

## Kapalı Formda Temsil Edilen Cebirsel Düzlem Eğrilerinin İzometrilere ve Simetrilerinin Hesaplanması

Hüsni Anıl Çoban<sup>\*1</sup>, Uğur Gözütok<sup>1</sup>

<sup>\*1</sup> Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Trabzon

(Alınış / Received: 02.07.2023, Kabul / Accepted: 31.08.2023, Online Yayınlanma / Published Online: 31.08.2023)

**Anahtar Kelimeler**  
Cebirsel eğriler,  
İzometrilere,  
Simetriler

**Öz:** Bu çalışmada, kapalı formda temsil edilen cebirsel düzlem eğrilerinin izometrilere ve simetrilerinin hesaplanması için yeni bir algoritma sunulmaktadır. Bu hesaplamalarda kullanılacak metod iki kısımdan oluşmaktadır. Metodun birinci kısmı, problemi, orijini sabitleyen izometrilere indirgerken, diğer kısımda eğrilerin denk olmasını sağlayan izometrilere tespiti yapılmaktadır. Girdi eğrilerinin özdeş olması durumunda metod, kapalı formda temsil edilen bir cebirsel düzlem eğrisinin tüm simetrilerini tespit etmektedir. Metodun etkinliğine kanıt oluşturacak testler yürütülmesi için, oluşturulan algoritma, Maple bilgisayar cebir sistemi kullanılarak implement edilmiştir.

## Computing Isometries and Symmetries of Implicit Plane Algebraic Curves

**Keywords**  
Algebraic curves,  
Isometries,  
Symmetries

**Abstract:** In this study, we present a new algorithm to compute the isometries and symmetries of implicit plane algebraic curves. The method to be used for this computing consists of two parts. The first part of the method reduces the problem to isometries fixing the origin, while the other part determines the isometries between the curves. If the input curves are identical, the method detects all the symmetries of an implicit plane algebraic curve. We have implemented the algorithm in the computer algebra system Maple to run tests providing evidence of the efficiency of the method.

\*Corresponding Author, email: hacoban@ktu.edu.tr

### 1. Giriş

Geometrik nesnelere bazı geometrilerdeki denklikleri ve simetrilerinin tespiti, örüntü tanıma, bilgisayar grafikleri, bilgisayarlı görü ve bilgisayar destekli geometrik tasarım gibi alanlarda temel problemlerin çözümüne olan katkısından dolayı oldukça önem arz etmektedir. Bahsi geçen alanlarda verilen depolanması, karşılaştırılması, eksik verilerin tamamlanması gibi birçok işlem için eğri ile modellenmiş her bir nesnenin şeklini, konumunu ve perspektifini anlamak için bu eğrilerin denklik ve simetrilerinin tespiti, süreci kolaylaştırmaktadır. Bu doğrultuda hazırlanmış, düzlem kapalı eğrileri kullanarak veri aktarımını ve şekil tanımayı kolay, hızlı ve bellek yükünü hafifletici hale getirmeyi amaçlayan [16,17] tez çalışmaları da probleme mühendislik alanında nasıl yaklaşıldığına dair özel örnekler olarak verilebilir.

Günümüzde, özellikle cebirsel eğri ve yüzeylerin denkliklerinin tespiti yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu çalışmalar cebirsel eğrilerin temsillerine göre ikiye ayrılmaktadır. Bunlardan ilki rasyonel bir parametrisasyonla temsil edilen rasyonel eğrilerdir. İkincisi ise kapalı bir polinom denklemi ile temsil edilen kapalı formdaki eğrilerdir. [1,4,9,13] çalışmalarında, rasyonel cebirsel eğrilerin çeşitli boyutlarda ve geometrilerdeki denklik ve simetrilerinin tespiti üzerine yaklaşımlar sunulmaktadır. Rasyonel eğrilere göre daha az çalışılmış olan kapalı formda temsil edilen cebirsel eğriler için geliştirilen yaklaşımlar ise [2,6,7,9] çalışmalarında bulunmaktadır.

Rasyonel yüzeyler için ise [5,11,12] çalışmalarında, oluşturulan yöntemler tartışılırken, kapalı formda temsil edilen yüzeyler için [8,9] çalışmaları haricinde birçok denklik problemi henüz çözülememiştir.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen çalışmalarda olduğu gibi, kapalı formda temsil edilen iki cebirsel düzlem eğrisi arasındaki Öklid anlamında denkliklerin yani izometrilere hesaplanması amaçlanmıştır. İzometrilere, üzerinde tanımlı oldukları uzayların metrik yapılarını koruyan dönüşümlerdir [10]. Eğer iki cebirsel düzlem eğrisi arasında, birini diğerine dönüştüren bir izometri varsa, bu iki eğriye *izometrik* denir. Diğer yandan, bir cebirsel düzlem eğrisini invariant (değişmez) bırakan, birim dönüşümden farklı bir izometri varsa, bu eğriye *simetrik* denir. Kapalı formda temsil edilen cebirsel düzlem eğrilerinin doğrudan izometri ve simetrilerinin tespiti üzerine literatürde yalnızca iki çalışma bulunmaktadır [2,3]. Bu çalışmaların birinde karmaşık temsil, diğerinde ise harmonik polinomlar kullanılarak hesaplamalı bir yöntem oluşturulmuştur. Ancak, hesaplamalı alanlarda, problemin tam çözümünün ortaya konulmasının yanında, verilen metodun basit ve çözüme hızlı bir biçimde ulaşması da çok önemlidir. Bu anlamda, yeni metodların ortaya çıkması ve eski metotlardan daha iyi performans koyabilmesi önem arz etmektedir. Bu çalışmada da oldukça basit ve hızlı bir metod geliştirilmesi hedeflenmektedir.

## 2. Materyal ve Metot

### 2.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, problemin çözümü için gerekli ön bilgiler ve problemin açık ifadesi verilecektir. Aşağıdaki polinom denkleminin çözüm kümesinden meydana gelen bir cebirsel eğriye, kapalı formda temsil edilen  $n$  dereceli bir cebirsel düzlem eğrisi adı verilir:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-j} a_{ij} x^i y^j = 0 \quad (1)$$

Genel olarak,  $x$  ve  $y$  deki toplam  $\leq n$  dereceli tüm terimler bu denklemde görülür. Bu tür cebirsel eğrileri  $C$  sembolü ile göstereceğiz. Başka bir deyişle,  $C$  cebirsel eğrisinin derecesi, eğriyi temsil eden  $f(x, y)$  polinomunun derecesi ile tanımlanır. Bu çalışmada ele alacağımız eğrilerin derecesi, aksi iddia edilmedikçe,  $n \geq 3$  olarak kabul edilecektir. Çünkü  $n = 1$  için  $C$  eğrisi trivial durum olan doğru durumuna indirgenecektir. Yine  $n = 2$  için konik kesitler durumu elde edilir ki konik kesitler literatürde iyi çalışılmış geometrik objelerdir. Ayrıca, çalışma boyunca  $C$  eğrisi üzerinde aşağıdaki varsayımlar kabul edilecektir:

- i.  $C$  eğrisini temsil eden  $f(x, y)$  polinomu indirgenemez bir polinomdur.
- ii.  $C$  eğrisi bir çember ya da doğru değildir.

Yukarıdaki ilk kabulün sebebi, denklik ve simetri tanımlarının temsil polinomuna indirgenmesi için yapılan teknik bir kabuldür. Benzer şekilde ikinci kabulün sebebi ise bu durumların trivial durumlar olmasıdır.

$\mathbf{x} = (x, y)^T$ ,  $Q$  matrisi  $2 \times 2$  tipinde bir ortogonal matris, yani  $QQ^T = I$  ve  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere, düzlemde bir izometri  $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{b}$  şeklinde tanımlanır.  $C_1, C_2$  cebirsel düzlem eğrileri için,  $\mathcal{T}(C_1) = C_2$  olacak şekilde bir  $\mathcal{T}$  izometrisi varsa,  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerine izometrik denir.  $C$  cebirsel düzlem eğrisi için,  $\mathcal{T}(C) = C$  olacak şekilde birim dönüşümden farklı bir  $\mathcal{T}$  izometrisi varsa,  $C$  eğrisine simetrik denir.  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri sırasıyla  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  polinomları ile temsil edilmek üzere, (i) kabulünden dolayı, eğer  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri izometrik ise, bu takdirde bir  $\lambda > 0$  sabiti için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$f(\mathcal{T}(\mathbf{x})) = \lambda g(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Diğer yandan, eğer  $f(x, y)$  polinomu ile temsil edilen  $C$  eğrisi simetrik ise bu takdirde, aşağıdaki eşitlik gerçekleşir:

$$f(\mathcal{T}(\mathbf{x})) = \lambda f(\mathbf{x}) \quad (3)$$

İzometrilere dereceyi korudukları için izometrik  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinin dereceleri aynı olmalıdır. Bu yüzden makalenin geri kalan kısmında  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinin dereceleri aynı  $n \geq 3$  olarak kabul edilecektir.

Diğer yandan, metodun dayandırılacağı en önemli özelliklerden bir tanesi de homojen formlar kavramıdır. Derecesi  $n$  olan keyfi bir  $f(x, y)$  polinomu, homojen polinomların toplamı şeklinde yazılabilir. Bu durum

$$f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + \dots + f_0(x, y) \quad (4)$$

ile ifade edilebilir. Burada,  $0 \leq d \leq n$  olmak üzere,  $f_d(x, y)$  polinomu, derecesi  $d$  olan bir homojen polinomdur. Bu durumu aşağıdaki örneklerle açıklayalım.

**2.1.1. Örnek.**  $f(x, y) = x^7 + x^2y^5 - 2x^6y + 5x^3y^2 - 4x^2y^3 + 3y^5 + x^3 - y^3 + 2y^2 - 6$  polinomu verilsin.  $f$  polinomunun (4) yazılımındaki homojen formları

$$\begin{aligned} f_7(x, y) &= x^7 + x^2y^5 - 2x^6y \\ f_6(x, y) &= 0 \\ f_5(x, y) &= 5x^3y^2 - 4x^2y^3 + 3y^5 \\ f_4(x, y) &= 0 \\ f_3(x, y) &= x^3 - y^3 \\ f_2(x, y) &= 2y^2 \\ f_1(x, y) &= 0 \\ f_0(x, y) &= -6 \end{aligned} \quad (5)$$

şekindedir.

Böylece, bu çalışmaya motivasyon oluşturan problem aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

**Problem:** Sırasıyla, indirgenemez  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  polinom temsilleriyle verilen, çember ve doğrudan farklı, birden çok bileşeni bulunmayan, aynı  $n \geq 3$  derecesine sahip  $C_1$  ve  $C_2$  cebirsel düzlem eğrileri için, bu eğrilerin izometrik olup olmadığını, eğer izometrik iseler aralarındaki olası tüm izometrilere tespit eden bir algoritmanın oluşturulmasıdır.

## 2.2. Metot ve Strateji

Bu kısımda, bir önceki kısımda belirtilen problem için bir metot inşa edilecektir. Metodun basamakları aşağıdaki düzeni takip edecektir:

1. *Problemin indirgenmesi:* Bu basamakta, problem orijini sabitleyen izometrilere indirgenecektir.  $Q$  matrisi  $2 \times 2$  tipinde ortogonal bir matris olmak üzere, orijini sabitleyen bir izometri  $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$  şeklindedir. Bu tipte izometrilere için kolayca görülebilir ki (2) denklemi,  $1 \leq d \leq n$  olmak üzere  $f_d(x, y)$  ve  $g_d(x, y)$  homojen formları için de sağlanır. Yani, eğer  $\mathcal{T}$  orijini sabitleyen bir izometri ise, (2) denklemi kullanılarak, her  $d$  için

$$f_d(\mathcal{T}(\mathbf{x})) = \lambda g_d(\mathbf{x}) \quad (6)$$

yazılır. Bu önemli sonucun getirdiği avantajdan yararlanmak için problemin öncelikle orijini sabitleyen izometrilere indirgenmesi gerekmektedir. Bunun için de sırasıyla birinci girdi eğrisi ile ikinci girdi eğrisinden elde edilen ve  $\mathcal{T}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$  şartını sağlayan  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  gibi iki nokta tespit edilecektir.

2. *İnvariantlar:* Bu basamakta, halihazırda indirgenmiş problem kullanılarak orijini sabitleyen  $\mathcal{T}$  izometrisinin hesaplanması için gerekli denklemler elde edilecektir. Bu noktada geometri de dahil olmak üzere birçok alanda kullanıma sahip bir kavram olan *gradyan* kavramından faydalanılacaktır. Bir  $f(x, y)$  polinomunun gradyanı  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$  şeklinde tanımlanmaktadır. Diğer yandan bu gradyan vektör alanının normunun karesi  $\|\nabla f\|^2 = \nabla f \cdot \nabla f$  şeklinde hesaplanabilir. Kolayca görülebilir ki  $\|\nabla f\|^2$  ifadesi izometrilere etkisi altında değişmezdir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \|\nabla(f(Q\mathbf{x}))\|^2 &= \nabla(f(Q\mathbf{x})) \cdot \nabla(f(Q\mathbf{x})) = Q^T(\nabla f)(Q\mathbf{x}) \cdot Q^T(\nabla f)(Q\mathbf{x}) \\ &= QQ^T(\nabla f)(Q\mathbf{x}) \cdot (\nabla f)(Q\mathbf{x}) = (\nabla f)(Q\mathbf{x}) \cdot (\nabla f)(Q\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(Q\mathbf{x})\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

olduğu görülür. Bu değişmezlik özelliği (6) denkleminde kullanılırsa, her  $d$  için

$$\|\nabla f_d(\mathcal{T}(\mathbf{x}))\|^2 = \lambda^2 \|\nabla g_d(\mathbf{x})\|^2 \quad (8)$$

elde edilir. Diğer yandan, (8) denkleminde yer alan  $\lambda$  parametresini sistemden yok edebilmek için, diğer bir invariant olan *Laplace operatörü* kullanılacaktır. Laplace operatörü bir  $f(x, y)$  polinomu için  $\Delta f(x, y) = f_{xx} + f_{yy}$  şeklinde tanımlanmaktadır. Benzer şekilde Laplace operatörünün de izometrilere altında değişmez olduğu [2] çalışmasında gösterilmiştir. Buna göre

$$\Delta(f_d(\mathcal{T}(\mathbf{x}))) = (\Delta f_d)(\mathcal{T}(\mathbf{x})) \quad (9)$$

elde edilir. Laplace operatörünün bir  $f$  polinomuna art arda  $k$  kere uygulanması işlemini  $\Delta^k f := \Delta \Delta \cdots \Delta f$  ile göstereceğiz. Şimdi  $\Delta^k$  operatörünü (8) denkleminde uygularsak

$$\Delta^k(\|\nabla f_d\|^2)(\mathcal{T}(\mathbf{x})) = \lambda^2 \Delta^k(\|\nabla g_d\|^2)(\mathbf{x}) \quad (10)$$

eşitliği elde edilir. Burada,  $f$  ve  $g$  polinomlarının dereceleri  $n$  olduğundan  $\|\nabla f\|^2$  ve  $\|\nabla g\|^2$  polinomlarının dereceleri  $2n - 1$  dir. O halde,  $k \geq n$  için  $\Delta^k(\|\nabla f_d\|^2) = 0$  ve  $\Delta^k(\|\nabla g_d\|^2) = 0$  dir ancak  $k = n - 1$  için  $\Delta^{n-1}(\|\nabla f_d\|^2)$  ve  $\Delta^{n-1}(\|\nabla g_d\|^2)$  ifadeleri sıfırdan farklı iki sabittir. Bu sabitlerin oranını

$$D := \frac{\Delta^{n-1}(\|\nabla f_d\|^2)}{\Delta^{n-1}(\|\nabla g_d\|^2)} \quad (11)$$

ile ifade edelim. Dolayısıyla (10) denkleminde

$$\lambda^2 = D \quad (12)$$

elde edilir. (11) denkleminde elde edilen  $\lambda$  değeri, (6) ve (8) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f_d^2(\mathcal{T}(\mathbf{x})) - D g_d^2(\mathbf{x}) &= 0 \\ \|\nabla f_d(\mathcal{T}(\mathbf{x}))\|^2 - D \|\nabla g_d(\mathbf{x})\|^2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

denklemlerini oluşturulur. Bu denklemler sisteminin nasıl çözüleceği ise metodun bir sonraki basamağında anlatılacaktır.

3. *Resultant*: Resultant kavramı eliminasyon teorisinin en önemli yapı taşlarından birisidir.  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  gibi iki polinomun  $y$  değişkenine göre resultantı  $Res_y(f, g)$  ile ifade edilir.  $Res_y(f, g)$  ifadesinin değeri,  $f$  ve  $g$  polinomlarının oluşturduğu denklemler sisteminden  $y$  değişkeninin elenmesiyle elde edilen  $x$  değişkenine bağlı başka bir polinomdur, yani  $Res_y(f, g) = h(x)$  şeklindedir. Bu basamakta, öncelikle teknik açıdan eliminasyon teorisine uygun bir yazılım oluşturmak için

$$Q\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \quad (14)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = (u(x, y), v(x, y)) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) \quad (15)$$

gösterimini tercih edeceğiz.  $\mathcal{T}(\mathbf{x})$  yerine  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarının kullanılmasıyla (13) sistemi

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, v, x, y) &:= f_d^2(u, v) - D g_d^2(x, y) = 0 \\ \Phi_2(u, v, x, y) &:= \|\nabla f_d(u, v)\|^2 - D \|\nabla g_d(x, y)\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

halini alır. Öncelikle (16) sisteminden  $v$  parametresini eleyelim ve aşağıdaki notasyonu kullanalım.

$$\eta(u, x, y) := Res_v(\Phi_1, \Phi_2) \quad (17)$$

Bu aşamada metod  $\eta(u, x, y)$  polinomunun  $u - a_{11}x - a_{12}y$  şeklinde bir doğrusal çarpan içerdiği gerçeğiyle sürdürülecektir. Diğer yandan bu doğrusal çarpanın  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  denklemlerinde yerine yazılmasıyla,  $\xi_1(v, x, y) := \Phi_1(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  ve  $\xi_2(v, x, y) := \Phi_2(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  elde edilecektir.  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  polinomlarının en büyük ortak çarpanı olan polinomu  $\mu(v, x, y) := \gcd(\xi_1, \xi_2)$  ile gösterelim. Böylece,  $\mu(v, x, y)$  polinomu  $v - a_{12}x - a_{12}y$  şeklinde bir doğrusal çarpan içerecektir. Bu doğrusal çarpanlardan  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarının izole edilmesiyle, orijini sabitleyen

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \quad (18)$$

izometrisi elde edilmiş olacaktır.

4. *Öteleme*: Metodun bu son basamağında, problemin indirgenmemiş halinde yer alan  $Q\mathbf{x} + \mathbf{b}$  izometrisinin öteleme kısmı olan  $\mathbf{b}$  vektörü saptanacaktır. Hali hazırda önceki basamaklarda elde edilen  $\lambda$  ve  $Q$  değerleri (2) denkleminde yerine yazılarak  $\mathbf{b}$  nin bileşenlerini bilinmeyen olarak kabul eden bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden de  $\mathbf{b}$  vektörünün tüm bileşenlerinin elde edilmesiyle izometri tam olarak hesaplanmış olur.

### 3. Bulgular

#### 3.1. Problemin Orijini Sabitleyen İzometrilere İndirgenmesi

Kısım 2.2. de bahsedildiği gibi, problemi, orijini sabitleyen izometrilere indirebilmek için eğrilerin polinom temsillerinden elde edilen ve  $\mathcal{T}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$  şartını sağlayan  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  gibi iki nokta oluşturacağız.  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  eğrileri, sırasıyla  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  polinomları ile tanımlansın. Kabul edelim ki  $\mathcal{C}_1$  ile  $\mathcal{C}_2$  eğrileri izometrik olsun. Bu durumda  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$  olacak şekilde bir  $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{b}$  izometrisi vardır.

Bir  $f$  polinomunun Hessian'ı, Hessian matrisinin determinantı olarak tanımlanır ve  $H(f)(x, y)$  ile ifade edilir. Gradyan operatörünün özellikleri kullanılarak,  $H(f)(x, y)$  nin de izometrilere altında değişmediği gösterilebilir.  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  polinomları kullanılarak  $H(f)(x, y)$  ve  $H(g)(x, y)$  polinomları oluşturulabilir.  $H(f)(x, y)$  ve  $H(g)(x, y)$  polinomlarının temsil ettiği eğrileri, sırasıyla,  $\mathcal{C}_f$  ve  $\mathcal{C}_g$  ifade edelim. Burada,  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_f\}$  ve  $\{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_g\}$  eğri çiftlerinin kesim kümelerini göz önüne alalım.  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_f\}$  eğri çiftinin kesim noktalarının kümesi  $\mathcal{P} := \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{m_1}$  ve  $\{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_g\}$  eğri çiftinin kesim noktalarının kümesi de  $\mathcal{Q} := \{\mathbf{q}_i\}_{i=1}^{m_2}$  ile ifade edilsin. Bu durumda,  $\mathcal{C}_1$  ile  $\mathcal{C}_2$  eğrileri izometrik olduğundan ve  $H(f)(x, y)$  ve  $H(g)(x, y)$  izometrilere etkilenmediğinden  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_g$  elde edilir. Dolayısıyla  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$  ve  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_g$  olduğundan  $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$  elde edilir. Diğer yandan  $\mathcal{P}$  ve  $\mathcal{Q}$  nokta kümelerinin ağırlık merkezleri (barycenter),  $m_1 = m_2 = m$  olmak üzere,  $\mathbf{p} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i$  ve  $\mathbf{q} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i$  noktaları ile tanımlanır. Sonuç olarak aşağıdaki önerme elde edilir.

**3.1.1. Önerme:**  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  eğrileri  $\mathcal{T}$  ile izometrik olsun. Bu takdirde  $\mathcal{T}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$  dir.

**İspat.**  $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$  olduğundan,  $\mathcal{T}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$  olduğu açıktır. Buradan

$$\mathcal{T}(\mathbf{p}) = Q\mathbf{p} + \mathbf{b} = Q \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i + \mathbf{b} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Q\mathbf{p}_i + \mathbf{b} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Q\mathbf{p}_i + \mathbf{b}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i = \mathbf{q} \quad (19)$$

edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  noktalarının etkili biçimde hesaplanabilmesi için bir hesaplamalı yöntem belirleyeceğiz. Yöntem sadece  $\mathbf{p}$  noktasının hesaplanması için verilecek olup,  $\mathbf{q}$  için de aynı yöntem uygulanabilir.  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_f\}$  sisteminin kesişimini bulmak için, bu eğrileri temsil eden polinomlardan faydalanılacaktır. Eğri çiftinin kesişim noktaları  $f(x, y) = 0$  ve  $H(f)(x, y) = 0$  eşitliklerinin oluşturduğu sistemin çözümüdür ve bu noktalar  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2})$  şeklindedir.  $\varphi_1(x) = \text{Res}_y(f, H(f))$  alınırsa, bu durumda her  $p_{i1}$  değerleri  $\varphi_1(x)$  polinomunun köklerinden bulunabilir. Benzer şekilde  $\varphi_2(y) = \text{Res}_x(f, H(f))$  alınırsa, bu durumda  $p_{i2}$  değerleri  $\varphi_2(y)$  polinomunun köklerinden bulunabilir. Buradan, aşağıdaki önerme gerçeklenir.

**3.1.2. Önerme:**  $\varphi_1(x) := \sum_0^m a_i x^i$  ve  $\varphi_2(y) := \sum_0^m b_i y^i$  olmak üzere

$$\mathbf{p} = \frac{1}{m} \left( -\frac{a_{m-1}}{a_m}, -\frac{b_{m-1}}{b_m} \right) \quad (20)$$

şeklindedir.

**İspat.** Tanım gereği  $\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p_{i1}, p_{i2}) = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{i1}, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{i2} \right)$  şeklinde yazılabilir. Burada  $\sum_{i=1}^m p_{i1}$  ifadesi  $\varphi_1(x)$  polinomunun kökler toplamına denk geldiğinden,  $\sum_{i=1}^m p_{i1} = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$  elde edilir. Benzer şekilde  $\sum_{i=1}^m p_{i2}$  ifadesi de  $\varphi_2(y)$  polinomunun kökler toplamı olduğundan,  $\sum_{i=1}^m p_{i2} = -\frac{b_{m-1}}{b_m}$  elde edilir. ■

Sonuç olarak,  $\{C_1, C_f\}$  ve  $\{C_2, C_g\}$  eğri çiftlerinin kesim noktalarının kümesinin boştan farklı ve sonlu olduğu durumda  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  noktaları aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{m} \left( -\frac{a_{m-1}}{a_m}, -\frac{b_{m-1}}{b_m} \right) \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{m} \left( -\frac{a'_{m-1}}{a'_m}, -\frac{b'_{m-1}}{b'_m} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Burada  $a'_i$  ve  $b'_i$  sayıları  $g(x,y)$  ve  $H(g)(x,y)$  polinomlarının resultantlarından elde edilen tek değişkenli polinomların katsayılarını ifade etmektedir. Yukarıda hesaplanan  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kullanılarak,  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri ötelenğinde, oluşan yeni eğriler için hesaplanan  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  noktaları orijine taşınacaktır. Dolayısıyla, orijinal eğrilerin ötelenmesiyle elde edilen yeni eğriler  $T(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$  ile izometrik olup, problem, orijini sabitleyen izometrilere indirgenmiş olacaktır. Makalenin bu kısmından sonra, ötelenmiş eğrileri aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &:= f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) \\ G(\mathbf{x}) &:= g(\mathbf{x} + \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (22)$$

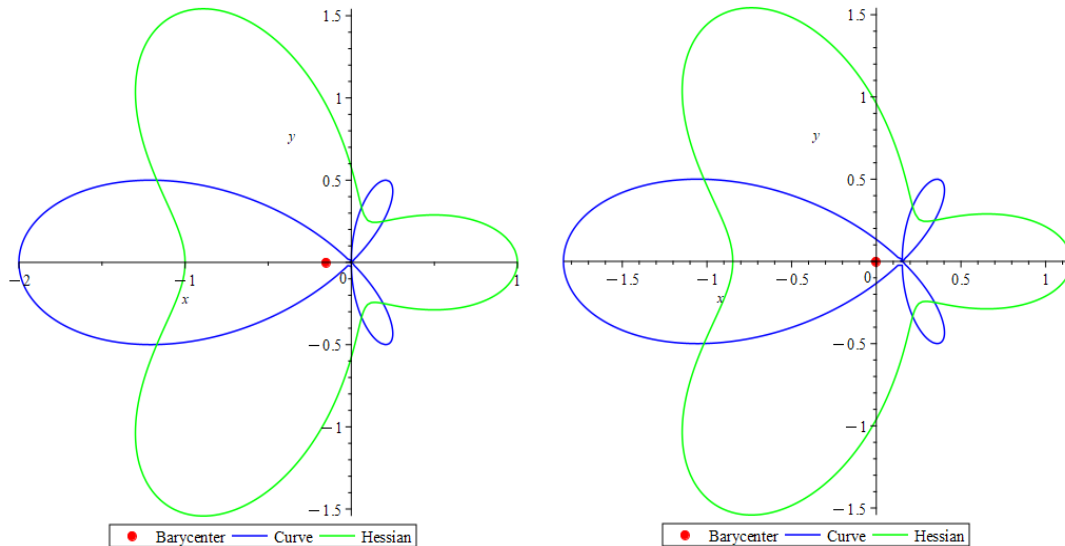
Bu durumu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

**3.1.3. Örnek:**  $f(x,y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x) - 4xy^2 = 0$  kapalı formu ile temsil edilen, Kepler'in Folium eğrisi göz önüne alınsın.  $f$  polinomunun Hessian'ı  $H(f)(x,y) = 48x^4 + 96x^2y^2 + 48y^4 + 192xy^2 - 48x^2 - 16y^2$  şeklindedir. Önerme 3.1.2 den  $\mathbf{p} = (-\frac{11}{72}, 0)$  şeklinde hesaplanır.  $\mathbf{x} + \mathbf{p}$  ötelemesinin  $f$  polinomuna uygulanması  $F(x,y)$  polinomu elde edilir. Aşağıda  $F$  polinomu ve onun Hessian'ı  $H(F)$  verilmiştir.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 26873856x^4 + 53747712x^2y^2 + 26873856y^4 + 37324800x^3 - 70170624xy^2 \\ &\quad - 20870784x^2 + 9465984y^2 + 3380256x - 177023 \\ H(F)(x,y) &= 26873856x^4 + 53747712x^2y^2 + 26873856y^4 - 16422912x^3 + 91072512xy^2 \\ &\quad - 23110272x^2 - 24126336y^2 + 7828128x - 612623 \end{aligned} \quad (23)$$

Gerçekten de  $F$  ve  $H(F)$  için tekrar Önerme 3.1.2 uygulanırsa  $\hat{\mathbf{p}} = (0,0)$  bulunur. Aşağıdaki şekilde, solda  $f$  (mavi),  $H(f)$  (yeşil) ve kesim noktalarının ağırlık merkezi  $\mathbf{p}$  (kırmızı); sağda ise  $F$  (mavi),  $H(F)$  (yeşil) ve kesim noktalarının ağırlık merkezi  $\hat{\mathbf{p}}$  (kırmızı) gösterilmiştir.

**Şekil 1.** Kepler'in Folium'u ve Hessian'ının kesişimi.



### 3.2. Orijini Sabitleyen İzometrilere Hesaplanması

Bu kısımda bir önceki kısımdaki ötelemelerin gerçekleştirildiği ve verilen eğrilerin orijini sabitleyen bir izometri ile izometrik olduğu durumda, eğriler arasındaki izometrilere hesaplanması için etkili bir yöntem geliştirilecektir. Kısım 2.2. deki tartışma aşağıdaki ana sonuçta özetlenebilir.

**3.2.1. Teorem:**  $C_1$  ve  $C_2$ , sırasıyla  $F(x, y) = 0$  ve  $G(x, y) = 0$  kapalı formları ile temsil edilen iki cebirsel düzlem eğrisi olsun. Ayrıca,  $\Phi_1(u, v, x, y)$  ve  $\Phi_2(u, v, x, y)$  polinomları (16) denklemindeki gibi tanımlansın. Eğer  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri  $\mathcal{T}(x) = Qx$  ile izometrik ise, bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

- $\eta(u, x, y) := \text{Res}_v(\Phi_1, \Phi_2)$  polinomu  $u - a_{11}x - a_{12}y$  şeklinde bir doğrusal çarpan içerir.
- $\xi_1(v, x, y) := \Phi_1(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  ve  $\xi_2(v, x, y) := \Phi_2(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  polinomlarının en büyük ortak çarpanı  $\mu(v, x, y) := \text{gcd}(\xi_1, \xi_2)$  olmak üzere,  $\mu(v, x, y)$  polinomu  $v - a_{21}x - a_{22}y$  şeklinde bir doğrusal çarpan içerir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri  $\mathcal{T}(x) = Qx$  ile izometrik olsun. Bu takdirde,  $u(x, y) = a_{11}x + a_{12}y$ ,  $v(x, y) = a_{21}x + a_{22}y$  polinomları (16) denklemi ile verilen ve  $F$  ile  $G$  den üretilen

$$\begin{aligned}\Phi_1(u, v, x, y) &:= F_d^2(u, v) - DG_d^2(x, y) = 0 \\ \Phi_2(u, v, x, y) &:= \|\nabla F_d(u, v)\|^2 - D\|\nabla G_d(x, y)\|^2 = 0\end{aligned}\tag{24}$$

sisteminin çözümüdür. Yani  $u$  ve  $v$ ,  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  polinomlarının ortak köküdür. Resultant tanımından  $\eta(u, x, y) = 0$  dır ancak ve ancak  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  nin ortak kökü vardır. O halde  $u = a_{11}x + a_{12}y$ ,  $\eta(u, x, y)$  nin bir köküdür. Bunun anlamı  $\eta(u, x, y)$  polinomunun  $u - a_{11}x - a_{12}y$  şeklinde bir çarpana sahip olmasıdır. Bu ise teoremin ifadesindeki (i) önermesini kanıtlar.  $u = a_{11}x + a_{12}y$  çözümü  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  polinomlarında yerine yazılırsa  $\xi_1(v, x, y)$  ve  $\xi_2(v, x, y)$  polinomları elde edilir.  $u$  ve  $v$ , sistemin çözümü olduğundan  $v = a_{21}x + a_{22}y$  hem  $\xi_1$  polinomunun, hem de  $\xi_2$  polinomunun kökü olmalıdır. En büyük ortak çarpan tanımından  $v = a_{21}x + a_{22}y$  aynı zamanda  $\mu(v, x, y)$  polinomunu da bir köküdür. O halde,  $\mu(v, x, y)$  polinomu  $v - a_{21}x - a_{22}y$  şeklinde bir çarpan içerir. Bu durum da teoremin ifadesinde yer alan (ii) önermesini kanıtlar ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.1., hesaplama anlamında önemli sonuçlar ortaya çıkarmaktadır.  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri arasındaki izometrilere tespit etmek için, öncelikle  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  polinomları oluşturulur. Ardından, bu iki polinomun  $v$  değişkenine göre resultantı alınıp, sistemden  $v$  değişkeni elenmiş olur ve  $\eta(u, x, y)$  polinomu bulunur. Ana teoreme göre  $\eta(u, x, y)$  polinomu özel bir doğrusal çarpan içermektedir. Bu doğrusal çarpanları bulmak için  $\eta(u, x, y)$  polinomunu çarpanlara ayırmak yeterlidir. Tüm çarpanlar arasından doğrusal olanlar seçilir ve bu seçilen çarpanlardan  $u = a_{11}x + a_{12}y$  doğrudan bulunur. Bulunan  $u = a_{11}x + a_{12}y$  ifadeleri  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  de yerine yazılarak  $\mu(v, x, y)$  polinomu bulunur. Ardından,  $\mu(v, x, y)$  polinomu çarpanlarına ayrılarak, bu çarpanlar arasından yine doğrusal olanlar seçilir. Her bir doğrusal çarpan  $v = a_{21}x + a_{22}y$  çözümü elde edilir. Böylece  $Q$  ortogonal matrisinin tüm bileşenleri, yani  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  elde edilmiş olur. Bulunan tüm değerler, problemin indirgenmesinden önce verilen  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  polinomları ile ilgili  $f(Qx + b) = \lambda g(x)$  eşitliğinde yerine yazılarak, elde edilen denklemden  $b$  vektörünün bileşenleri çözümlenerek olası tüm  $\mathcal{T}(x) = Qx + b$  izometrilere hesaplanmış olur. Bu süreç, bir sonraki kısımda bir algoritmaya dönüştürülmüştür.

### 3.3. Algoritma

Önceki kısımlarda elde edilen sonuçlar ışığında aşağıdaki ImplSo2D isimli algoritma (bkz. **Algoritma 1**), verilen iki cebirsel düzlem eğrisi arasındaki tüm izometrilere tespit etmektedir.

**Algoritma 1.** Implso2D

**Input:** Sırasıyla  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  kapalı formları ile tanımlı, birden çok bileşene sahip olmayan, çember ve doğrudan farklı iki  $C_1, C_2$  cebirsel düzlem eğrisi.

**Output:**  $C_1, C_2$  arasındaki izometrilere ya da “Eğriler izometrik değildir” uyarısı.

**Procedure: Implso2D(f,g)**

1.  $p$  ve  $q$  ağırlık merkezlerini hesapla.
2. Eğer  $p$  ve  $q$  noktaları hesaplanamıyorsa “FAIL”.
3.  $L := \emptyset$  ve  $M := \emptyset$  atamalarını yap.
4.  $F := f(x + p)$  ve  $G := f(x + q)$  atamalarını yap
5. (24) sisteminde tanımlanan  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  polinomlarını oluştur.
6.  $\eta(u, x, y) := Res_v(\Phi_1, \Phi_2)$  polinomunu hesapla.
7.  $\eta(u, x, y)$  polinomunu çarpanlara ayırarak  $u - a_{11}x - a_{12}y$  doğrusal çarpanlarını hesapla.
8. Her  $u - a_{11}x - a_{12}y$  doğrusal çarpanı için
9.  $\xi_1(v, x, y) := \Phi_1(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  ve  $\xi_2(v, x, y) := \Phi_2(a_{11}x + a_{12}y, v, x, y)$  polinomlarını ve  $\mu(v, x, y) := \gcd(\xi_1, \xi_2)$  polinomunu hesapla.
10.  $\mu(v, x, y)$  polinomunu çarpanlara ayırarak  $v - a_{21}x - a_{22}y$  doğrusal çarpanlarını hesapla.
11. Her  $v - a_{21}x - a_{22}y$  doğrusal çarpanı için
12.  $F(u, v) = \lambda G(x, y)$  denkleminin sağlandığını kontrol et.
13. Doğrulandığı takdirde  $(u, v)$  çözümünü  $L$  listesine ekle.
14. Eğer  $L \neq \emptyset$  ise
15.  $L$  listesindeki her  $(u, v)$  çözümü için
16.  $f(u + b_1, v + b_2) = \lambda g(x, y)$  denklemini  $b_1$  ve  $b_2$  bilinmeyenleri için çöz.
17.  $[(u, v), \lambda, (b_1, b_2)]$  çözüm kümesini  $M$  listesine ekle.
18. Eğer  $M = \emptyset$  ise “Eğriler izometrik değildir” uyarısını ver aksi halde  $M$  listesini ver.

Algoritmanın çalışma prensibinin anlaşılması için aşağıdaki ayrıntılı örnek sunulmuştur.

**3.3.1. Örnek:** Aşağıdaki polinomlarla temsil edilen Cayley's Sextic eğrilerini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -8x^3 - 12(5x^2 + 9y^2)(x^2 + y^2) - 96x(x^2 + y^2)^2 + 64(x^2 + y^2)^3 \\ g(x, y) &= 568 - 726\sqrt{2}xy^2 + 1782\sqrt{2}x^2y - 242\sqrt{2}x^3 - 432x^3y - 432xy^3 + 828x^2 + 4764y^2 \\ &\quad + 2316y^4 + 396x^4 - 300\sqrt{2}x - 1080xy + 1836\sqrt{2}y + 3186\sqrt{2}y^3 + 2712x^2y^2 \\ &\quad - 48\sqrt{2}x^5 + 432\sqrt{2}y^5 - 48\sqrt{2}xy^4 - 96\sqrt{2}x^3y^2 + 432\sqrt{2}x^4y + 864\sqrt{2}x^2y^3 \\ &\quad + 192x^2y^4 + 64y^6 + 192x^4y^2 + 64x^6 \end{aligned} \quad (25)$$

Burada  $g(x, y)$  ile temsil edilen eğri,  $f(x, y)$  polinomu ile aşağıdaki ortogonal matris ve ötelemeye sahip  $\mathcal{T}(x) = Qx + b$  izometrisi uygulanarak elde edilmiştir:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Bu sayede oluşturulan eğrilerin arasında en az bir izometri olması garanti altına alınmıştır. Algoritma bu eğri çiftine uygulandığında, öncelikle ağırlık merkezleri

$$p = \left(-\frac{2721}{27436}, 0\right), q = \left(-\frac{2721\sqrt{2}}{54872}, -\frac{52151\sqrt{2}}{54872}\right) \quad (27)$$

şeklinde hesaplanmıştır.  $f$  ve  $g$  bu noktalar ile ötelendikten sonra, orijini sabitleyen bir izometri ile izometrik olan  $F$  ve  $G$  polinomları bulunmuştur. Buradan da  $F$  ve  $G$  polinomları için (24) sistemi oluşturulmuş ve böylece

$$\eta(u, x, y) = 2u^2 - x^2 + 2xy - y^2 \quad (28)$$



elde edilmiştir.  $\eta(u, x, y)$  polinomu çarpanlara ayrıldığında,

$$\begin{aligned} L_{1u} &= u + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ L_{2u} &= u - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{aligned} \quad (29)$$

şeklinde iki adet doğrusal çarpan bulunmuştur. Bu doğrusal çarpanların yerine yazılıp,  $\mu(v, x, y)$  polinomunun çarpanlara ayrılmasıyla,  $L_{1u}$  çarpanına karşılık

$$\begin{aligned} L_{1v} &= v - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ L_{2v} &= v + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{aligned} \quad (30)$$

şeklinde iki doğrusal çarpan ve yine  $L_{2u}$  çarpanına karşılık

$$\begin{aligned} L_{3v} &= v - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ L_{4v} &= v + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{aligned} \quad (31)$$

aynı iki doğrusal çarpan elde edilmiştir. Toplam 4 çözüm adayı arasından, eşitlikleri sağlamayan 2 tanesi elendikten sonra,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (32)$$

ortogonal matrisleri elde edilmiştir. Orijinal eğrilere geri dönüp,  $Q_1$  ve  $Q_2$  ye karşılık gelen  $\mathbf{b}_1 = (-1, 1)^T$  ve  $\mathbf{b}_2 = (-1, -1)^T$  ötelemeleri bulunup, sonuçta iki eğri arasında  $f_1(x) = Q_1x + \mathbf{b}_1$  ve  $f_2(x) = Q_2x + \mathbf{b}_2$  izometrilere hesaplanmıştır. Bu örnekteki hesaplamaların tümü 0.125 saniyede tamamlanmıştır.

### 3.4. Testler ve Performans

Bölüm 3.3. te verilen algoritma ImpIso2D, bilgisayar cebir sistemi Maple [14] kullanılarak implement edilmiştir. Implementasyon, 2.4 Ghz Intel Core i5 işlemciye ve 8 GB belleğe sahip bir bilgisayarda test edilmiştir. Bu çalışmada sunulan örnekler ve tüm testler ikinci yazarın kişisel web sayfasında [15] tüm araştırmacılara açık şekilde sunulmuştur. Tüm örnekler ve testlerde, izometrik bir eğri çifti elde edebilmek için,  $f(x, y)$  kapalı formu ile temsil edilen bir  $C_1$  eğrisi alınıp,  $g(x, y)$  polinomu  $C_2$  eğrisini temsil edecek şekilde,  $f(x, y)$  polinomuna Örnek 3.3.1 de verilen izometri uygulanarak bir  $g(x, y)$  polinomu elde edilmiştir.

Testlere **Tablo 1.** de verilen polinomlarla temsil edilen eğrilerin izometrisini tespit ederek başlayalım. Tablonun ilk sütununda eğrinin ismi, ikinci sütununda eğrinin derecesi ve son sütununda da eğrinin kapalı formu verilmiştir. Ayrıca tabloda yer alan eğrilerin çizimleri **Şekil 2.** de verilmiştir. **Tablo 2.** de **Tablo 1.** de verilen eğrilerin izometrilere ve simetrisinin hesaplanması için harcanan süreler saniye cinsinden verilmiştir. **Tablo 2.** de ilk sütunda eğri isimleri, ikinci sütunda eğrilerin ihtiva ettiği izometri/simetri sayıları, üçüncü sütunda izometrisinin hesaplanmasında harcanan süre ve son sütunda da simetrisinin hesaplanmasında harcanan süre bulunmaktadır. Simetrisinin izometrilere göre daha uzun sürede hesaplandığı tablodaki verilerden açıkça görülmektedir.

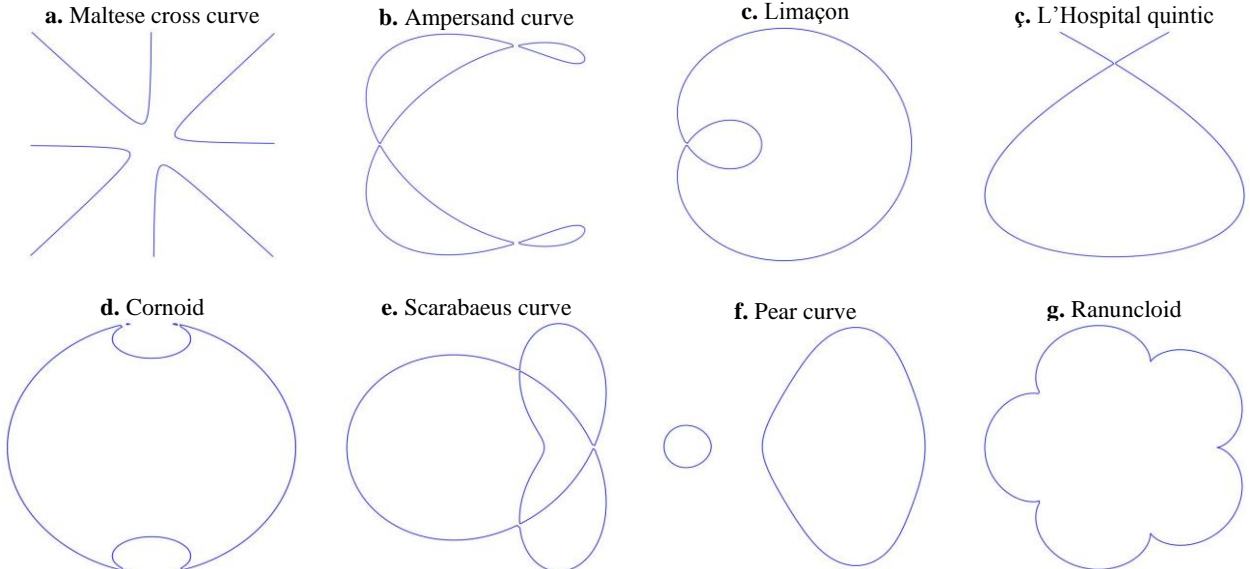
**Tablo 1.** Çeşitli eğrilerin kapalı temsilleri.

İsim	Derece	Kapalı Temsil
Maltese Cross Curve	3	$x^3y - xy^3 - x^2 - y^2$
Ampersand Curve	4	$6x^4 + 6x^2y^2 + 4y^4 - 21x^3 - 11xy^2 + 19x^2 - 3y^2$
Limaçon	4	$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - y^2$
L'Hospital Quintic	5	$64y^5 - 625x^4 - 1000x^2y^2 - 400y^4 + 1000x^2y + 800y^3$ $-200x^2 - 560y^2 + 160y - 16$
Cornoid	6	$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 + 3x^4 - 6x^2y^2 - 5y^4 + 8y^2 - 4$
Scarabaeus Curve	6	$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 + 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 5x^4 + 17x^2y^2 - 4y^4$
Pear Curve	8	$x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8 + 4x^7 + 12x^5y^2 + 12x^3y^4 + 4xy^6 + 6x^6$ $+14x^4y^2 + 10x^2y^4 + 2y^6 + 6x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4 + 5x^4$ $+2x^2y^2 - 3y^4 + 2x^3 + 2xy^2 + x^2 + y^2 - 1$
Ranuncloid	12	$x^{12} + 6x^{10}y^2 + 15x^8y^4 + 20x^6y^6 + 15x^4y^8 + 6x^2y^{10} + y^{12} - 42x^{10} - 210x^8y^2$ $-420x^6y^4 - 420x^4y^6 - 210x^2y^8 - 42y^{10} - 21x^8 - 84x^6y^2 - 126x^4y^4$ $-84x^2y^6 - 21y^8 - 812x^6 - 2436x^4y^2 - 2436x^2y^4 - 812y^6 + 93312x^5$ $-933120x^3y^2 + 466560xy^4 - 32025x^4 - 64050x^2y^2 - 32025y^4$ $-1286250x^2 - 1286250y^2 - 52521875$

**Tablo 2.** Tablo 1. de verilen eğrilerin izometri ve simetrilerinin hesaplanması için harcanan saniye cinsinden süreler.

İsim	İzo./Sim. Sayısı	Simetriler (sn)	İzometriler (sn)
Maltese Cross Curve	8	0.547	0.344
Ampersand Curve	2	0.094	0.001
Limaçon	2	0.016	0.001
L'Hospital Quintic	2	0.078	0.001
Cornoid	4	0.078	0.016
Scarabaeus Curve	2	0.171	0.031
Pear Curve	2	0.313	0.031
Ranuncloid	10	16.094	2.984

**Şekil 2.** Tablo 1. de verilen eğrilerin şekilleri.

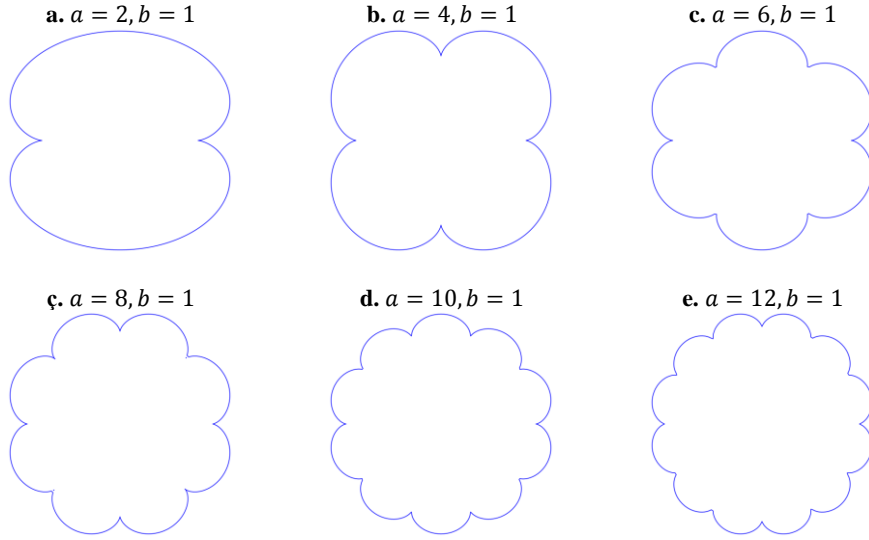


Şimdi de algoritmanın simetrisi bulmadaki yeterliliğini daha iyi anlayabilmek için çok simetriye sahip bir eğri ailesi üzerinde sonuçları inceleyelim. Bunun en uygun eğri ailelerinden biri olan “epicycloid eğri ailesi” seçilmiştir. Epicycloid eğri ailesi

$$\begin{aligned} x &= (a + b) \cos \phi - b \cos \frac{a+b}{b} \phi \\ y &= (a + b) \sin \phi - b \sin \frac{a+b}{b} \phi \end{aligned} \quad (33)$$

parametrik denkleminde sahiptir. Bu eğri ailesinden  $b = 1$  değerine karşılık,  $a = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  değerleri seçilmiştir. Bu değerler için parametrik denklem kapalı forma dönüştürülmüş ve her bir eğri için simetri hesaplaması yapılmıştır. İlgili değerler için eğrilerin şekilleri **Şekil 3.** de verilmiştir. Hesaplama süreleri **Tablo 3.** de sunulmuştur. Tabloda, ilk sütunda  $a$  ve  $b$  parametreleri, ikinci sütunda oluşan eğrinin derecesi, üçüncü sütunda oluşan eğrinin simetri sayısı ve son sütunda da tüm simetrilerin hesaplanmasında geçen süre verilmiştir. Tablodan da görüldüğü üzere, algoritma bu eğrilerin tüm simetrilerini en fazla süren hesaplamada bile yaklaşık 42 saniye gibi bir sürede hesaplayabilmektedir.

**Şekil 3.** Örneklerde kullanılan epicycloidlerin şekilleri.



**Tablo 3.** Seçili epicycloidlerin simetrilerinin hesaplanması için harcanan saniye cinsinden süreler.

Parametre	Derece	Simetri Sayısı	Süre (sn)
$a = 2, b = 1$	6	4	0.219
$a = 4, b = 1$	10	8	0.094
$a = 6, b = 1$	14	12	0.782
$a = 8, b = 1$	18	16	0.938
$a = 10, b = 1$	22	20	41.516
$a = 12, b = 1$	26	24	19.704

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada kapalı formda temsil edilen cebirsel düzlem eğrilerinin izometri ve simetrilerini hesaplayan yeni bir algoritma sunulmuştur. Algoritma, güçlü bir matematiksel altyapıya dayandırılmıştır. Bu altyapı, eğrileri temsil eden polinomlardan elde edilen cebirsel denklemler üzerine kurulmuştur. Diğer yandan izometrilere tespiti için bu denklemlerin direkt olarak çözümü yerine değişmezlik kavramı sayesinde eliminasyon teorisinden

faaydalanılmıştır. Bylece birçok bilinmeyeneye sahip ve bu bilinmeyenlere göre doğrusal olmayan sistemlerin çözümünden sakınılmıştır.

Sunulan algoritma tam olup, sadece belli başlı izometri/simetrileri değil, eğrilerin ihtiva ettiği tüm izometri/simetrileri tespit edebilmektedir. Algoritma, Maple bilgisayar cebir sistemi kullanılarak implement edilmiş ve bu implementasyon ile geniş çaplı testler yürütülmüştür. Test sonuçlarının başarısı ve algoritmanın etkinliği tablolarda verilmiştir.

Gelecek çalışmalarda, bu çalışmada sunulan metodun, en genel durum olan projektif denklik ve simetrilere genelleştirilmesi planlanmaktadır. Kapalı formda temsil edilen cebirsel düzlem eğrilerinin projektif denklik ve simetrisi için, burada verilen indirgeme metodunu uygulamak için başka metod ve yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır.

### Teşekkür

Yazarlar Prof. Juan Gerardo Alcazr'a, sonsuz desteği, yardımını hiçbir zaman esirgemediği ve tüm süreçlerde yanlarında olduğu için saygı ve teşekkürlerini sunar.

### Kaynakça

- [1] Alczar, J.G., Hermoso, C., Muntingh G. 2015. Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 33, 51–65.
- [2] Alczar, J.G., Lvika, M., Vrşek, J. 2019. Symmetries and similarities of planar algebraic curves using harmonic polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357, 302–318.
- [3] Alczar, J.G., Díaz Toca, G.M., Hermoso, C. 2019. On the problem of detecting when two implicit plane algebraic curves are similar. *International Journal of Algebra and Computation*, 29(5), 775–793.
- [4] Alczar, J.G., Quintero, E. 2020. Affine equivalences of trigonometric curves. *Acta Applicandae Mathematicae*, 170, 691-708.
- [5] Alczar, J.G., Quintero, E. 2020. Affine equivalences, isometries and symmetries of ruled rational surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 364, 112339.
- [6] Alczar, J.G., Hermoso, C. 2021. Computing projective equivalences of planar curves birationally equivalent to elliptic and hyperelliptic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 91, 102048.
- [7] Alczar, J.G., Gztok, U., oban, H.A., Hermoso, C. 2022. Detecting affine equivalences between implicit planar algebraic curves. *Acta Applicandae Mathematicae*, 182, 2.
- [8] Alczar, J.G., Lvika, M., Vrşek, J. 2023. Computing symmetries of implicit algebraic surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 104, 102221.
- [9] Bizzarri M., Lvika, M., Vrşek, J. 2020. Computing projective equivalences of special algebraic varieties. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 367, 112438.
- [10] Coxeter, H.S.M. 1969, *Introduction to Geometry*. 2. Ed., Wiley, 496s.
- [11] Hauer, M., Jttler, B., Schicho, J. 2018. Projective and affine symmetries and equivalences of rational and polynomial surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 349, 424–437.
- [12] Jttler, B., Lubbes, N., Schicho J. 2022. Projective isomorphisms between rational surfaces. *Journal of Algebra*, 594, 571–596.
- [13] Gztok, U., oban, H.A., Sağiroğlu, Y., Alczar, J.G. 2023. A new method to detect projective equivalences and symmetries of rational 3D curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics Vol. 419*, 114782.
- [14] Maple, 2022. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Waterloo, Ontario.
- [15] <https://www.ugurgozutok.com/>
- [16] Pene, İ. 2012. El yazısı karakterlerinin kapalı cebirsel eğrilerle modellenmesi ve sınıflandırılması. Sleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 68s. Isparta.
- [17] Yöndem, K.B. 2005. Different approaches on the implementation of implicit polynomials in visual tracking, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 68s. İstanbul.