir iç çarpım uzayı üzerinde de verilen bir formun kalibrasyon olması benzer bir biçimde tanımlanır. Bir Riemann manifoldu üzerindeki bir form alanının kalibrasyon olmasını benzer biçimde tanımlayabiliriz. Lakin bu çalışmada sabit katsayılı formlarla sınırlı kalınacaktır. Zaten kalibrasyon teorisinde yapılan çalışmalar genel olarak $\mathbb{R}^m$'deki sabit katsayılı formları kapsamaktadır.

Örnek 2.2 $\{e_1, e_2, \ldots, e_7\}$, $\mathbb{R}^7$'nin standart taban vektörleri ve $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_7\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen $(\mathbb{R}^7)^*$ dual uzayının elemanları olsun.

$$dx_{ij\cdots k} = dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_k$$

olmak üzere

$$\varphi = dx_{123} + dx_{145} - dx_{167} + dx_{246} + dx_{257} + dx_{347} - dx_{356}$$

şeklinde verilen 3-form [12, Teorem IV.1.4]'den dolayı bir kalibrasyondur ve $\mathbb{R}^7$'deki asosyatif kalibrasyon olarak bilinir. Ayrıca φ'nin Hodge duali olan ve

$$*\,\varphi = dx_{4567} + dx_{2367} - dx_{2345} + dx_{1357} + dx_{1346} + dx_{1256} - dx_{1247}$$

4-formu da bir kalibrasyondur ve $\mathbb{R}^7$'deki ko-asosyatif kalibrasyon olarak bilinir.

Örnek 2.3 $\{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$, $\mathbb{R}^8$'in standart taban vektörleri ve $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_8\}$ de sırasıyla bu vektörlere karşılık gelen $(\mathbb{R}^8)^*$ dual uzayının elemanları olsun.

$$dx_{ij\cdots k} = dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_k$$

olmak üzere

$$\Phi = dx_{1234} + dx_{1256} + dx_{1278} + dx_{1357} - dx_{1368} - dx_{1458} - dx_{1467} + dx_{5678} + dx_{3478} - dx_{3456} + dx_{2468} - dx_{2457} - dx_{2367} - dx_{2358}$$

şeklinde verilen 4-form [12, Teorem IV.1.24]'den dolayı bir kalibrasyondur ve Cayley kalibrasyonu olarak bilinir.

Yukarıda verilen kalibrasyonlar, bu teorideki önemli ve klasik kalibrasyon örneklerinden olup, ilgili formların kalibre ettiği alt manifoldlar da hacmi minimize eden alt manifoldların önemli örneklerindendir.

Klasik kalibrasyon tanımının 2. şartını değiştirip, daha kuvvetli koşullar içermesi nedeniyle adına kuvvetli kalibrasyon dediğimiz tanımı verelim.

Tanım 2.3 (Kuvvetli Kalibrasyon): $\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ $p-$formuna aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir **kuvvetli $p-$kalibrasyon** denir [4].

1. Her birimdikey $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \in \mathbb{R}^m$ kümesi için $|\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p)| \leq 1$ olsun.
2. Her $\{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}\}$ birimdikey $p-1$ vektöre karşılık, bu vektörlere dik öyle bir u_p birim vektörü var olsun ki $|\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, u_p)| = 1$ olsun.

Bir kuvvetli kalibrasyonun aynı zamanda bir kalibrasyon olduğu tanımdan açıktır, ama tersi genelde doğru değildir. Sadece $p = 1$ durumunda, $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m)^*$ 1-formunun kalibrasyon olması ile kuvvetli kalibrasyon olması denktir. Fakat $p > 1$ için bu denkliğin her zaman korunmadığı da açıktır.

Örnek 2.4

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{2} dx_3 \wedge dx_4$$

$2-$formu bir kalibrasyondur, ama bir kuvvetli $2-$kalibrasyon değildir. Çünkü $|\varphi(x, y)| = 1$ olacak şekilde $x = (0,0,1,0)$ vektörüne dik hiçbir y birim vektörü yoktur.

Örnek 2.5 $\mathbb{R}^7$'de temel $3-$form olarak bilinen

$$\phi = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_6 \wedge dx_7 + dx_2 \wedge dx_5 \wedge dx_7 - dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_6 + dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_7$$

$3-$ formu bir kuvvetli kalibrasyondur. Bu formun gerçekten bir kuvvetli kalibrasyon olduğunun gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz.

Bu çalışmada daha çok çift boyuttaki $2-$formlarla ilgilenildiğinden $p = 2$ durumuna ağırlık verip, $\mathbb{R}^{2n}$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonlara odaklanalım. φ, $\mathbb{R}^{2n}$ bir 2-form olsun. Standart tabana göre matrisine A diyelim.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{12n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{22n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-12n} \\ -a^{12n} & -a^{22n} & \cdots & -a^{2n-12n} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde alalım. A matrisinin özdeğerleri $k = 1,2,\ldots,n$ için $\pm i\lambda_k$ olmak üzere, φ'nin

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1, f_2, \dots, f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. Bu durumda $\{f_1, f_2, \dots, f_{2n}\}$ tabanının dual tabanı $\{dy_1, dy_2, \dots, dy_{2n}\}$'ye göre φ 2-formu

$$\varphi=\lambda_1 dy_1\wedge dy_2+\lambda_2 dy_3\wedge dy_4+\cdots+\lambda_n dy_{2n-1}\wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebilir. φ 2-formunun klasik anlamda kalibrasyon olması için

$$\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}=1$$

olması gerek ve yeter koşuldur. Acaba φ'nin kuvvetli kalibrasyon olması durumunda koşul değişecek mi?

İlk aşikar olmayan durum olarak $\mathbb{R}^4$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonları inceleyelim.

2.2.1 $\mathbb{R}^4$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonlar

$\mathbb{R}^4$'te bir $2-$form $a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{23}, a^{24}, a^{34}\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi=a^{12}dx_1\wedge dx_2+a^{13}dx_1\wedge dx_3+a^{14}dx_1\wedge dx_4 +a^{23}dx_2\wedge dx_3+a^{24}dx_2\wedge dx_4+a^{34}dx_3\wedge dx_4$$

şeklinde yazılabilir. φ'nin $\mathbb{R}^4$'ün standart tabanına göre karşılık gelen anti-simetrik matrisi

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & a^{24} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & a^{34} \\ -a^{14} & -a^{24} & -a^{34} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$ için

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=a^{12}(dx_1\wedge dx_2)(x,y)+a^{13}(dx_1\wedge dx_3)(x,y)\\&\quad+a^{14}(dx_1\wedge dx_4)(x,y)+a^{23}(dx_2\wedge dx_3)(x,y)\\&\quad+a^{24}(dx_2\wedge dx_4)(x,y)+a^{34}(dx_3\wedge dx_4)(x,y)\\&=a^{12}(x_1y_2-x_2y_1)+a^{13}(x_1y_3-x_3y_1)\\&\quad+a^{14}(x_1y_4-x_4y_1)+a^{23}(x_2y_3-x_3y_2)\\&\quad+a^{24}(x_2y_4-x_4y_2)+a^{34}(x_3y_4-x_4y_3)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^4=1$$
$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^4=1$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=0$$

olmak üzere, öncelikle

$$a^{12}(x_1y_2-x_2y_1)+a^{13}(x_1y_3-x_3y_1)+a^{14}(x_1y_4-x_4y_1)+a^{23}(x_2y_3-x_3y_2)+a^{24}(x_2y_4-x_4y_2)+a^{34}(x_3y_4-x_4y_3)\le 1$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için sağlanması gereken bu ilk koşulun bile kontrolü kolay değildir. Bu durumda, daha az parametre kullanacağımız yani φ'yi daha basit ifade edebileceğimiz bir tabanda çalışalım. A matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k (k=1,2)$ olmak üzere A matrisinin

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebileceği bir $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. Bu özdeğerler, iA Hermitsel matrisinin reel özdeğerleridir. iA matrisinin özdeğerleri de

$$K=(a^{12})^2+(a^{13})^2+(a^{14})^2+(a^{23})^2+(a^{24})^2+(a^{34})^2$$
$$L=(a^{12}+a^{34})^2+(a^{14}+a^{23})^2+(a^{13}-a^{24})^2$$
$$M=(a^{12}-a^{34})^2+(a^{14}-a^{23})^2+(a^{13}+a^{24})^2$$

ve

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K+\sqrt{L\cdot M}}$$
$$\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K-\sqrt{L\cdot M}}$$

olmak üzere $\{\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2\}$ şeklindedir. Bu durumda $\{dy_1, dy_2, dy_3, dy_4\}$, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ tabanının dual tabanını göstermek üzere φ 2-formu $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ tabanına göre

$$\varphi=\lambda_1 dy_1\wedge dy_2+\lambda_2 dy_3\wedge dy_4$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi φ'nin kuvvetli kalibrasyon olma koşullarını sağlayıp sağlamadığını $\lambda_k (k=1,2)$'nın durumlarına göre inceleyelim (Bu arada $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ birimdikey tabanında çalıştığımızı unutmayalım).

- $|\lambda_1|>1$ veya $|\lambda_2|>1$ olsun. Bu durumda f_1, f_2 , f_3 ve f_4 birimdikey vektörleri için

$$\varphi(f_1,f_2)=\lambda_1(1\cdot 1-0\cdot 0)+\lambda_2(0\cdot 0-0\cdot 0)=\lambda_1>1$$
$$\varphi(f_3,f_4)=\lambda_1(0\cdot 0-0\cdot 0)+\lambda_2(1\cdot 1-0\cdot 0)=\lambda_2>1$$

olduğundan φ bir kalibrasyon olamaz. Kalibrasyon olmanın ilk koşulu sağlanmadı. Yani $|\lambda_k| (k=1,2)$ değerlerinden herhangi biri 1'den büyük olamaz. (Zaten bu durumda φ'nin klasik anlamda kalibrasyon olması bile mümkün değildir.)

- $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olsun. $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \lambda_2(x_3y_4 - x_4y_3)\\ &= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, \lambda_2x_3, -\lambda_2x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle\\ &\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2^2(x_3^2 + x_4^2)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &\leq \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &< 1\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\varphi(x,y) = 1$ eşitliğini sağlayacak hiçbir birimdikey vektör çifti yoktur. Yani kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu sağlanmaz. (Bu durumda da φ'nin klasik kalibrasyon bile olamayacağı yine açıktır.)

- $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3)\\ &= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, x_3, -x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle\\ &\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &\leq 1\end{aligned}$$

olur. Ancak kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu gereği $x = f_1$ vektörüne karşılık öyle bir $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ vektörü var olmalı ki bu vektörler birimdikey ve $\varphi(f_1, y) = 1$ olsun. Ama bu mümkün değildir. Çünkü bu vektörler için $\|y\| = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\varphi\big((1,0,0,0), y\big)\\ &\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &= |\lambda_1|\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &< 1\end{aligned}$$

şeklindedir.

- $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olsun. Bir önceki duruma benzer biçimde φ'nin kuvvetli kalibrasyon olamayacağı görülür.

- $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun. $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\varphi(x,y)\\ &= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \lambda_2(x_3y_4 - x_4y_3)\\ &\leq \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, x_3, -x_4), (y_2, y_1, y_4, y_3)\rangle\\ &\leq \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2^2(x_3^2 + x_4^2)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

olmuş olur. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ birim vektörü verilsin. $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 1$ olsun. Bu durumda $y = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ vektörünü düşünelim.

$$\|y\| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$
$$\langle x, y\rangle = -x_1x_2 + x_2x_1 - x_3x_4 + x_3x_4 = 0$$

olur ve

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3)\\ &= x_1x_1 - x_2(-x_2) + x_3x_3 - x_4(-x_4)\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde, $\|x\| = 1$ şeklindeki her $x \in \mathbb{R}^4$ vektörüne karşılık en az bir $y \in \mathbb{R}^4$ vektörü vardır ki $\|y\| = 1$, $\langle x, y\rangle = 0$ ve $\varphi(x,y) = 1$ şeklindedir.
Benzer biçimde;

$\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$ için $y = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$
$\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 1$ için $y = (x_2, -x_1, -x_4, x_3)$
$\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ için $y = (x_2, -x_1, x_4, -x_3)$

birim vektörü için $\langle x, y\rangle = 0$ ve $\varphi(x,y) = 1$ elde edilmiş olur. Yani kuvvetli kalibrasyon olmanın son özelliği sağlanır.

O halde $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ durumunda φ bir kuvvetli kalibrasyondur. Yani φ'nin kuvvetli kalibrasyon olması için gerek ve yeter şart, birimdikey bir tabana göre matrisinin kompleks özdeğerlerinin $(\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2)$ normunun 1 olmasıdır. Buradan

$$K = (a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2$$
$$L = (a^{12} + a^{34})^2 + (a^{14} + a^{23})^2 + (a^{13} - a^{24})^2$$
$$M = (a^{12} - a^{34})^2 + (a^{14} - a^{23})^2 + (a^{13} + a^{24})^2$$

olmak üzere

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2}(K + \sqrt{L \cdot M}) = 1$$
$$\lambda_2^2 = \frac{1}{2}(K - \sqrt{L \cdot M}) = 1$$

eşitliklerinin sağlanması gerektiği, yani φ'nin bir kuvvetli kalibrasyon olması için

$$K = 2, L \cdot M = 0$$

koşullarının sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu koşulları yerine koyduğumuzda

$$(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2 = 2$$
$$(a^{12} + a^{34})^2 + (a^{14} + a^{23})^2 + (a^{13} - a^{24})^2 = 0$$

veya

$$(a^{12})^2 + (a^{13})^2 + (a^{14})^2 + (a^{23})^2 + (a^{24})^2 + (a^{34})^2 = 2$$
$$(a^{12} - a^{34})^2 + (a^{14} - a^{23})^2 + (a^{13} + a^{24})^2 = 0$$

olması gerektiği görülür. Buradan $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ standart tabanına göre

$$\begin{aligned}\varphi = {}& a^{12}dx_1 \wedge dx_2 + a^{13}dx_1 \wedge dx_3 + a^{14}dx_1 \wedge dx_4\\ &+ a^{23}dx_2 \wedge dx_3 + a^{24}dx_2 \wedge dx_4 + a^{34}dx_3 \wedge dx_4\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen φ'nin bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşulun

$$(a^{12})^2+(a^{13})^2+(a^{14})^2=1$$
$$a^{12}=-a^{34}, a^{14}=-a^{23}, a^{13}=a^{24}$$

veya

$$(a^{12})^2+(a^{13})^2+(a^{14})^2=1$$
$$a^{12}=a^{34}, a^{14}=a^{23}, a^{13}=-a^{24}$$

olduğu sonucuna varılır. Bu durumda φ bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise $(a^{12})^2+(a^{13})^2+(a^{14})^2=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi = a^{12}&(dx_1\wedge dx_2-dx_3\wedge dx_4)\\ +a^{13}&(dx_1\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_4)\\ +a^{14}&(dx_1\wedge dx_4-dx_2\wedge dx_3)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\varphi = a^{12}&(dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4)\\ +a^{13}&(dx_1\wedge dx_3-dx_2\wedge dx_4)\\ +a^{14}&(dx_1\wedge dx_4+dx_2\wedge dx_3)\end{aligned}$$

formundadır.

Dikkat edilirse, $\mathbb{R}^4$'deki bir φ $2-$formu eğer bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise $*\varphi=\varphi$ veya $*\varphi=-\varphi$ dir. Yani φ eğer kuvvetli $2-$kalibrasyon ise Hodge anlamında kendine dual ya da tersine dual bir $2-$formdur. $\mathbb{R}^4$'de

$$\begin{aligned}\varphi = a^{12}dx_1\wedge dx_2 + a^{13}dx_1\wedge dx_3 + a^{14}dx_1\wedge dx_4\\ + a^{23}dx_2\wedge dx_3 + a^{24}dx_2\wedge dx_4\\ + a^{34}dx_3\wedge dx_4\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen bir $2-$formun kendine dual veya tersine dual olması için sırasıyla

$$a^{12}=a^{34}, a^{14}=a^{23}, a^{13}=-a^{24}$$

veya

$$a^{12}=-a^{34}, a^{14}=-a^{23}, a^{13}=a^{24}$$

eşitliklerinin sağlanması gerektiği önceki alt bölümde görülmüştü. Bu durumda $\mathbb{R}^4$'de verilen bir kendine dual ya da tersine dual $2-$ form da ya kuvvetli bir $2-$ kalibrasyondur ya da bir sabit katıdır.

Acaba bu durum üst boyutlarda da geçerliliğini devam ettirmekte midir? Daha önce de vurgulandığı üzere
$n>4$ için $\mathbb{R}^m$'deki bir $2-$ formun Hodge anlamında kendine dualliğinden bahsetmek anlamsızdır. Ama genel durumda $\mathbb{R}^m$'de verilen bir $2-$form için tanımlanan kuvvetli kendine dual ve kuvvetli tersine dual kavramlarıyla kuvvetli $2-$kalibrasyonlar arasında benzer bir ilişkiyi sorgulamak anlamlı olacaktır.

2.2.2 $\mathbb{R}^{2n}$'deki kuvvetli $2-$kalibrasyonlar

φ, $\mathbb{R}^{2n}$ bir 2-form olsun. φ'nin kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için hangi koşulları sağlaması gerektiği $\mathbb{R}^4$'teki argümana benzer bir yol izlenerek aşağıdaki gibi görülebilir.

Teorem 2.4 φ, $\mathbb{R}^{2n}$'de bir $2-$form ve $\pm i\lambda_k, k=1,2,\dots,n$ bu formun herhangi bir birimdikey tabana göre elde edilen anti-simetrik matrisinin özdeğerleri olsun. φ formunun kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşul

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_n|=1$$

olmasıdır [4].
(Bu teorem, [4] çalışmasında ifade edilmiş lakin kanıtsız verilmiştir. Burada ayrıntılı kanıt verilmektedir.)
Kanıt $\mathbb{R}^{2n}$'de bir φ 2-formu

$$\varphi=\sum_{1\le i<j\le 2n} a^{ij}\,dx_i\wedge dx_j$$

şeklinde verilmiş olsun. Standart tabana göre matrisine A diyelim.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{12} & a^{13} & \cdots & a^{12n} \\ -a^{12} & 0 & a^{23} & \cdots & a^{22n} \\ -a^{13} & -a^{23} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a^{2n-12n} \\ -a^{12n} & -a^{22n} & \cdots & -a^{2n-12n} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklindedir. φ'yi belirleyen A matrisinin özdeğerleri $k=1,2,\dots,n$ için $\pm i\lambda_k$ şeklindedir. Bu durumda A matrisinin

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

şeklinde ifade edilebileceği bir $\{f_1,f_2,\dots,f_{2n}\}$ birimdikey tabanının varlığı bilinmektedir. $\{dy_1,dy_2,\dots,dy_{2n}\}$, $\{f_1,f_2,\dots,f_{2n}\}$ tabanının dual tabanını göstermek üzere $\{f_1,f_2,\dots,f_{2n}\}$ tabanına göre

$$\varphi=\lambda_1dy_1\wedge dy_2+\lambda_2dy_3\wedge dy_4+\cdots+\lambda_ndy_{2n-1}\wedge dy_{2n}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi φ'nin $\lambda_k(k=1,2,\dots,n)$ değerlerine göre kuvvetli $2-$kalibrasyon koşullarını sağlayıp sağlamadığını $\mathbb{R}^4$'deki durumda olduğu gibi inceleyelim.

$$x=\sum_{k=1}^{2n}x_kf_k=(x_1,x_2,,\dots,x_{2n})$$
$$y=\sum_{k=1}^{2n}y_kf_k=(y_1,y_2,,\dots,y_{2n})$$

ve

$$\|x\| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 = 1$$
$$\|y\| = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2 = 1$$
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{2n}y_{2n} = 0$$

olsun.

- En az bir k için $|\lambda_k| > 1$ olsun. Bu durumda f_{2k-1}, f_{2k} birimdikey vektörleri için

$$\varphi(f_{2k-1}, f_{2k}) = 0 + \cdots + \lambda_k(1.1 - 0.0) + \cdots + 0 = \lambda_k > 1$$

olduğundan φ bir kalibrasyon olamaz. Yani $|\lambda_k|$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ değerlerinden herhangi biri 1'den büyük olamaz.

- Her k için $|\lambda_k| < 1$ olsun. $\max\limits_{k=1,2\ldots,n}\{\lambda_k\} = \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y)\\
&= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_n(x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1})\\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, ,\ldots, \lambda_nx_{2n-1}, -\lambda_nx_n), (y_2, y_1, \ldots, y_{2n}, y_{2n-1})\rangle\\
&= \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_n^2(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2}\\
&\le \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2}\\
&< 1
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\varphi(x,y) = 1$ eşitliğini sağlayacak hiçbir birimdikey vektör çifti yoktur. Yani kalibrasyon olmanın ikinci koşulu sağlanmaz.

- $k = 1,2,\ldots,p$ için $|\lambda_k| < 1$ ve $k = p+1, p+2, \ldots, n$ için $|\lambda_k| = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y)\\
&= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_p(x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1})\\
&\quad +(x_{2p+1}y_{2p+2} - x_{2p+2}y_{2p+1}) + \cdots + (x_{2n}y_{2n-1} - x_{2n-1}y_{2n})\\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, \ldots, \lambda_px_{2p-1}, -\lambda_px_{2p}, x_{2p+1}, -x_{2p+2}, \ldots, x_{2n-1}, -x_{2n}),\\
&\quad (y_2, y_1, \ldots, y_{2n}, y_{2n-1})\rangle\\
&\le \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_p^2\left(x_{2p-1}^2 + x_{2p}^2\right) + x_{2p+1}^2 + \cdots + x_{2n}^2}\\
&\quad \cdot\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2}\\
&\le 1
\end{aligned}$$

olur. Ancak kalibrasyon olmanın ikinci koşulu gereği f_1 vektörüne karşılık öyle bir $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ vektörü var olmalı ki bu vektörler birimdikey ve $\varphi(x,y) = 1$ olsun. Ama bu mümkün değildir. Çünkü bu vektörler için $\|y\| = 1$ olduğundan

$$\varphi((1,0,\ldots,0), y) \le |\lambda_1|\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2} < 1$$

şeklindedir.

- Her k için $|\lambda_k| = 1$ olsun. $\forall k$ için $\lambda_k^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y)\\
&= \lambda_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + \lambda_n(x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1})\\
&= \langle(\lambda_1x_1, -\lambda_1x_2, \ldots, \lambda_nx_{2n-1}, -\lambda_nx_n), (y_2, y_1, \ldots, y_{2n}, y_{2n-1})\rangle\\
&\le \sqrt{\lambda_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + \lambda_n^2(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2}\\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{2n}^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi kalibrasyon olmanın ikinci şartını kontrol edelim.

$k = 1,2,\ldots,p$ için $\lambda_k = 1$ ve $k = p+1, p+2, \ldots, n$ için $\lambda_k = -1$ olsun.

$x = (x_1, x_2, ,\ldots, x_{2n})$ ve

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_4 - x_4y_3)\\
&\quad + \cdots + \left(x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1}\right)\\
&\quad -\left(x_{2p+1}y_{2p+2} - x_{2p+2}y_{2p+1}\right)\\
&\quad - \cdots - (x_{2n}y_{2n-1} - x_{2n-1}y_{2n})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&y\\
&= (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2p}, x_{2p-1}, x_{2p+2}, -x_{2p+1}, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1})
\end{aligned}$$

şeklinde alırsak $\|y\| = 1$ ve $\langle x, y\rangle = 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= x_1x_1 - x_2(-x_2) + x_3x_3 - x_4(-x_4)\\
&\quad + \cdots + x_{2p-1}x_{2p-1} - x_{2p}\left(-x_{2p}\right)\\
&\quad + \cdots - x_{2n-1}(-x_{2n-1}) + x_{2n}x_{2n}\\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2\\
&= 1
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Yani bu durumda kuvvetli kalibrasyon olmanın ikinci koşulu da sağlanmış olur.

O halde $k = 1,2,\ldots,n$ için $|\lambda_k| = 1$ durumunda φ bir kuvvetli kalibrasyondur.

Örnek 2.6 $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$'de

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

bir kuvvetli 2-kalibrasyondur.

3 Normlu Dualite

Baez'in oktonyonlar üzerindeki çalışmasında trialite kavramı ile bölüm cebri kavramları incelenmiş ve bir vektör uzay üzerinde verilen trialitenin aynı vektör uzay üzerinde bir bölüm cebri belirlediği ve tersine bir bölüm cebrinin de bir trialite belirlediği gösterilmiştir [13]. Normlu bölüm cebirlerine ulaşmak için de normlu trialite kavram kullanılmıştır. Bu normlu trialite kavramından hareketle bir normlu dualite tanımının en doğal ve anlamlı şekilde nasıl verilebileceği, bu tanıma göre bu türden dualitelerin nasıl sınıflandırılabileceği bu bölümde verilmiştir.

V_1, V_2, V_3 birer iç çarpım uzayları olsunlar. Önce dualite, trialite ve normlu trialite tanımlarını verelim.

Tanım 3.1 $b: V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ dejenere olmayan bir bilineer dönüşüme dualite denir.

Tanım 3.2 $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ multilineer dönüşümüne herhangi iki bileşeni sıfırdan farklı seçildiğinde belirlediği dönüşüm sıfırdan farklı ise bir trialite denir.

Tanım 3.3 $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ multilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu trialite denir.

- $\forall(v_1, v_2, v_3) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ için
$$|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\|\|v_2\|\|v_3\|$$
olsun ve
- Herhangi iki bileşen sabitlendiğinde
$$|t(v_1, v_2, v_3)| = \|v_1\|\|v_2\|\|v_3\|$$
olacak şekilde diğer bileşen var olsun.

Bu durumda "normlu dualite" tanımını şu şekilde almak anlamlı durmaktadır (Bu aşamadan sonra amacımıza uygun olarak $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^m$ (üzerindeki standart iç çarpım ile) alacağız).

Tanım (Normlu Dualite) $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.

1. $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için $|b(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$,
2. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ için $\exists v \in \mathbb{R}^m$ öyle ki $|b(u, v)| = \|u\|\|v\|$,
3. $\forall v \in \mathbb{R}^m$ için $\exists u \in \mathbb{R}^m$ öyle ki $|b(u, v)| = \|u\|\|v\|$.

Verdiğimiz bu tanım aşağıdaki tanıma denktir.

Tanım (Normlu Dualite – 1) $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.

1. $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\|u\| = \|v\| = 1$ için $|b(u, v)| \leq 1$.
2. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ öyle ki $|b(u, v)| = 1$.
3. $\forall v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\exists u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| = 1$ öyle ki $|b(u, v)| = 1$.

Şimdi normlu dualite için 2 farklı tanım daha vereceğiz. Bu tartışmanın sonunda normlu dualite tanımını, denk ama en basit şekliyle vermek istiyoruz.

Tanım (Normlu Dualite – 2) $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.

1. $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\|u\| = \|v\| = 1$ için $|b(u, v)| \leq 1$.
2. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ öyle ki $|b(u, v)| = 1$.

Tanım (Normlu Dualite – 3) $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.

1. $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\|u\| = \|v\| = 1$ için $|b(u, v)| \leq 1$.
2. $\forall v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\exists u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\| = 1$ öyle ki $|b(u, v)| = 1$.

Bir b bilineer dönüsümünün birimdikey bir tabana göre matrisini B ile gösterelim. Bu noktada, bir B matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşulun
$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ ve } \|x\| = 1 \text{ için } \|Bx\| = 1$$
olduğunu vurgulayalım. Verdiğimiz üç normlu dualite tanımı da b bilineer dönüşümünün nondejenere olduğunu söyler. Yukarıdaki tanımların denk olduğunu görmeden önce şu notu düşelim:

$\mathbb{R}^m$'nin bir birimdikey $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ tabanı verilsin ve bu tabana göre b bilineer dönüşümünün matrisi B olsun. $u, v \in \mathbb{R}^m$ ve
$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_m e_m$$
$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_m e_m$$
olmak üzere
$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(u_1 e_1 + \cdots + u_m e_m, v_1 e_1 + \cdots + v_m e_m) \\ &= \sum_{i,j} u_i v_j b(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} u_i v_j b_{ij} \\ &= \sum_{i,j} u_i b_{ij} v_j \\ &= u^t B v \end{aligned}$$
şeklinde ifade edilebilir. Bunun yanında, seçtiğimiz taban birimdikey olduğundan $u^t B v = \langle u, Bv \rangle$ eşitliği

sağlanır.

Bu noktadan itibaren, $\mathbb{R}^m$'nin herhangi bir birimdikey tabanında çalıştığımızı kabul edelim.

Önerme 3.1 $b:\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü normlu dualitedir (3. tanıma göre) $\Leftrightarrow$ B bir ortogonal matristir.

Kanıt $\Rightarrow$ b normlu dualite olsun. $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için

$$|b(u,v)| = |u^t Bv| = |\langle u, Bv\rangle|$$

dir. v, $\|v\| = 1$ ve $\|Bv\| \neq 0$ olan herhangi bir vektör olmak üzere $u = \frac{Bv}{\|Bv\|}$ alırsak u birim vektör olur ve

$$\begin{aligned}|b(u,v)| &= |u^t Bv| = |\langle u, Bv\rangle| \\ &= \left|\left\langle \frac{Bv}{\|Bv\|}, Bv\right\rangle\right| = \frac{1}{\|Bv\|}\|Bv\|^2 = \|Bv\|\end{aligned}$$

olur. Normlu dualite olmanın birinci koşulundan da yararlanırsak u ve v birim vektörler olduklarından $|b(u,v)| = \|Bv\| \leq 1$ olmak zorundadır. Yani her v birim vektörü için $\|Bv\| \leq 1$ olur. Ayrıca her v için en az bir u birim vektörü var ki $|b(u,v)| = 1$ dir. Yani

$$1 = |b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\|\|Bv\| = \|Bv\|$$

olduğundan her v birim vektörü için $\|Bv\| \geq 1$ olur. Bu durumda her $v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\|Bv\| = 1$ elde edilmiş olur ki bu da B matrisinin ortogonal olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$ B ortogonal olsun. Yani her $v \in \mathbb{R}^m$ ve $\|v\| = 1$ için $\|Bv\| = 1$ olsun. b bir normlu dualite mi? Öncelikle

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\|\|Bv\| = 1 \cdot 1 = 1$$

olduğundan ilk koşul açık. Bir keyfi v birim vektörü alalım. Bu durumda Bv vektörü de birim vektördür. $u = Bv$ alırsak u birim vektör olur ve

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = |\langle Bv, Bv\rangle| = |\langle v, v\rangle| = 1$$

olarak elde edilir. Yani bu durumda b bir normlu dualitedir.

Şimdi de verdiğimiz önermeyi normlu dualitenin 2. tanımı için kanıtlayalım.

Önerme 3.2 $b:\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü normlu dualitedir (2. tanıma göre) $\Leftrightarrow$ B bir ortogonal matristir.

Kanıt $\Rightarrow$ b normlu dualite olsun. $(u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ için

$$|b(u,v)| = |u^t Bv| = |\langle u, Bv\rangle| = |\langle B^t u, v\rangle|$$

dir. u, $\|u\| = 1$ ve $\|B^t u\| \neq 0$ olan herhangi bir vektör olmak üzere $v = \frac{B^t u}{\|B^t u\|}$ alırsak v birim vektör olur ve

$$\begin{aligned}|b(u,v)| &= |u^t Bv| = |\langle B^t u, v\rangle| \\ &= \left|\left\langle B^t u, \frac{B^t u}{\|B^t u\|}\right\rangle\right| = \frac{1}{\|B^t u\|}\|B^t u\|^2 = \|B^t u\|\end{aligned}$$

olur. Normlu dualite olmanın birinci koşulundan da yararlanırsak u ve v birim vektör olduklarından $|b(u,v)| = \|B^t u\| \leq 1$ olmak zorundadır. Yani her u birim vektörü için $\|B^t u\| \leq 1$ olmalıdır. Ayrıca her u için en az bir v birim vektörü var ki $|b(u,v)| = 1$ idi. Yani

$$\begin{aligned}1 &= |b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = |\langle B^t u, v\rangle| \\ &\leq \|B^t u\|\|v\| = \|B^t u\|\end{aligned}$$

olduğundan her v birim vektörü için $\|B^t u\| \geq 1$ olur. Bu durumda her $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\|B^t u\| = 1$ elde edilmiş olur ki bu da B^t matrisinin ortogonal olduğunu gösterir.

Öte yandan B^t ortogonal olduğundan tersi transpozuna eşittir. Yani

$$(B^t)^{-1} = B^{t^t} \Rightarrow (B^t)^{-1} = B$$

dir. B^t ortogonal olduğundan $(B^t)^{-1}$ de ortogonaldir. Bu durumda $(B^t)^{-1} = B$ olduğundan B'nin ortogonal olduğunu söyleyebiliriz.

$\Leftarrow$ B ortogonal olsun. Yani her $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\|Bu\| = 1$ olsun. b bir normlu dualite mi? Öncelikle

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| \leq \|u\|\|Bv\| = 1 \cdot 1 = 1$$

olduğundan ilk koşul açık. $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ alalım. B ortogonal olduğundan tersi vardır, $v := B^{-1}u$ olsun. B ortogonal olduğundan B^{-1} de ortogonal olacağından $B^{-1}u$ vektörü birim vektördür. Bu durumda $u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $B^{-1}u$ birim vektör olmak üzere

$$|b(u,v)| = |\langle u, Bv\rangle| = |\langle u, BB^{-1}u\rangle| = |\langle u, u\rangle| = 1$$

olarak elde edilir. Yani her u birim vektörü için $v = B^{-1}u$ birim vektörü vardır ki $|b(u,v)| = 1$ olur. Yani 2. koşul da sağlanmış olur.

Açıktır ki normlu dualitenin birinci tanımındaki üç koşul, son iki tanımdaki koşullardan oluştuğundan, b bilineer dönüşümü 1. tanıma göre normlu dualite iken de önerme doğruluğunu koruyacaktır. Yani verdiğimiz önerme normlu dualitenin 1. tanımı için de geçerlidir. Buradan bu üç tanımın denk tanımlar olduğu sonucuna varmış oluruz.

Yolumuza normlu dualitenin 2. tanımını alarak devam edelim. Bundan sonra normlu dualite denilince aşağıdaki tanımı alacağız.

Tanım 3.4 (Normlu Dualite) $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir normlu dualite denir.

1. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\|u\| = \|v\| = 1$ için $|b(u, v)| \leq 1$.
2. $\forall u \in \mathbb{R}^m$ ve $\|u\| = 1$ için $\exists v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$ öyle ki $|b(u, v)| = 1$.

Sonuç 3.3 $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır.

Ortogonal bir matrisin özdeğerlerinin normu $1'$dir. O halde, b bir normlu dualite ise, birimdikey bir tabana göre matrisinin özdeğerlerinin normu da 1 olmalıdır.

b anti-simetrik bilineer dönüşüm olsun. Öncelikle $\mathbb{R}^{2n+1}$'de anti-simetrik ortogonal matris bulunamayacağından $m = 2n$ olmalıdır. b anti-simetrik bilineer bir dönüşüm olduğu için, birimdikey bir tabana göre karşılık getirdiğimiz matrisi anti-simetriktir ve bu nedenle öyle bir $\{f_1, f_2, \dots, f_{2n}\}$ birimdikey tabanı vardır ki bu tabana göre matrisi, $k = 1,2, \dots, n$ için $\pm i\lambda_k$ özdeğerleri göstermek üzere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

şeklindedir. b anti-simetrik bilineer dönüşümü eğer normlu dualite ise B matrisi daha önce gösterildiği üzere ortogonaldir. Bu durumda da $k = 1,2, \dots, n$ için $|\lambda_k| = 1$ olması gerektiği de elde edilmiş olur.

Sonuç 3.4 Özdeğerleri $\pm i\lambda_k$ $(k = 1,2, \dots, n)$ olan bir b anti-simetrik bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul $k = 1,2, \dots, n$ için $|\lambda_k| = 1$ olmasıdır.

4 Kuvvetli Kendine Duallik, Kuvvetli Kalibrasyon ve Normlu Dualite Kavramları Arasındaki İlişki

4.1 Kuvvetli kendine dual 2-formlar ve kuvvetli 2-kalibrasyonlar

$\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ formu verilsin. φ bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ve φ'nin birimdikey bir tabandaki matrisi A olsun. Ayrıca A anti-simetrik matrisinin özdeğerleri $\pm i\lambda_k, k = 1,2, \dots, n$ olsun. Gösterildiği üzere

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n| = 1$$

olmalıdır. Kuvvetli kendine duallik tanımından, tüm özdeğerlerin normları birbirine eşit olduğundan φ kuvvetli kendine veya tersine dual bir $2-$formdur.

Tersine φ bir kuvvetli kendine dual veya kuvvetli tersine dual bir $2-$form ve φ'nin birimdikey bir tabandaki matrisi A olsun. A matrisinin $\pm i\lambda_k, k = 1,2, \dots, n$ özdeğerleri

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_n|$$

koşulunu sağlar. Bu durumda, $\lambda := |\lambda_1|$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda}\varphi$ formunun aynı tabana göre matrisi $\frac{1}{\lambda}A$ matrisidir. $\frac{1}{\lambda}A$ matrisinin özdeğerlerinin normu 1 olacaktır. Yani $\frac{1}{\lambda}\varphi$ formu bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olur. Yani bir kuvvetli kendine dual veya tersine dual 2-formu bir özdeğerinin normuna bölerek her zaman bir kuvvetli 2-kalibrasyon elde etmiş oluruz. Eğer özdeğerlerinin normu 1 olan kuvvetli kendine dual 2-formları baz alırsak, kuvvetli $2-$kalibrasyonlarla kendine dual $2-$formlara aynı objeler gözü ile bakabiliriz.

4.2 Normlu dualite ve kuvvetli 2-kalibrasyonlar

Bölüm 3'de tanımladığımız normlu dualite kavramıyla kuvvetli $2-$kalibrasyonlar arasında bire-bir bir ilişki mevcuttur. Açıktır ki anti-simetrik bir normlu dualite dejenere olmayan bir $2-$form belirler. Bu $2-$formun normlu dualite olması ile kuvvetli $2-$kalibrasyon olması tamamen örtüşür:

Teorem 4.1 $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ anti-simetrik bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul kuvvetli $2-$kalibrasyon olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow$ $b \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu bir normlu dualite olsun. b normlu dualite olduğundan her $u, v \in \mathbb{R}^m$ vektör çifti için $|b(u, v)| \leq 1$ eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda her $u, v \in \mathbb{R}^m$ birimdikey çifti için de $|b(u, v)| \leq 1$ olur. Yani kuvvetli $2-$kalibrasyon olmanın ilk şartı sağlanır. Bir $u \in \mathbb{R}^m$ birim vektörü verilsin. Acaba u vektörüne dik bir $v \in \mathbb{R}^m$ birim vektörü var mı ki $b(u,v)=1$ olsun? Normlu dualite olmanın ikinci koşulu gereği u vektörüne karşılık bir v vektörü vardır ki $b(u,v)=1$ elde edilir. Acaba bu v vektörü u vektörüne dik olmak zorunda mı? Eğer değilse

$$w = v - \langle u,v\rangle u$$

vektörü u vektörüne diktir. $b(u,v)=1$ olduğundan da $b(u,w)=1$ elde edilir. Ayrıca w vektörünün normu

$$\|w\| = \sqrt{1-\langle u,v\rangle^2} < 1$$

dir. Bu durumda

$$b\left(u,\frac{w}{\|w\|}\right) = \frac{1}{\|w\|} b(u,w) = \frac{1}{\|w\|} > 1$$

elde edilir. Ama b normlu dualite olduğundan

$$b\left(u,\frac{w}{\|w\|}\right) \le \|u\| \left\|\frac{w}{\|w\|}\right\| = 1$$

olması gerekirdi. Yani çelişkiye ulaştık. O halde $b(u,v)=1$ koşulunu sağlayan v vektörü u vektörüne dik olmak zorundadır. Sonuç olarak $b \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir normlu dualite ise bir kuvvetli $2-$kalibrasyondur.

$\Leftarrow$ $b \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir kuvvetli kalibrasyon olsun. Acaba b bir normlu dualite midir? Önce ilk koşulu kontrol edelim. Acaba herhangi $u,v \in \mathbb{R}^m$ birim vektörleri için $|b(u,v)| \le 1$ midir? b bir kuvvetli $2-$kalibrasyon olduğundan birimdikey u ve v vektörleri için $|b(u,v)| \le 1$ olur. Yani u ve v vektörleri birbirine dik ise sorun yok. u vektörünü sabitleyip v vektörüne odaklanalım. v vektörü u vektörüne dik değilse, biraz önceki yönteme benzer şekilde

$$w = v - \langle u,v\rangle u$$

vektörü u vektörüne diktir. b kuvvetli $2-$kalibrasyon olduğundan

$$\left|b\left(u,\frac{w}{\|w\|}\right)\right| \le 1$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\frac{1}{\|w\|}|b(u,w)| \le 1 \Rightarrow |b(u,w)| \le \|w\|$$

elde edilir. $b(u,u)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} |b(u,w)| &= |b(u,v-\langle u,v\rangle u)| \\ &= |b(u,v) - \langle u,v\rangle b(u,u)| = |b(u,v)| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $|b(u,v)| \le \|w\|$ ve $\|w\| = \sqrt{1-\langle u,v\rangle^2} < 1$ olduğundan istenilen elde edilmiş olur. Ayrıca normlu dualite olmanın 2. koşulu, kuvvetli kalibrasyon olmanın 2. koşulundan hemen sağlanır. O halde $b \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$ $2-$formu $\mathbb{R}^m$'de bir kuvvetli $2-$kalibrasyon ise bir normlu dualitedir.

Bölüm 3'de gösterdiğimiz üzere, bir b bilineer dönüşümünün normlu dualite olması için gerek ve yeter koşul birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır. Bu durumda kuvvetli $2-$kalibrasyonların farklı bir karakterizasyonunu normlu dualite kavramı yardımıyla elde etmiş olduk.

Sonuç 4.2 $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^*$ formunun kuvvetli $2-$kalibrasyon olması için gerek ve yeter koşul birimdikey bir tabana göre matrisinin ortogonal olmasıdır.

Bu tartışmanın sonunda, var olan kendine duallik kavramı ile tamamen bu kavramdan bağımsız olarak tanımlanan kalibrasyon kavramı arasındaki ilişki, kalibrasyon tanımını ilave bir takım koşullar ile biraz zenginleştirerek ortaya konulmuştur. Yani kuvvetli kalibrasyon dediğimiz, kalibrasyonların önemli bir alt kümesini oluşturan formlar ile özdeğerlerinin normu 1 olan kuvvetli kendine dual formların çakıştığını gördük. Benzer şekilde, normlu dualiteler de, kuvvetli $2-$kalibrasyonla aynı şey demek olduklarından, özdeğer normu 1 olan kuvvetli kendine dual $2-$formlarla örtüşmektedir.

Böylece her biri farklı bir kökene sahip üç ayrı kavramın esas itibariyle örtüştüğünü görmüş oluyoruz. Bu olgu da bu kavramların doğallığına bir işaret olarak değerlendirilebilir.

5 Referanslar

[1] Harvey, R.; Lawson, H.B. Calibrated Geometries. Acta Mathematica. 1982; 148, 47-157.

[2] Bryant, R.L. Metrics with exceptional holonomy. Annals of Mathematics. 1986; 126, 525-576.

[3] Joyce, D.D. Compact Manifolds with special holonomy. Oxford University Press, 2000.

[4] Koçak, Ş.; Özdemir, Y. Strong 2-Calibrations on $\mathbb{R}^{2n}$. Kodai Mathematical Journal. 2011; 34, 31-41.

[5] Trautman, A. Solution of the Maxwell and Young-Mills equations associated with Hopf fiberings. International Journal of Theoretical Physics. 1977; 16, 561-565.

[6] Grossmann, B.; Kephart, T.W.; Stasheff, J.D. Solutions to Young-Mills field equations in eight dimensions and the last Hopf map. Communications in Mathematical Physics. 1984; 96, 431-437.

[7] Corrigan E.; Devchand C.; Fairlie D.; Nuyts J. First order equations for gauge fields in spaces of dimensions greater than four. Nuclear Physics B. 1983; 214, 452-464.

[8] Bilge, A.H.; Dereli, T.; Koçak, Ş. Self-Dual Young-Mills fields in eight dimensions. Letters in Mathematical Physics. 1996; 36 (3), 301-309.

[9] Özdemir, F.; Bilge, A.H. Self-duality in dimensions $2n > 4$: equivalence of various definitions and the derivation of the octonionic instanton solution. ARI. 1999; 51 (4), 247-253.

[10] Harvey, R.; Dadok, J.; Morgan, F. Calibrations on $\mathbb{R}^8$. Transaction. AMS. 1988; 307, 1-40.

[11] Dadok, J; Harvey, R. Calibrations on $\mathbb{R}^6$. Duke Mathematical Journal. 1983; 50 (4), 1231-1243.

[12] Harvey, R. Spinors and Calibrations. Academic Press, New York, 1990.

[13] Baez, J.C. The octonions. Bulletin of the American Mathematical Society. 2002; 39, 145-205.