

Makalenin Geliş Tarihi : 06.02.2009
Makalenin Kabul Tarihi : 25.05.2009

ASİMETRİK BİR DİELEKTRİK DİLİM DALGA KILAVUZUNUN ETKİN KIRILMA İNDİSİNİN TEORİK OLARAK HESAPLANMASI

Çiğdem HARMANKUYU¹, Ali ÇETİN²

ÖZET: Bu çalışmada bir asimetrik dilim dalga kılavuzunun etkin kırılma indisini tespit etmek için hem analitik yöntem hem de bir yaklaşım yöntemi olan sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Dalga kılavuzunda diyot lazerin etkin yayılımının sağlanması için etkin indis değeri hesaplanmıştır. Analitik yöntemle elde edilen sonuçla sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların kullanılacak kılavuz türü için geçerliliği karşılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Optik dilim dalga kılavuzu, analitik yöntem, sonlu farklar yöntemi, etkin kırılma indisi, elektromanyetik dalga.

THEORETICAL CALCULATION OF EFFECTIVE REFRACTIVE INDEX OF AN ASYMMETRICAL DIELECTRIC SLAB WAVEGUIDE

ABSTRACT: In this paper, we use both analytical method and finite difference method to determine effective refractive index of an asymmetrical slab waveguide. Effective index value is calculated to efficient propagation of diode laser in slab waveguide. The validity of the obtained values by both of methods are compared for using waveguide type.

KEYWORDS: Optical slab waveguide, analytical method, finite difference method, effective refractive index, electromagnetic wave.

^{1,2} Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, 26480 ESKİŞEHİR

I. GİRİŞ

Tümleşik optik için pratik uygulamalar, çeşitli geometrilere sahip dielektrik dalga kılavuzlarında ışık yayılımının anlaşılması için gereklidir. Kılavuzlanan dalga veya ışınma problemlerinin çözümü için etkin indis yöntemi (EIM), iki boyutlu dalga kılavuzları için Marcatili tarafından geliştirilen Marcatili yöntemi, sonlu farklar (FDM) yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi (FEM) gibi birçok yöntem kullanılmaktadır [1]. Pertürbasyon yöntemi (PM) ve demet yayılım yöntemi (BPM) nümerik sonuç elde etmekte kullanılan yaklaşım yöntemleridir [2-6]. Çalışılan dalga boyuna bağlı olarak kılavuzlanan modların sayısı hesaplanır. Bu yöntemlerin kullanıldığı modellemeler kılavuzlama ve mod tutma yetenekleri gibi yapı tasarım çalışmalarının geliştirilmesinde önemli bir rol oynar. Sonlu farklar yayılım yöntemi, simetrik ve asimetrik yapılarda ışığın yayılımının analiz edilmesinde başarıyla kullanılmaktadır.

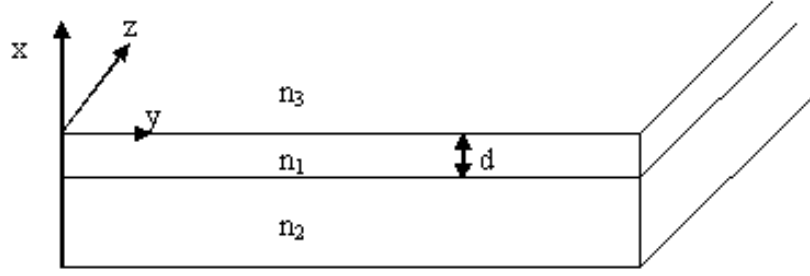
II. ASİMETRİK DİLİM DALGA KILAVUZU

Dalga denkleminin çözümü, dielektrik dilim tekniğine dayanır. Dielektrik dilimler, basitleştirilmiş optik dalga kılavuzudur. Dilim dalga kılavuzlarının özelliklerinin araştırılması daha karmaşık dielektrik dalga kılavuzlarının dalga kılavuzlayıcı özelliklerinin anlaşılması açısından oldukça faydalıdır.

Bir dielektrik dilim dalga kılavuzu şekil 1’de gösterildiği gibidir. Dalga kılavuzu, n_1 kırılma indisli çekirdek bölgesi ve n_2 kırılma indisli bir alt tabakaya sahiptir. n_3 kırılma indisi (çekirdek üzerindeki bölge) hava olabilir. Yapı, n_1 indisli kılavuzlayıcı bölge her iki tarafı,

$$n_1 > n_2 \geq n_3 \quad (1)$$

koşulunu sağlayacak iki dielektrik malzeme ile çevrelenir. Tüm dielektrik dalga kılavuzlarında olduğu gibi, asimetrik dilim de belirli sayıda mod kılavuzlar.



Şekil 1. Bir dielektrik dilim dalga kılavuzu.

Dalgaların iki polarizasyonu mümkün olmasından dolayı iki farklı özdeğer denklemi elde ederiz [7]. Işık, içinde bulunduğu ortamda ilerlerken yayılma doğrultusuna dik, birbirlerine de dik olarak titreşen elektrik ve manyetik alanlara sahip bir elektromanyetik dalgadır. Işık dalgasını oluşturan elektrik alan enine elektrik (TE), manyetik alan ise enine manyetik (TM) dalgası olarak adlandırılır. TE dalgaları olarak ifade ettiğimiz ara yüzeye paralel elektrik vektörlerine sahip dalgalar için özdeğer denklemi,

$$\kappa = (n_1^2 k^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (2)$$

$$\gamma = (\beta^2 - n_2^2 k^2)^{1/2} = [(n_1^2 - n_2^2) k^2 - \kappa^2]^{1/2} \quad (3)$$

$$\delta = (\beta^2 - n_3^2 k^2)^{1/2} = [(n_1^2 - n_3^2) k^2 - \kappa^2]^{1/2} \quad (4)$$

olmak üzere,

$$\arctan(\gamma/\kappa) + \arctan(\delta/\kappa) = \kappa d - N\pi \quad (5)$$

şeklindedir [8]. Yukarıdaki eşitliklerde k , dalganın içinde bulunduğu ortamın yayılım sabiti; β , dalga vektörünün yayılım doğrultusundaki bileşeni; κ , dalga vektörünün enine bileşeni; γ ve δ , zayıflama katsayıları; N ise mod sayısıdır. TE dalgası için özdeğer denklemi yukarıdaki denklemin tanjantı alınarak;

$$\tan\kappa d = \kappa(\gamma + \delta) / (\kappa^2 - \gamma\delta) \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. TM dalgaları için aynı işlemleri tekrarladığımızda,

$$\tan\kappa d = n_1^2 \kappa^2 (n_3^2 \gamma + n_2^2 \delta) / (n_2^2 n_3^2 \kappa^2 - n_1^4 \gamma \delta) \quad (7)$$

özdeğer denklemini elde ederiz [8].

III. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar yöntemi karmaşık dielektrik kesit profillerini de inceleyebilecek şekilde dielektrik ara yüzeylerin geometrisinde herhangi bir sınırlama yapmadan optik dalga kılavuzlarının incelenmesine izin verir. Stern tarafından önerilen yarı vektörel sonlu farklar yöntemi [9, 10] optik dalga kılavuzlarının tasarım problemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Elektrik alan için skaler dalga denklemi,

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlikteki ϵ ve μ sırasıyla alanın içinde hareket ettiği ortamın permitivitesi (elektriksel geçirgenliği) ve permeabilitesidir (manyetik geçirgenliği). Analizimizde, z-doğrultusunda yayılan ve y-yönünde polarize olmuş bir TE modunu düşünersek, alanı

$$E_y(x, y, z) = E_y(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (9)$$

şeklinde kabul edebiliriz [11]. Gerekli işlemler yapılarak,

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} - \beta^2 E_y = -\omega^2 \mu\epsilon E_y \quad (10)$$

bağıntısına ulaşılır. Düşey ve yatay bileşenleri birleştiren toplam yayınım sabiti olarak $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ ifadesini kullanırsak skaler dalga denklemi,

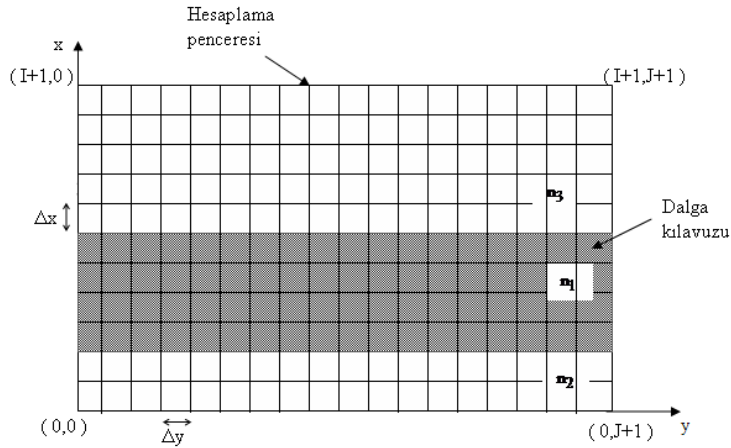
$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + (k^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (11)$$

şekline dönüşür. Ortamdaki yayınım sabiti k , boşluktaki yayınım sabiti k_0 ile tabaka için kırılma indisi n 'in çarpımı olmak üzere skaler dalga denklemini,

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (12)$$

olarak yazabiliriz [12]. Bu denklem, ilgili ortam içindeki β 'nin özdeğerini ve TE alan dağılımını tanımlamak için çözülmesi gereken öz fonksiyondur.

Denklemi çözmek için sonlu farklar yönteminin uygulanmasında E alanı ve n kırılma indisinin, x ve y koordinatlarına göre farklı bir değer olduğu ve dalga kılavuzu kesitini gösteren bir kutu içinde sınırlandırıldığı düşünülür. Kutu şekil 2 de görüldüğü gibi sırasıyla x ve y doğrultularında Δx ve Δy boyutlarında daha küçük dikdörtgen alanlara ayrılır.



Şekil 2. Asimetrik bir dalga kılavuzunda eksenlerin, aralıkların, grid noktalarının sonlu farklar yöntemiyle gösterilmesi.

Burada dalga kılavuzu arakesiti Δx ve Δy yüzey boyutuna karşılık gelen $M \times N$ grid çizgilerine bölünür [13].

Sonlu farklar yöntemi, kolay programlanabilmesi, elde edilen simülasyon sonuçlarının kabul edilebilir olması nedeniyle tercih edilen bir yaklaşımdır. Özdeğer matris denklemleri, sonlu farklar yöntemi kullanılarak türetilir [14]. Elektrik alan ve magnetik alan için bu özdeğer matris denklemleri çözülür.

Skaler dalga denklemi, ikinci dereceden Taylor seri açılımından yararlanılarak lineer matris denklemini sağlayacak şekilde oluşturulabilir [15, 16]:

$$\frac{E_j^{i-1}}{\Delta X^2} + \frac{E_{j-1}^i}{\Delta Y^2} - \left(\frac{2}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta Y^2} - (n_j^i)^2 \right) E_j^i + \frac{E_{j+1}^i}{\Delta Y^2} + \frac{E_j^{i+1}}{\Delta X^2} = n_{\text{eff}}^2 E_j^i \quad (13)$$

Burada $i = 0, 1, 2, \dots, I+1$ ve $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ olmak üzere (i, j) grid noktalarındaki E_j^i normalize olmuş elektrik alan ve n_j^i kırılma indisidir. $\Delta X = k\Delta x$ ve $\Delta Y = k\Delta y$ grid noktaları arasındaki normalize olmuş koordinat basamaklarıdır ve n_{eff} dalga kılavuzu modunun etkin indisidir.

Problemi tamamlamak için sınır koşulları özelleştirilir. Farklı seçenekler olmasının yanında, alanları sınırların dışında sıfır yapmak en basit seçimdir. Bu yaklaşım, doğru alan çözümünün sıfır olduğu, kılavuzlayıcı tabakalardan yeterince uzak olduğumuz yerlerde geçerlidir. Sınır koşulları $E_j^0 = E_j^{I+1} = E_0^i = E_{j+1}^i = 0$ şeklindedir. Sınırlar dışında alanların çözümü yapılmaz.

$i = 1, \dots, I$ ve $j = 1, \dots, J$ için veya $I \times J$ birleştirilmiş bir toplamı için ise tüm denklemleri çözülmelidir.

J indisleri cinsinden sabitleri tanımlarsak, lineer matris denklemi,

$$\frac{E_j^{i-1}}{\Delta X^2} + \left[bE_{j-1}^i + a_j E_j^i + bE_{j+1}^i \right] + \frac{E_j^{i+1}}{\Delta X^2} = n_{\text{eff}}^2 E_j^i \quad (14)$$

şeklinde olur. Burada

$$a_j^i = \left(n_j^i\right)^2 - \frac{2}{\Delta X^2} - \frac{2}{\Delta Y^2}$$

$$b = \frac{1}{\Delta Y^2}$$

şeklindedir. Her x konumu için y’i kapsayan bir vektör tanımlayarak matris notasyonuna y doğrultusunu da sokabiliriz:

$$E^i = \begin{pmatrix} E_1^i \\ \vdots \\ E_j^i \end{pmatrix} \quad (15)$$

Böylece verilen i için tüm j denklemlerini düşey olarak listeleterek x boyunca bir matris fark denklemi içinde devam eden i indislerini aşağıdaki gibi gruplayabiliriz:

$$BE^{i-1} + A^i E^i + BE^{i+1} = n_{\text{eff}}^2 E^i \quad (16)$$

Burada,

$$A^i = \begin{bmatrix} a_1^i & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a_2^i & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a_3^i & b & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b & a_{j-1}^i & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a_j^i \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta X^2} I$$

şeklindedir ve I, J×J’lik birim matristir. İkinci b, $E_0^i = 0$ ve $E_{j+1}^i = 0$ olması nedeniyle A^i matrisinin üst ve alt satırlarında görünmez.

Matris formunda x boyunca tüm I denklemleri yazılarak,

$$\begin{bmatrix} A^1 & B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B & A^2 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A^3 & B & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & B & A^{1-1} & B \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & A^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \\ \vdots \\ E^{1-1} \\ E^1 \end{bmatrix} = n_{\text{eff}}^2 \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \\ \vdots \\ E^{1-1} \\ E^1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

elde edilir. Burada tekrar ikinci B , $E^0 = 0$ ve $E^{1+1} = 0$ olması nedeniyle alt ve üst satırlarda ortaya çıkmaz. Bu denklem,

$$E = \begin{bmatrix} E^1 \\ \vdots \\ E^1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

olmak üzere, aşağıdaki gibi basit şekilde yazılabilir:

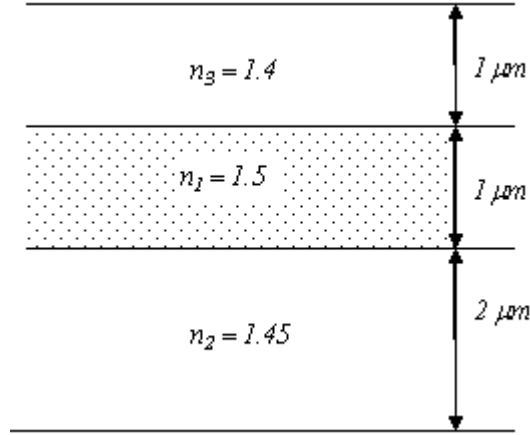
$$AE = n_{\text{eff}}^2 E \quad (19)$$

Bu, n_{eff}^2 özdeğer denklemi ve E özvektörü için çözülen matris denklemdir. Çeşitli matris yöntemleri, özdeğer ve özvektörlerin belirlenmesi için uygundur.

Alan dağılımı, bir dielektrik dilim dalga kılavuzu yapısının bir özmoduna karşılık geldiğinden etkin indisi hesaplanabilir [17]. Etkin indisin tam değeri, alan çözümü yakınsak ise elde edilebilir. Dalga kılavuzunun parçalara ayrılması, sonlu farklar yöntemi ile elde edilen etkin indisi üzerinde temel bir etkiye sahiptir. En yüksek etkin indisli kılavuzlanan modun genliği, yayılım süresince artarak maksimum genliğe ulaşır. Bunun yanı sıra, dalga kılavuzlarında mod özelliklerini belirleyebilmek için yayılım sabiti β elde edilir.

Düzlem dielektrik yapımız, şekil 3 deki gibi kılavuzlayıcı indisi 1,5, alt tabaka indisi 1,45 ve örtü indisi 1.4 olan bir asimetrik dielektrik dilim dalga kılavuzu olsun. Ortam olarak,

kılavuzlayıcı tabakanın kalınlığı $1 \mu\text{m}$ olan bir yapı, ışık kaynağı olarak dalga boyu $0.98 \mu\text{m}$ olan diyot laser kullandığımızı tasarlayalım.



Şekil 3. Bir boyutlu dilim dalga kılavuzu yapısı

Asimetrik bir dielektrik dilim dalga kılavuzu için analitik yöntemden yararlanarak elde edilen Eş.(6)'daki özdeğer denklemini Brent yöntemiyle [18] çözerek bulduğumuz yayınım sabiti değeri,

$$\beta = 94880 \text{ cm}^{-1}$$

ve β yayınım sabiti ile ilişkili olan temel modun etkin değeri $n_{\text{eff}} = \beta/k_0 = \beta\lambda/2\pi$ 'den

$$n_{\text{eff}} = 1.4799$$

olarak bulunur.

Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçları değerlendirmek için grid noktalarını $\Delta X = 0.25 \mu\text{m}$ olacak şekilde seçerek 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 boyutunda özdeğer matrisleri oluşturulur. Bunu yaparken n_1 kırılma indisli, n_2 kırılma indisli ve n_3 kırılma indisli

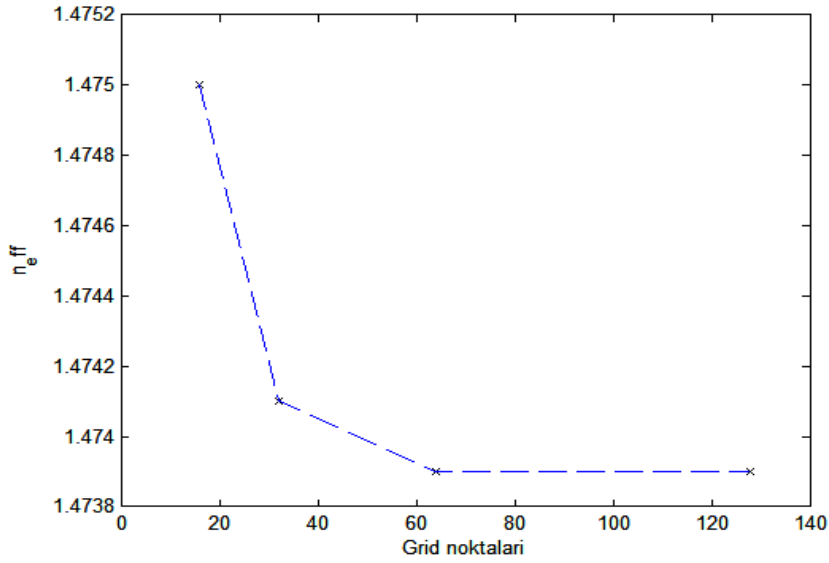
bölgeler eşit aralıklara bölünür. Bu özdeğer denkleminin çözümünden bulunan etkin indis değerleri ise aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 1. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak dilim dalga kılavuzundan elde edilen sonuçlar.

$\Delta x(\mu\text{m})$	Örtü grid noktaları	Kılavuz grid noktaları	Alt tabaka grid noktaları	Matris boyutu	Etkin indis
0.25	4	4	8	16×16	1,4750
0.125	8	8	16	32×32	1,4741
0.0625	16	16	32	64×64	1,4739
0.03125	32	32	64	128×128	1,4739

Bu tabloya göre farklı bölmelere ayrıldığı halde aynı değere yaklaşıldığından uygun etkin kırılma indisinin $n_{\text{eff}} = 1,4739$ olduğu görülmektedir. Etkin kırılma indisinin bu değeri kullanılarak $\beta = 94498 \text{ cm}^{-1}$ elde edilir.

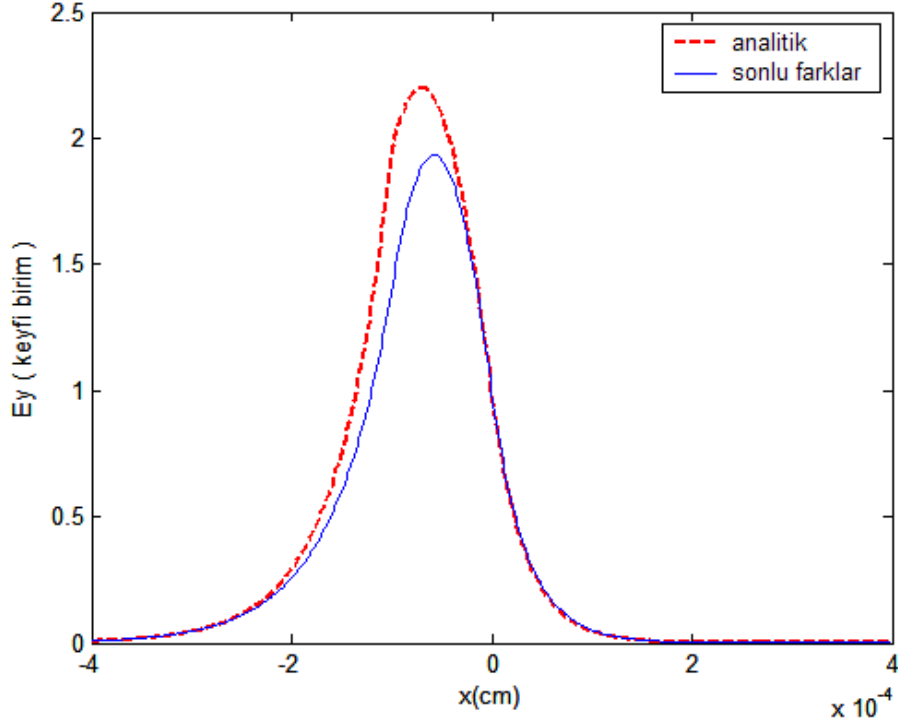
Şekil 4’de etkin kırılma indisinin grid noktalarının sayısına göre değişimi görülmektedir.



Şekil 4. Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen etkin kırılma indis değerlerinin grid noktalarını sayısına bağlı olarak değişimi.

Grid noktalarının sayısı artıkça etkin kırılma indisi kararlı duruma doğru yönelmekte, grid nokta sayısı belirli bir değere ulaştıktan sonra etkin değer sabit kalmaktadır. Sabit etkin indis değeri bizim için uygun kırılma indisi değeri olarak alınabilir.

Şekil 5’de elektrik alan şiddetinin x mesafesine göre değişimi çizilmiştir. Elde edilen eğriler analitik ve sonlu farklar yönteminden bulunan yayılım sabiti değerlerinin alınmasıyla çizilmiştir. Her iki eğrinin de aynı karakterde olduğu fakat farklı genliklere sahip olduğu görülmektedir. Elde edilen eğrilerin yapılan diğer çalışmalarla [19] uyumlu olduğu söylenebilir.



Şekil 5. Analitik yöntem ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak çizilen elektrik alan şiddetleri.

IV. SONUÇ

Tasarlanan ışık kaynağının dalga boyuna bağlı olarak analitik yöntemden bulduğumuz etkin indis değeri ile sonlu farklar yöntemiyle oluşturduğumuz özdeğer matrisinin çözümünden elde ettiğimiz değer birbirine yakındır. Etkin indis değerleri arasındaki fark, % 0,6 gibi küçük bir değerdir. Dalga kılavuzu yapısında ışığın daha verimli hareket edebilmesi için kılavuzlayıcı

ortamın kırılma indisinin seçilen alt tabakanın indisinden büyük olması gerekir. Bu sonucu her iki yöntemden elde edilen sonuçlar sağlamaktadır. Çalışmamızda referans kırılma indisinin değerini alt tabakanın kırılma indisi olarak seçtiğimiz için sonlu farklar yöntemi ile bulduğumuz sonuç da bu referans değerinden büyüktür. Bunlara göre sonlu farklar yöntemi de alternatif bir teknik olarak asimetrik dielektrik dilim dalga kılavuzu yapılarının etkin kırılma indisi hesaplamalarında kullanılabilir.

V. KAYNAKLAR

- [1] T. B. Koch, J. B. Davides, D. Wickramasinghe, “Finite Element/Finite Difference Propagation Algorithm For Integrated Optical Device”, *Electronics Letters*, Vol. 25 No.8., pp. 514-516, 1989.
- [2] C. L. Xu, W.P. Huang, “Finite-Difference Beam Propagation Method For Guide Wave Optics”, *Progress In Electromagnetics Research*, PIER, vol. 11, pp. 1-49, 1995.
- [3] Ahmed A. Abou El-Fadl, “An Optimal Method To Study The Propagation Characteristics Of Rectangular Optical Waveguides”, Fifteen National Radio Science Conference, Feb. 24-26, 1998, Helwan, Cairo, Egypt.
- [4] M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr, “Computation Of Mode Eigenfunctions In Graded Index Optical Fibers By The Propagating Beam Method”, *Applied Optics*, Vol. 19 No.13, pp. 2240-2246, 1980.
- [5] M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr, “Computation Of Mode Properties In Optical Fiber Waveguides By A Propagating Beam Method”, *Applied Optics*, Vol. 19, No.7, pp. 1154-1164, 1980.
- [6] M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr, “Calculation Of Dispersion For Two Optical Fiber Profiles By The Propagating Beam Technique”, *Applied Optics*, Vol. 19, No.7, pp. 326-329, 1980.
- [7] Y. Chung, N. Dağlı, “An Assessment Of Finite Difference Beam Propagation Method”, *IEEE Journal Of Quantum Electronics*, Vol. 26 No. 8, pp. 1335-1338, 1990.
- [8] D. Marcuse, “*Theory Of Dielectric Optical Waveguides*”, Academic Press, Boston, 1991.
- [9] M. S. Stern, “Semivectorial Polarised Finite Difference Method For Optical Waveguides With Arbitrary Index Profiles” . *IEE Proc. J.*, Vol. 135, No. 1, pp. 56-63. 1988.

- [10] M. S. Stern, "Semivectorial Polarised H Field Solutions For Dielectric Waveguides With Arbitrary Index Profiles". *IEE Proc. J.* Vol. 135, No. 5, pp. 333-338, 1988.
- [11] A. S. M. Supa'at, A. B. B. Mohammad, N. M. Kassim, R. Omar, "Analysis Of Mode Fields In Optical Waveguides", *Proceedings Of IEEE, TENCON*, pp. 829-832, 2002.
- [12] M. A. Matin, M. T. Benson, P. C. Kendall, M. S. Stern, "New Technique For Finite Difference Analysis Of Optical Waveguide Problems", *International Journal Of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices And Fields*, Vol. 7, pp. 25-33, 1994.
- [13] N. M. Kassım, A. B. Mohammad, M. H. İbrahim, "Optical Waveguide Modelling Based On Scalar Finite Difference Scheme" *Jurnal Teknologi*, Vol. 42 (D), pp. 41-54, 2005.
- [14] K. Kawano, T. Kitoh, "Introduction To Optical Waveguide Analysis", John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [15] M. Khalaj-Amirhosseini, "Analysis of Lossy Inhomogeneous Planar Layers Using Taylor's Series Expansion", *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, Vol. 54, No. 1, pp. 130-135, 2006.
- [16] Y. Won-Young, C. Wenwu, T. S. Chung, J. Morris, "Applied Numerical Methods Using Matlab", John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
- [17] M. M. Spühler, D. Wiesmann, P. Freuler, M. Diergardt, "Direct Computation Of Higher-Order Propagation Modes Using The Imaginary-Distance Beam Propagation Method", *Optical And Quantum Electronics*, Vol. 31. pp. 751-761, 1999.
- [18] K. Jaan, "Numerical Methods In Engineering With Matlab", Cambridge University Press, England, 2006.
- [19] V. A. Popescu, N. N. Puscas, "Determination Of Normalized Propagation Constants For The Double-Clad Planar Nd:YAG and Yb:YAG Waveguide Lasers", *Journal Of Optoelectronics And Advanced Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 1262-1266, 2006.