



Kütleli Rotorlu İndüksiyon Motorlarında Oluşan Eddy Akımlarının Kollokasyon Yöntemi Kullanılarak Çözümü

Solving Eddy Currents in Solid Rotor Induction Motors through the Collocation Method

Hüseyin Yıldız 

İstanbul Üniversitesi – Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul, TÜRKİYE

Sorumlu Yazar / Corresponding Author *: huseyin.yildiz@iuc.edu.tr

Öz

Elektrikli araç teknolojisinin hayatımıza girmesi ile birlikte farklı türde elektrik motorlarının gelişimi ve verimlilik hesaplamaları araştırmacılar tarafından ilgi görmektedir. Kalıcı mıknatısların üretim maliyetlerinin artması nedeni ile, yüksek hızlı çalışan sistemlerde kullanılmak üzere çeşitli indüksiyon motor tasarımları mevcuttur. Kütleli rotorlu indüksiyon motorları (KRİM) basit yapıları, üretim kolaylığı, yüksek hızda titreşimsiz çalışması gibi nedenlerden dolayı öne çıkan motor türlerindedir. KRİM yapılarının optimizasyon süreçlerinde analitik çözümlerin elde edilebilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada, KRİM tasarımlarında, ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden biri olan kollokasyon yönteminin kullanılabilirliği araştırılmıştır. Çalışmada Maxwell denklemleri farklı mertebede kollokasyon polinomları tarafından modellenerek analitik çözümler ile kıyaslanmıştır. Çalışmada, kollokasyon yönteminin elektromanyetik sistemlerin çözümü için kullanışlı olduğu, 12 ve üzeri kollokasyon noktası kullanılması durumunda kabul edilebilir ($RMSE < 1e^{-5}$) sonuçların elde edilebileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kütleli rotorlu indüksiyon motoru, kollokasyon yöntemi, yaklaşık çözüm, girdap akımları

Abstract

With the integration of electric vehicle technology into our daily lives, researchers have increasingly focused on the development of various electric motor types and efficiency calculations. Given the rising production costs of permanent magnets, researchers have explored alternative induction motor designs suitable for high-speed systems. Solid rotor induction motors (SRIM) stand out due to their simple structures, ease of production, and exceptional vibration-free operation at high speeds. It is crucial to derive analytical solutions for optimizing Solid Rotor Induction Motor (SRIM) structures. This study explores the viability of utilizing the collocation method, a type of weighted residuals approach, for the modeling of SRIM structures. Collocation polynomials of various orders were employed to model the Maxwell equations, and the results were compared with analytical solutions. The findings demonstrate that the collocation method effectively solves electromagnetic systems, and employing 12 or more collocation points yields results within acceptable limits, with an RMSE of less than $1e^{-5}$.

Keywords: Solid rotor induction motor, collocation method, approximate solution, eddy currents.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In the literature, electric motors exhibit diverse structures and characteristics aligned with their application areas. Permanent magnet synchronous motors (PMSM) offer high torque density, reliability, and system efficiency [4]. Induction motors remain one of the most prevalent types today. Solid rotor induction motors (SRIM) are favored in high-speed systems due to their ease of manufacture, high strength, and safety [6]. The literature presents various SRIM designs with differing rotor structures. One of the most common types features axially sliced conductive slots within the rotor body [7]. This axially slitted rotor structure facilitates the reduction of air losses and enhances electromagnetic performance [8]. The most commonly used SRIM type employs solid steel cylinder rotors [9]. Typically, these are constructed from low-carbon ferromagnetic steel, boasting high mechanical strength and heat capacity [10].

Computer-aided analysis of electric motors typically employs two main methods: numerical and analytical approaches [12, 13]. Numerical methods generally involve the creation of a geometric model of the system, followed by computational analysis within a computer environment [14, 15]. Owing to their ease of use and reliability, commercially available finite element analysis (FEA) software packages are often preferred over custom software development. Among these, ANSYS Maxwell, COMSOL, and Finite Element Method Magnetics (FEMM) are widely utilized for electromagnetic system analysis. The versatility in handling diverse geometries and the user-friendly interface contribute significantly to the preference for FEA programs. In essence, the computational domain is discretized into small elements, forming a linear solution mesh. Solving this discretized domain computationally often incurs high computational costs, necessitating high-capacity computers.

Solid rotor induction motor (SRIM) systems typically exhibit homogeneous rotor structures with uniform geometries. This characteristic facilitates analytical solutions for the governing electromagnetic interaction equations under specific assumptions. Several studies exploring these analytical computations exist within the literature [16-19]. Notably, solving the electromagnetic equations in cylindrical geometries commonly relies upon the symmetric solution of the Helmholtz equation. However, solutions obtained under this cylindrical symmetry assumption frequently include complex components of Bessel and Modified Bessel functions. Consequently, the torque and force components translate into highly intricate mathematical formulations. This complexity ultimately hinders the utilization of these equations for optimization and parametric design applications.

Materials and Methods

Solving electromagnetic problems hinges on the solution of Maxwell's equations. This system simplifies for electromagnetic domains comprising linear, isotropic, and permeable conducting materials. Equation 2 expresses the magnitudes of the magnetic field (B) and electric field (E) in terms of the vector potential (A). The rotor is a solid conductor of radius r_1 and is magnetic. The stator is assumed to generate a sinusoidal electric current across the cylinder surface at position r_0 , with infinite magnetic permeability. Equation 2 employs exponential collocation functions. The rotating rotor region and the air gap between the rotor and the stator are considered as two different regions. Optimal collocation coefficients satisfying the boundary conditions in both regions are determined, ultimately yielding the solution.

Results and Discussion

This study investigates whether the collocation method, one of the weighted residual methods, is suitable for the analytical modeling of solid-state-rotor induction motors. Initially, partial differential equations (Equation 8-9) and boundary conditions

(Equation 12-14) that need to be solved by decomposing Maxwell's equations were simplified. For the application of the collocation method, exponential functions (Equation 19) and a polynomial family (Equation 21) that satisfy the boundary conditions were defined. The results of the solutions, consisting of 4, 8, 12, and 16 collocation points, are presented in Figures 2 and 3. It was shown that the errors decreased as the number of collocation points increased, and precise solutions could be obtained when a sufficient number of collocation points were used.

An increase in the number of collocation points not only increases the order of the selected polynomial but also improves the function's behavior. Table 2 compares the magnetic vector potential obtained from the collocation method with the results of the analytical solution. For the solution with 12 collocation points and a slip value of , the corresponding MAE, MSE, and RMSE values are 0.00058, 3.30E-06, and 0.013, respectively. On the other hand, for the solution with 8 collocation points and a slip value of , the MAE, MSE, and RMSE values are found to be 0.00011, 3.16E-08, and 0.00235.

Conclusion

There are some articles available in the literature that investigate the analytical solution of SRIM (Solid Rotor Induction Motor) designs, similar to different electric motors [17-19]. These studies typically involve single or double rotor layers. Few of them included the investigation of stator structures. This situation arises from the challenges encountered in solving the Maxwell equations. There are not enough solutions for more complex problems. It has been demonstrated that the proposed collocation method eliminates the problems encountered in solving the Maxwell equations. When a sufficient number of collocation points are used, approximate solutions that can be easily expressed using exponential or polynomial functions can be obtained.

1. Giriş

Son yıllarda elektrik makinelerinin veriminin artması ile birlikte elektrik motorlarının araç teknolojilerinde kullanımı yaygınlaşmıştır. Elektrikli kara araçları, drone ve elektrikli uçaklar, elektrikli denizaltı ve elektrikli gemi sistemleri günümüzde en çok çalışılan konular arasındadır [1-3].

Elektrik motorları, kullanım alanlarına göre farklı yapı ve özelliklere sahiptir. Kalıcı mıknatıslı senkron motorlar (KMSM) (Permanent Magnet Synchronous Machines PMSM) yüksek tork yoğunluğu, yüksek güvenilirlik ve yüksek sistem verimliliğine sahiptir [4]. Genellikle rotor içerisine farklı dizilimlerde yerleştirilen mıknatıslar kullanılır. Toprakten elde edilen kalıcı mıknatıs tedarikinde yaşanan sorunlar nedeni ile üretim maliyetleri her geçen gün artmaktadır [5].

İndüksiyon motorları günümüzde yaygın olarak kullanılan bir diğer elektrik motoru türüdür. Üretim kolaylığı, yüksek dayanımı ve güvenli olması nedeni ile kütleli rotorlu indüksiyon motorları (KRIM) (Solid Rotor Induction Machine SRIM) yüksek hıza ihtiyaç duyan sistemlerde tercih edilir [6]. Literatürde farklı rotor yapısına sahip KRIM tasarımları mevcuttur. En yaygın olarak kullanılan tiplerinden biri, rotor gövdesinde aksel olarak dilimlenmiş iletken yapılaraya sahip rotordur [7]. Aksel olarak dilimlenmiş rotor yapısı hava kayıplarının azalmasına yardımcı olur ve elektromanyetik performansının artmasını sağlar [8]. En yaygın olarak kullanılan KRIM türü ise yekpare çelik silindirik

rotorlu motorlardır [9]. Genellikle düşük karbonlu ferromanyetik çelikten yapılırlar, mekanik dayanımları ve ısı kapasiteleri yüksektir [10].

Yüksek hızlı uygulamalarda çalışacak elektrik motorlarının yüksek performans, düşük maliyet ve yüksek dayanıma sahip olması için elektromanyetik, mekanik ve termal etkileşimi dikkate alınarak tasarlanmalıdır [7,11].

Elektrik motorlarının bilgisayar destekli analizinde genellikle sayısal ve analitik olmak üzere iki yöntem kullanılır [12-13]. Sayısal yöntemler genel olarak sistemin geometrik modelinin oluşturularak bilgisayar ortamında hesaplamaların yapılmasına dayanır [14,15]. Kullanım kolaylığı ve güvenilir olmaları nedeni ile özgün yazılımlar geliştirmek yerine, genellikle ücretli sonlu elemanlar (SEA)(finite element analysis (FEA)) paket programları tercih edilir. Literatürde elektromanyetik sistemlerin analizi için ANSYS Maxwell, COMSOL ve Finite Element Method Magnetics (FEMM) programları yaygın olarak kullanılan programlardır. SEA programlarında çok çeşitli geometrilerin oluşturulabilmesi ve kullanıcı dostu arayüzü tercih edilme nedenlerinin başında gelir. Temel olarak hesaplama alanı küçük elemanlara bölünerek doğrusal bir çözüm ağı yaratılır. Bu alanın bilgisayar ortamında çözümü genellikle hesaplama maliyetinin yüksek olmasına neden olur ve yüksek kapsaiteli bilgisayarlar gerektirir. Elektromanyetik yapıyı yöneten denklemlerin çözülmesi ile, elde edilen denklemlerin yapısal ve

ısı incelemler için farklı program altyapılarına aktararak yeni çözümler oluşturulmasına ihtiyaç duyulur.

KRİM sistemleri genellikle düzgün geometriye sahip homojen rotor yapılarından oluşur. Bu durum elektromanyetik etkileşimi yöneten denklemlerin belli kabuller altında analitik çözümünün yapılabilmesine olanak tanır. Guo vd. silindirik geometriye sahip bir KRİM geometrisinin devre parametrelerini elde etmek için analitik bir yöntem önermiştir. Çalışmada rotor üzerinde oluşan eddy akımlarını, rotor direnci ve karşılıklı endüktans katsayısını analitik olarak veren formüller türetilmiştir [16]. Papini vd. indüksiyon motorlarında oluşan eddy akımlarını analitik olarak elde etmiş, analitik çözümleri kullanarak girdap akımlardan kaynaklanan sıcaklık değişimini bir boyutlu SEA yöntemini kullanarak modellemiştir [17]. Ergene ve Ertuğrul iki katmanlı rotor yapısına sahip bir KRİM modelini ve stator geometrisini içeren elektromanyetik çözümleri analitik olarak elde etmiş ve SEA programı sonuçları ile kıyaslamıştır [18]. Chen vd. çok fazlı kafes tipi indüksiyon motorlarında, stator üzerinde oluşan manyetik motor kuvvetlerini (MMK) analitik olarak incelemiştir. Rotor geometrisini dört farklı alan olarak ele almış, her bir bölgede oluşan MMK kuvvetlerinin, uzamsal harmonik çözümler olarak elde edilebileceğini göstermiştir [19].

Elektromanyetik denklemlerin silindirik geometride çözümü genellikle Helmholtz denkleminin simetrik çözümüne dayanır [19]. Silindirik simetri kabulü altında elde edilen çözümler genellikle Bessel ve Modifiye Bessel fonksiyonlarının karmaşık bileşenlerini içermektedir. Bu nedenle tork ve kuvvet bileşenleri oldukça karmaşık matematiksel formüllere dönüşmektedir. Bu durum elde edilen denklemlerin optimizasyonu ve parametrik tasarımlarda kullanımını zorlaştırmaktadır.

Çalışmada, kollokasyon yönteminin temel yapısı açıklanmış, KRİM yapıları için kollokasyon yöntemi kullanılarak çözüm elde edilmiştir. Elde edilen çözümler literatürde yer alan analitik formüller ile kıyaslanarak geçerliliği gösterilmiştir. Bir problemde analitik çözüm yapılabiliyor ise genellikle sayısal yöntemler ile çözüm yapılmasına gereksinim duyulmaz. Günümüzde ilgilenilen mühendislik problemlerinin büyük bir çoğunluğunda analitik çözüme ulaşılamaz. Kollokasyon yöntemi, analitik çözümü yapılamayan bu sistemlerin çözümü için hızlı ve kullanışlı bir çözüm yöntemidir. Çalışma, elektromanyetik sistemlerin bilgisayar destekli analizi için kollokasyon yönteminin kullanımını açıklamakta olup, KRİM modelinde yeterli kollokasyon noktası alındığında, analitik çözüme yeterince yakın sonuçlar alınabileceğini göstermiştir.

2. Materyal ve Metot

Doğrusal, izotropik geçirgen ve iletken malzemelerden oluşan elektromanyetik sistemler için Maxwell denklemlerinin diferansiyel formu Eşitlik (1) ile verilmiştir [20].

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J} + \mu \dot{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada, μ ve $\dot{\epsilon}$, ortamın manyetik geçirgenlik sabiti ve dielektrik geçirgenlik sabiti, ρ ve \mathbf{J} ise serbest elektrik yük yoğunluğu ve akım yoğunluğudur. Akım yoğunluğu terimi dışarıdan uygulanan akımları ve elektrik iletkenliğinden oluşan akımları içermektedir. Elektrik ve manyetik alanlar \mathbf{E} ve \mathbf{B} skaler ve vektör potansiyeli ϕ ve \mathbf{A} cinsinden ifade edilebilir [21].

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Böylece Eşitlik (1) otomatik olarak sadeleşir. Elektrik alan ve manyetik alan ifadeleri \mathbf{A} vektörü türünden aşağıda verilmiştir [22].

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A}$$

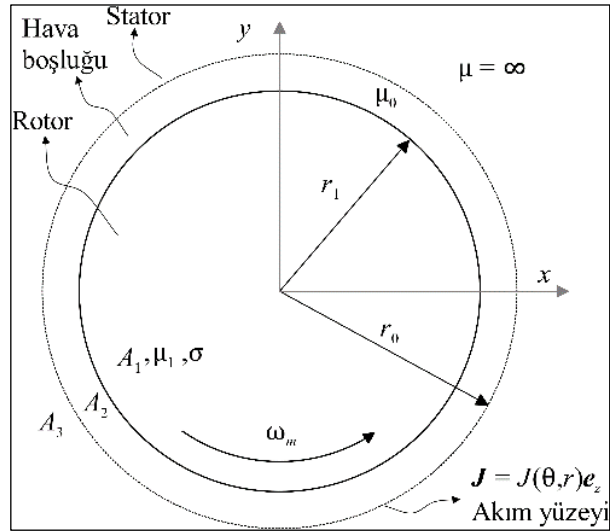
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \dot{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (2)$$

Eşitlik (2) iletken, homojen ve izotropik ortamlar için geçerli olup, sistemin genel elektromanyetik davranışını veren diferansiyel denklemdir.

2.1. Elektrik Model

Birçok çalışmada KRİM için aşağıda verilen basitleştirilmiş model kullanılır (Şekil 1) [16,17]. Rotor, r_1 yarıçapına sahip bir silindirden oluşur. Stator, r_0 ($r_0 > r_1$) yarıçapına sahip olup, manyetik geçirgenliği sonsuz kabul edilir. Akım eksene doğrultuda bir yüzey boyunca akmaktadır. Motor eksene uzunluğu L olarak kabul edilir ve kenarlarda oluşan uç etkileri ihmal edilir ($r_1/L \ll 1$). μ_0 ve μ_1 sırası ile havanın ve rotorun manyetik geçirgenliği, σ rotor malzemesinin elektrik iletkenliğidir.



Şekil 1. Problem geometrisi

Figure 1. Problem geometry

Stator akımının açısal frekansı ω , rotor üzerinde oluşan akımın açısal frekansı $s\omega$ ve $s < 1$ kayma (slip) olarak tanımlanır. Bu durumda mekanik açısal hız (ω_m),

$$\omega_m = \omega_s - \omega_r = (1-s)\omega \quad (3)$$

p kutup sayısı (pole-pairs) olmak üzere yeniden tanımlanır.

$$\omega_m = (1-s) \frac{\omega}{p} \quad (4)$$

İki eş merkezli silindirik koordinat sistemi tanımlanır: (r, θ, z) ve (r, θ', z) . θ sabit ve stator üzerinde (stator frame) yer alan eksene

göre açısal dönmeyi, θ' rotor üzerindedir ve dönen eksen takımına göre dönmeyi temsil eder. Bu durumda,

$$\theta = \theta' + \omega_m t \quad (5)$$

Eşitlik (4) kullanılarak,

$$\omega t - p\theta = s\omega t - p\theta' \quad (6)$$

Akım yoğunluğu (\mathbf{J}), manyetik vektör potansiyeli (\mathbf{A}) ve elektrik alan (\mathbf{E}) yalnızca z doğrultusunda oluşur. Manyetik alan (\mathbf{B}) r ve θ bileşenlerinden oluşur.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= J(\theta, t)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{A} &= A(r, \theta, t)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

Deplasman akımları ihmal edildiğinde, Eşitlik (2) yayılım vektörüne dönüşür.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{rotorda}) \quad (8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Hava boşluğunda})$$

Sabit koordinat eksenine göre;

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9)$$

Stator yüzey akımı kompleks uzayda tanımlanır (Eşitlik 10).

$$\begin{aligned} J &= J_m \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t - p\theta)}\} \\ J_m &= \frac{\sqrt{2}mK_{dp}I_p N}{\pi r_0} \end{aligned} \quad (10)$$

Burada, m faz sayısı, K_{dp} stator sargı faktörü, N bir fazda yer alan sargı sayısı, I faz akımının rms değeridir [16,17]. Eşitlik (9)'ün çözümünde değişkenlerine ayrıştırma yöntemi kullanılır. Bu durumda,

$$A(r, \theta, t) = \operatorname{Re}\{a(r)e^{j(\omega t - p\theta)}\}$$

Dönen rotor eksenini için Eşitlik (6) kullanılır ise,

$$A(r, \theta', t) = \operatorname{Re}\{a(r)e^{j(s\omega t - p\theta')}\}$$

Çözüm iki farklı alan üzerinde ayrıştırılarak elde edilir.

$$0 < r < r_1 \rightarrow A^1(r, \theta, t) = \operatorname{Re}\{a^{(1)}(r)e^{j(\omega t - p\theta)}\}$$

$$r_1 < r < r_0 \rightarrow A^2(r, \theta, t) = \operatorname{Re}\{a^{(2)}(r)e^{j(\omega t - p\theta)}\}$$

Böylece Eşitlik (9) basitleşir.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da^{(1)}}{dr} - \left(\frac{p^2}{r^2} + j\omega\mu\sigma \right) a^{(1)} &= 0 \\ \frac{d^2 a^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da^{(2)}}{dr} - \frac{p^2}{r^2} a^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

2.2. Elektrik model

Eşitlik (11)'in çözümü için dört temel sınır şartına ihtiyaç vardır.

Rotor ve stator ara kesitinde ($r = r_1$) ekstenel doğrultuda elektrik alan ve manyetik alan bileşenleri sürekli olmalıdır.

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{da^{(1)}}{dr} = \frac{1}{\mu_0} \frac{da^{(2)}}{dr} \quad (12)$$

$$a^{(1)} = a^{(2)} \quad (13)$$

Stator akım yüzeyinde manyetik akı yüzey akımlarına eşit olmalıdır.

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{da^{(2)}}{dr} = -J_m \quad (14)$$

Ayrıca, rotor ve stator yapısı silindirik simetri kabulü altında çözüldüğünden rotor iç bölgesinde ($r = 0$) A sonlu olacak şekilde katsayılar seçilmelidir.

2.3. Kollokasyon Yöntemi

Mühendislik alanında karşılaşılan problemlerin analitik çözüme ulaşmak genellikle çok zor veya mümkün değildir. Bu gibi durumlarda genellikle bazı kabuller yapılarak analitik çözümü elde edilebilen problemlere indirgenir. Ancak analitik çözümler genellikle seri çözümlerdir ve karmaşık ifadelerden oluşur. Bazı durumlarda problemi temsil eden yaklaşık çözümler elde edilebilir. Kollokasyon yöntemi çeşitli mühendislik problemlerinin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Kısmi ve adi diferansiyel denklemlerin çözümünde, integro diferansiyel denklemlerin çözümünde ve sayısal verilerin yorumlanmasında kullanılmaktadır [23-25]. Durak çalışmasında adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kollokasyon yönteminin nasıl uygulanacağını açıklamıştır [23]. Araştırmacılar, genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga denklemini farklı kollokasyon yöntemlerini kullanarak sayısal çözmüştür [26,27]. Karakoç vd. kollokasyon temelli sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Sawada-Kotera (S-K) denkleminin sayısal çözümlerini temsil eden bir matematiksel model incelenmiştir [28]. Ak ve Karakoç değiştirilmiş Kawahara denkleminin septik B-spline kollokasyon yöntemi ile sayısal çözümünü elde etmiş, Von-Neumann kararlılık analizi uygulayarak yöntemin koşulsuz olarak kararlı olduğu göstermiştir [29].

Genel formda bir diferansiyel denklem Eşitlik (15) ve Eşitlik (16) formunda tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y(x_i) &= y_i \\ y(L) &= y_n \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L(y) &= f(r) \\ \hat{y}(r) &= v(r) + \sum_1^n u_i(r) \end{aligned} \quad (16)$$

Burada, L ; diferansiyel operatör, $f(r)$; homojenliği bozan terim, y ; diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu, \hat{y} ; yaklaşık çözüm, y_0 ve y_n sınır şartları, y_i ; I noktasında fonksiyonun değeri, v ; problemin sınır şartlarını sağlayan keyfi bir fonksiyon, u_i ; diferansiyel denkleme sağlamak üzere önerilen polinom ailesidir. $R(r_i)$ kalan (residual) olarak tanımlanır ve Eşitlik (17) ile hesaplanır. u_i polinom ailesi keyfi olarak seçildiğinden üstel, trigonometrik veya polinom formunda olabilir. Polinom ailesi ne

olursa olsun kalan $R(r_i)$ önerilen polinom ailesinin katsayılarını içeren bir matris olarak karşımıza çıkar ve çözümü halinde yaklaşık çözüm elde edilir.

$$R(r_i) = f(r_i) - L[\hat{y}(r_i)] = 0 \tag{17}$$

Eşitlik (18) dikkate alındığında, $a^{(1)}$ ve $a^{(2)}$ fonksiyonları için $\hat{a}^{(1)}$ ve $\hat{a}^{(2)}$ olmak üzere iki fonksiyonun yaklaşık çözümü elde edilmelidir.

$$\begin{aligned} \hat{a}^{(1)}(r) &= \hat{v}^{(1)}(r) + \sum_1^n u_i^{(1)}(r) \\ \hat{a}^{(2)}(r) &= \hat{v}^{(2)}(r) + \sum_1^n u_i^{(2)}(r) \end{aligned} \tag{18}$$

$\hat{v}^{(1)}$ ve $\hat{v}^{(2)}$ fonksiyonları sınır şartlarını sağlamak üzere Eşitlik (19)'da verildiği formda seçilir.

$$\begin{aligned} \hat{v}^{(1)}(r) &= a_1 r_1^p + a_2 r_1^{-p} \\ \hat{v}^{(2)}(r) &= b_1 r^p + b_2 r^{-p} \end{aligned} \tag{19}$$

Eşitlik (12-14) ile verilen sınır şartlar dikkate alınır ise $a_2 = 0$ ve Eşitlik (20) elde edilir. Elde edilen denklemlerin çözümü a_1, b_1, b_2 katsayılarını verir.

$$\begin{aligned} a_1 r_1^p - b_1 r_1^p + b_2 r_1^{-p} &= 0 \\ \frac{n}{\mu_1} a_1 r_1^{p-1} - \frac{n}{\mu_0} (b_1 r_1^p - b_2 r_1^{-p-1}) &= 0 \\ \frac{n}{\mu_0} (b_1 r_1^p - b_2 r_1^{-p-1}) &= -J_m \end{aligned} \tag{20}$$

Eşitlik (19) ve Eşitlik (11) göz önüne alındığında $\hat{v}^{(2)}$ 'nin verilen kısmi diferansiyel denklemini sağladığı görülür. Bu durumda yeni bir polinom önermeye gerek kalmaz. Ancak $\hat{v}^{(1)}$ fonksiyonu Eşitlik (11a) ile verilen adi diferansiyel denklemini (ADD) sağlamaz. Bu nedenle ADD nin çözümünü elde etmek üzere $u_i^{(1)}$ çözüm ailesi Eşitlik (21) ile verildiği üzere polinom olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} u^{(i)}(r) &= \sum_{i=1}^n c_i r^{i-1} \\ u_i^{(1)} &= c_i r^{i-1} \end{aligned} \tag{21}$$

Burada n bir tamsayıdır ve çözümün mertebesini ifade etmektedir. $f(r_i) = 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \frac{d^2(r^{i-1})}{dr^2} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n c_i \frac{d(r^{i-1})}{dr} \frac{du^1}{dr} \\ - \left(\frac{p^2}{r^2} + j\omega\mu\sigma \right) \sum_{i=1}^n c_i r^{i-1} = -j\omega\mu\sigma(a_1 r^p) \end{aligned} \tag{22}$$

Eşitlik (22)'nin farklı kollokasyon noktaları için çözümü ile c_i katsayıları elde edilir. Eşitlik (18a) ve elde edilen katsayılar kullanılarak probleme ait yaklaşık çözümler elde edilir.

3. Bulgular ve Tartışma

Tablo 1 ile örnek bir KRİM parametreleri verilmiştir. Eşitlik (20) fiziksel büyüklükler dikkate alınarak çözülür ise $a_1 = -26.9476$,

$b_1 = -13.4918$ ve $b_2 = -154.9153$ elde edilir. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan analitik çözümler ile kıyaslanarak geçerliliği test edilecektir. Analitik çözüm yöntemi ve formülasyonu hakkında daha detaylı bilgi için için [18] ve [19] numaralı referanslar incelenebilir.

Tablo 1. Parametreler.

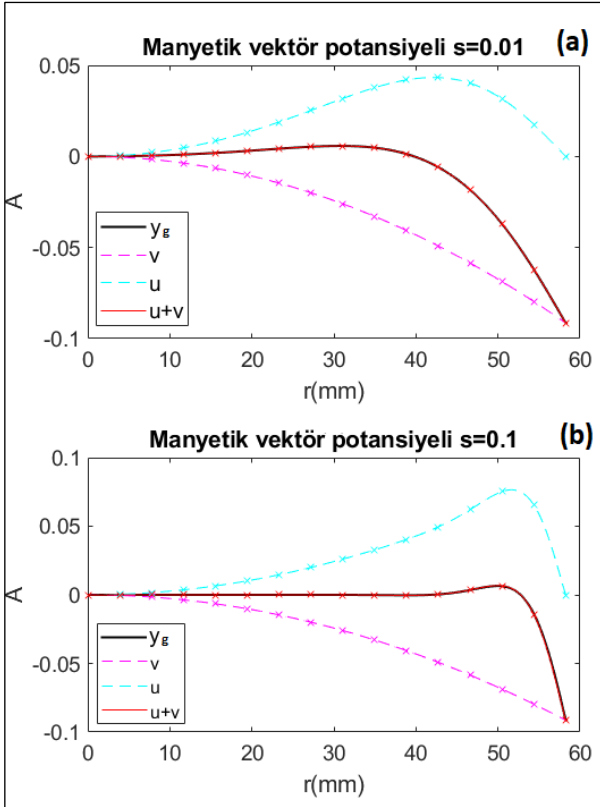
Table 1. Parameters.

Parametre	Değer	Açıklama
m	2	Faz sayısı
K_{dp}	1.0	Sargı faktörü
I_p (A)	8	Faz akımı (rms)
N	100	Seri bağlı sarım sayısı
r_0 (mm)	58.5	Stator iç çapı
r_1 (mm)	58.3	Rotor dış yarıçapı
P	2	Kutup sayısı
μ_0	$4\pi 10^{-7}$	Havanın manyetik geçirgenliği
μ_1	$750 \mu_0$	Rotor manyetik geçirgenliği
σ (S/m)	5.55×10^{-6}	Rotor iletkenlik katsayısı

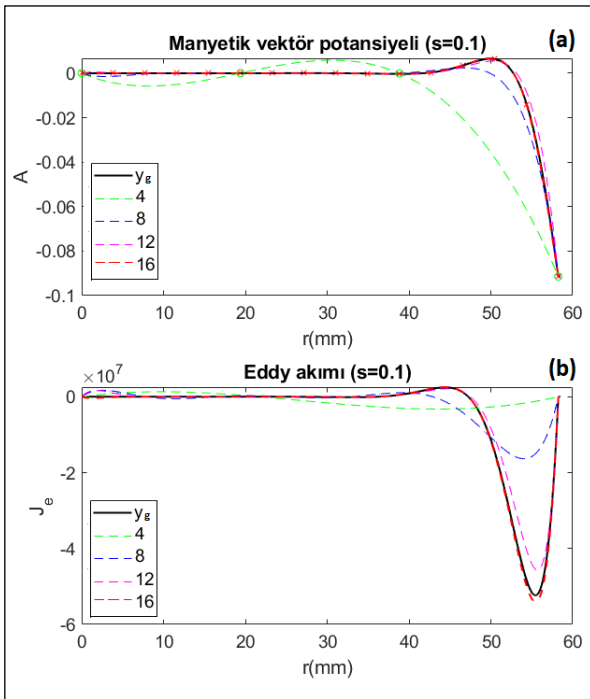
Şekil 2'de $s=0.01$ ve $s=0.1$ kayma değerine sahip KRİM nin 14 kollokasyon noktası için analitik çözüm ve yaklaşık çözüm birlikte verilmiştir. Şekilde görüleceği üzere her iki çözümde de, $v(r)$ fonksiyonu analitik çözüm ile problem sınır şartlarını sağlayacak şekilde uyum sağlamaktadır. $u(r)$ fonksiyonu ise sınırları homojen olarak seçilmiş olup, problemin çözüm alanında fonksiyonu gerçek çözüme yaklaştıracak şekilde değer almaktadır. İki fonksiyonun toplamı ($\hat{y}(r) = v(r) + u(r)$) gerçek fonksiyon değerlerini sağlamaktadır.

Şekil 3a ve Şekil 3b ile $s=0.1$ kayma değeri için farklı kollokasyon noktalarında manyetik vektör potansiyeli A ve eddy akımları J_e 'nin yarıçap doğrultusunda değişimi analitik çözüm ile birlikte gösterilmektedir ($J_e = \sigma E$). Yaklaşık çözümün doğruluğu, kollokasyon nokta sayısı ile doğru orantılıdır. Her iki büyüklük için de kollokasyon nokta sayısı arttıkça yaklaşık çözüm analitik çözüme yaklaşmaktadır. $n > 8$ için hata 10^{-3} 'ten daha küçüktür. $n=12$ için elde edilen yaklaşık çözüm gerçek çözümü çok iyi temsil etmektedir.

Ortalama mutlak hata (Mean Absolute Error MAE), Ortalama kare hata (Mean Square Error MSE) ve Ortalama kare hatanın karekökü (Root Mean Square Error RMSE) iki serinin benzerlik oranını elde etmek ve seri benzerliğinin bir ölçüsü olarak kullanılan en yaygın parametrelerdir [30]. Burada gerçek (analitik) çözüm y_n , yaklaşık çözüm \hat{y}_n ve D örnek sayısı olmak üzere Eşitlik (23-25) ile hesaplanır. $s = 0.1$ ve $s = 0.01$ değerleri için farklı kollokasyon noktalarında hata değerleri hesaplanarak Tablo 2 ile verilmiştir.



Şekil 2. 0.01 ve 0.1 kayma değerleri için kollokasyon örneği
Figure 2. Collocation example for 0.01 and 0.1 slip values



Şekil 3. Farklı kollokasyon nokta sayılarında yakınsama. Farklı kollokasyon noktalarında A (a). Farklı kollokasyon noktalarında J (b).

Figure 3. Convergence at different numbers of collocation points. A at different collocation points (a). J at different collocation points (b).

$$MAE = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^D |y_n - \bar{y}_n| \quad (23)$$

$$MSE = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^D (y_n - \bar{y}_n)^2 \quad (24)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{n=1}^D (y_n - \bar{y}_n)^2} \quad (25)$$

Tablo 2. Vektör potansiyeli için hata analizi tablosu.

Table 2. Error analysis table for vector potential.

s	n	MAE	MSE	$RMSE$
0.1	4	0.00899	0.00027	0.2012
	8	0.00115	7.65E-06	0.0257
	12	0.00058	3.30E-06	0.013
	16	7.24e-05	5.42E-08	0.0016
0.01	4	0.0029	1.76E-05	0.0644
	8	0.00011	3.16E-08	0.00235
	12	4.29e-07	5.80E-13	9.60E-06
	16	5.03e-10	8.38E-19	1.13E-08

Tablo 2’de görüldüğü üzere kayma arttıkça rotor dış çapı üzerinde manyetik etkiler biriktiğinden hata değerleri s ile doğru orantılıdır. 12 ve 16 kollokasyon noktasına sahip çözümlerin hata değerleri oldukça düşüktür.

Şekil 4 ile r ve θ doğrultularında girdap akımlarının $s = 0.01$ ve $s = 0.1$ değerleri için değişimi gösterilmiştir. Görüldüğü üzere kayma değeri büyüdükçe eddy akımlarının derinliği düşmekte ve rotor cidarlarına yığılmaktadır.

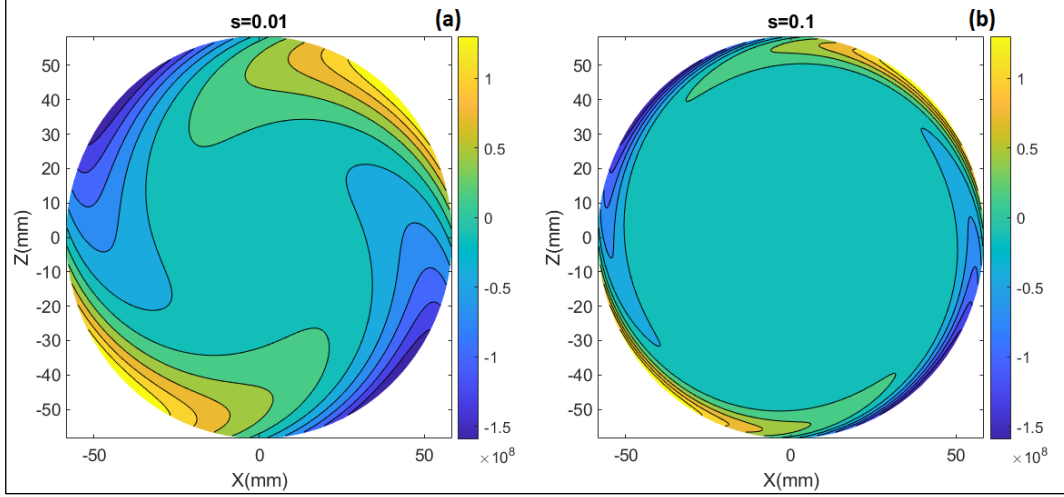
4. Sonuçlar

Bu çalışmada ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden kollokasyon yönteminin, kütleli rotorlu indüksiyon motorlarının analitik modellenmesi için uygun olup olmadığı araştırılmıştır. Öncelikli olarak Maxwell denklemlerinin ayrıştırılarak çözülmesi gereken kısmi diferansiyel denklemler (Eşitlik 8-9) ve sınır şartları (Eşitlik 12-14) elde edilerek sadeleştirilmiştir.

Kollokasyon yönteminin uygulanması için sınır şartlarını sağlayan üstel fonksiyonlar (Eşitlik 19) ve polinom ailesi (Eşitlik 21) tanımlanmıştır. 4, 8, 12 ve 16 kollokasyon noktasından oluşan çözümlerin sonuçları Şekil 2 ve Şekil 3 ile verilmiştir. Kollokasyon nokta sayısı arttığında hataların düştüğü, yeterli sayıda kollokasyon noktası alınması durumunda hassas çözümlerin elde edilebileceği görülmüştür. Kollokasyon nokta sayısındaki artış seçilen polinomun mertebesini arttırdığı gibi, fonksiyon davranışını da düzeltmektedir. Tablo 2’de kollokasyon yöntemi sonucu elde edilen manyetik vektör potansiyeli ile analitik çözüm sonuçları kıyaslanmıştır. $s = 0.1$ kayma değerinde 12 kollokasyon noktasına sahip çözüme ait MAE, MSE ve RMSE değerleri sırası ile 0.00058, 3.30E-06 ve 0.013’dir. $s = 0.01$ kayma değerinde 8 kollokasyon noktasına sahip çözüme ait MAE, MSE ve RMSE değerleri sırası ile 0.00011, 3.16E-08 ve 0.00235 olarak bulunmuştur. Kayma değeri düştükçe stator akımları ile rotor üzerinde oluşan eddy akımları arasında ki senkronizasyon artar. Bu nedenle kayma büyüdükçe çözüm zorlaşır.

Literatürde farklı elektrik motorlarında olduğu gibi KRİM tasarımlarının analitik çözümünü araştıran makaleler mevcuttur [17-19]. Çalışmalar genellikle bir veya iki rotor katmanını, çok azı ise stator yapısını da içerir. Bu durum Maxwell denklemlerinin çözümünde karşılaşılan zorluklardan kaynaklanmaktadır. Daha karmaşık problemler için çözümler sınırlıdır.

Önerilen kollokasyon yönteminin Maxwell denklemlerinin çözümünde karşılaşılan problemleri ortadan kaldırdığı, yeterli kollokasyon noktası alınır ise kolaylıkla üstel veya polinomal fonksiyonlar ile ifade edilebilecek yaklaşık analitik çözümler bulunabileceğini gösterilmiştir.



Şekil 4. Girdap akımlarının düzlemsel değişimi

Figure 4. Planar variation of eddy currents

Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur.

Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Teşekkür

Makalenin hazırlanması sürecinde maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen Prof. Dr. Erol Uzal'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Kaynaklar

- [1] Guo, Y., Wang, D., Liu, D., Wu, X., & Chen, J. 2011. Magnetic circuit calculation of non-salient pole synchronous generator based on distributed magnetic circuit method. 2011 International Conference on Electrical Machines and Systems, 20-23 August, Beijing, China, 1-6. DOI:10.1109/ICEMS19346.2011
- [2] Chen, H., Zhang, J., Zhao, J., Qu, S. and Zhou, Y. 2021. Analytical Calculations of Magnetic Fields Induced by MMF Spatial Harmonics in Multiphase Cage Rotor Induction Motors, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 57, no. 10, pp. 1-12, DOI:10.1109/TMAG.2021.3103643.
- [3] Wang, D., Wu, X., Chen, J., Guo, Y. and Cheng, S. 2015. A Distributed Magnetic Circuit Approach to Analysis of Multiphase Induction Machines With Nonsinusoidal Supply, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 30, no. 2, pp. 522-532. DOI:10.1109/TEC.2014.2362193.
- [4] Bazzi, A. M. 2013. Electric machines and energy storage technologies in EVs and HEVs for over a century, 2013 International Electric Machines & Drives Conference, 12-15 May, Chicago, IL, USA, pp. 212-219. DOI:10.1109/IEMDC.2013.6556255.
- [5] Alsawalhi, J. Y. and Sudhoff, S. D. 2016. Design Optimization of Asymmetric Salient Permanent Magnet Synchronous Machines, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 31, no. 4, 1315-1324. DOI:10.1109/TEC.2016.2575138.
- [6] McGuinness, D. T., Gulbahce, M. O. and Kocabas, D. A., 2015. Novel rotor design for high-speed solid rotor induction machines, 2015 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 22-25 Oct, Bursa, Türkiye, 579-583, DOI:10.1109/ELECO.2015.7394607.
- [7] Papini, L., Gerada, C., Gerada, D. and Mebarki, A., 2014. High speed solid rotor induction machine: Analysis and performances, 2014 17th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS),

- 22-25 October, Hangzhou, China, 2759-2765. DOI:10.1109/ICEMS.2014.7013968.
- [8] McGuinness, D. T., Gulbahce, M. O. and Kocabas, D. A., 2015. A performance comparison of different rotor types for high-speed induction motors, 2015 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 26-28 Nov, Bursa, Turkey, 584-589. DOI:10.1109/ELECO.2015.7394606.
- [9] Jokinen, T., Hrabovcova, V., & Pyrhonen, J. 2013. Design of rotating electrical machines, John Wiley & Sons.
- [10] Aho, T., Nerg, J. and Pyrhonen, J. 2007. Optimizing the Axial Length of the Slitted Solid Iron Rotor, 2007 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, 23-25 May, Harbin, China, 255-259, DOI:10.1109/ICIEA.2007.4318410.
- [11] Papini, L. and Gerada, C. 2014. Thermal-electromagnetic analysis of solid rotor induction machine, 7th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2014), 8-10 April, Manchester, UK, 1-6. DOI:10.1049/cp.2014.0462.
- [12] Kalra, S. 2023. Rotor Material Selection for High-Speed Double Cage Solid Rotor Induction Motor. Journal of Electrical Engineering & Technology, 1-10.
- [13] Lindh, P., Immonen, P., Di, C., Degano, M., & Pyrhönen, J. 2019. Solid-rotor material selection for squirrel-cage high-speed solid-rotor induction machine. In IECON 2019-45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 14-17 Oct, Lisbon, Portugal, Vol. 1, 1357-1361. IEEE. DOI:10.1109/IECON.2019.8926736
- [14] Abdo, T. M., & Adly, A. A. 2022. The Outer Solid Rotor Induction Motor as an Alternative for Electric Vehicle Traction Applications. In 2022 Joint MMM-Intermag Conference (INTERMAG), 10-14 Jan., New Orleans, LA, USA, (pp. 1-4). IEEE. DOI:10.1109/INTERMAG39746.2022.9827867
- [15] Chen, S., Han, Y., Ma, Z., Chen, G., Xu, S., & Si, J. 2020. Influence Analysis of Structural Parameters on the Performance of 120° Phase Belts Toroidal Winding Solid Rotor Induction Motor. Energies, Vol.13(20), 5387. DOI:10.3390/en13205387
- [16] Guo, S., Zhou, L., & Yang, T. 2012. An analytical method for determining circuit parameter of a solid rotor induction motor. In 2012 15th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), 21-24 October, Sapporo, Japan, (pp. 1-6). IEEE.
- [17] Papini, L., & Gerada, C. 2014. Thermal-electromagnetic analysis of solid rotor induction machine. In 7th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2014), 08-10 April, Manchester, UK, (1-6). IET. DOI:10.1049/cp.2014.0462
- [18] Ergene, Lale T., and Yasemin D. Ertuğrul. 2017. The analytical solution of 2D electromagnetic wave equation for eddy currents in the cylindrical

- solid rotor structures. *Journal of Vibroengineering*, Vol. 19 (5), 3911–3925. DOI:10.21595/jve.2017.18257
- [19] Chen, H., Zhang, J., Zhao, J., Qu, S., & Zhou, Y. 2021. Analytical Calculations of Magnetic Fields Induced by MMF Spatial Harmonics in Multiphase Cage Rotor Induction Motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 57(10), 1-12. DOI:10.1109/TMAG.2021.3103643
- [20] Griffiths, D. J. 1998. *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, 3th ed., ISBN 0-13-805326-X.
- [21] Jackson, J. D. 1962. *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc, New York, Chapter 5, LCCN:62-8774,
- [22] Clayton P. R. 2010. *Inductance Loop and Partial*, John Wiley & Sons, ISBN 978-0-470-46188-4, New Jersey A.B.D., Chapter 3, 2010.
- [23] Durak, B. 2020. Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kollokasyon Yöntemiyle Bulunması, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Cilt 10(4), s. 1136-1143. DOI:10.17714/gumusfenbil.681276
- [24] Karakoc, S. B. G. 2018. Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi İle MKdV Denkleminin Sayısal Çözümleri, Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B - Teorik Bilimler, Cilt 6(2), s. 206-218 . DOI:10.20290/aubtdb.420247
- [25] Aydın, E. S. 2022. Kayısı meyvesinin dondurarak kurutulmasının sayısal olarak incelenmesi için matematiksel bir model, Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi , Cilt 37 (1), s. 347-360 . DOI:10.17341/gazimmfd.791792
- [26] Zeybek, H., and Seydi, B. G. K. Application of the Collocation Method With B-Splines to the GEW Equation, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 46, pp. 71–88, 2017.
- [27] Karakoç, S. B. G., & Zeybek, H. A septic B spline collocation method for solving the generalized equal width wave equation, *Kuwait Journal of Science*, vol. 43, pp. 20–31, 2016.
- [28] Karakoc, S. B. G., Saha, A., & Sucu, D. Y. A collocation algorithm based on septic B-splines and bifurcation of traveling waves for Sawada-Kotera equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 203, 12-27, 2023.
- [29] Ak, T., & Karakoc, S. B. G. A numerical technique based on collocation method for solving modified Kawahara equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 3(1), 67-75, 2018.
- [30] Yıldız, H., Korkmaz Can, N., Ozguney, O. C., & Yagiz, N. 2020. Sliding mode control of a line following robot, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 42(11), 561. DOI:10.1007/s40430-020-02645-3