Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **23** (2023) 061305 (1434-1439) AKU J. Sci. Eng. **23** (2023) 061305 (1434-1439)
DOI: 10.35414/akufemubid.1332740

Araştırma Makalesi / Research Article

Lacunary $\mathcal{I}^*$-Yakınsaklık ve Lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy Dizisi

Nimet Akın[1], Şeyma Yalvaç[2], Erdinç Dündar [3*]
[1,2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü, Afyonkarahisar.*
[3] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

npancaroglu@aku.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-4661-5388
syalvac@aku.edu.tr , ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2516-4485
**Corresponding author e-mail : edundar@aku.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-0545-7486*

Geliş Tarihi: 26 Temmuz 2023 ; Kabul Tarihi: 27 Kasım 2023

Anahtar kelimeler
İdeal; Lacunary dizi; $\mathcal{I}$-yakınsaklık; $\mathcal{I}$-Cauchy dizi.

Öz

Yapılan bu çalışmada, öncelikle, lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlandı ve lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ile lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler incelendi. Daha sonra, lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramı tanımladı ve lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ile lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi arasındaki ilişkiler araştırıldı. Ayrıca, çalışmanın sonunda, lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ile $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi kavramı arasındaki ilişki ele alındı.

Lacunary $\mathcal{I}^*$-Convergence and Lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy Sequence

Keywords
Ideal; Lacunary sequence; $\mathcal{I}$-convergence; $\mathcal{I}$-Cauchy sequence.

Abstract

In this study conducted, firstly, we defined the concept of lacunary $\mathcal{I}^*$-convergence and we investigated the relations between lacunary $\mathcal{I}$-convergence and lacunary $\mathcal{I}^*$-convergence. Then, we defined the concept of lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy sequence and investigated the relations between lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy sequence and lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy sequence. Additionally, at the end of the study, we examined the relation between lacunary $\mathcal{I}^*$-convergence and lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy sequence.

1. Giriş

Bu çalışma boyunca $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ sırasıyla doğal sayılar ve reel sayılar kümesini ifade eder. Toplanabilme teorisinde son yıllarda en çok çalışılan yakınsaklık tipleri istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklıktır. Bununla birlikte lacunary dizi kullanılarak bu iki yakınsaklık türünün birçok özelliği incelenmiştir. Bir reel sayı dizisinin yakınsaklığının genelleştirilmiş hali olan istatistiksel yakınsaklık Schoenberg (1959) ve Fast (1951) tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan metrik uzayda $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını Kostyrko vd. (2000) çalışmalarında vermişlerdir. Daha sonra bu konu üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Nabiev (2007), $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizilerini bazı özelliklerini ele alarak çalışmıştır. $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık gibi yeni kavramlar, $\mathcal{I}$ idealini kullanarak Das vd. (2011) tarafından ortaya atılmıştır. Ayrıca, Yamancı ve Gürdal (2013) rastgele n-normlu uzayların oluşturduğu topolojide lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy kavramlarını tanıtmışlar ve bazı önemli sonuçlar ispatlamışlardır. Debnath (2012), sezgisel fuzzy normlu lineer uzaylarda ideal yakınsama kavramının bir çeşidi olarak lacunary ideal yakınsama kavramını incelemiştir. Tripathy vd. (2012), $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak diziler kavramlarını tanıtmıştır.

Bu çalışmada öncelikle ideal yakınsaklık kavramı kullanılarak, lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklığı tanımladıktan sonra lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık arasındaki ilişki incelendi. Ayrıca, lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramı verildikten sonra lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizi ve lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi arasındaki ilişki çalışıldı. Son olarak, lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık ile lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizi arasındaki ilişki incelendi.

2. Temel Tanımlar ve Kavramlar

Bu bölümde, çalışmanın temellerini oluşturan literatürdeki tanım ve kavramlara yer verilmiştir. (Das *et al*. 2011, Debnath 2012, Dündar and Altay 2011, Dündar and Altay 2014, Dündar *et al*. 2016, Dündar and Ulusu 2023, Freedman *et al*. 1978, Kostyrko *et al*. 2000, Nabiev *et al*. 2007, Sever *et al*. 2014, Tripathy *et al*. 2012, Ulusu and Dündar 2014, Ulusu and Nuray 2020, Yamancı and Gürdal 2013).

Bir $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir idealdir denir;

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $A, B \in \mathcal{I}$ olduğunda $A \cup B \in \mathcal{I}$ dir,

(I3) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subseteq A$ olduğunda $B \in \mathcal{I}$ dir.

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine nontrivial (gerçek) idealdir denir. $\mathcal{I}$ nontrivial ideal olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa $\mathcal{I}$ ideali admissible (uygun) ideal olarak adlandırılır.

Bir $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir filtredir denir;

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(F2) $A, B \in F$ olduğunda $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir,

(F3) $A \in \mathcal{F}$ ve $B \supseteq A$ olduğunda $B \in \mathcal{F}$ dir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir nontrivial ideal ise

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : (\exists H \in \mathcal{I})(M = X \backslash H)\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ de bir filtre olup $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ filtresine $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeçtir denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}$ idealine ait her karşılıklı ayrık ve sayılabilir $\{A_1, A_2, \cdots\}$ küme ailesi için $A_j \Delta B_j$ $(j \in \mathbb{N})$ sonlu küme ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde sayılabilir bir $\{B_1, B_2, \cdots\}$ küme ailesi varsa $\mathcal{I}$ idealine (AP) şartını sağlıyor denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_N| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_k) dizisine $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun.

$$\lim_{k \to \infty} x_{m_k} = L$$

olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi varsa (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun. $x_M = (x_{m_k})$ altkümesi alışılmış Cauchy dizisi ise yani,

$$\lim_{k,p \to \infty} |x_{m_k} - x_{m_p}| = 0$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olan bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi varsa (x_k) dizisine $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir.

Şimdi lacunary dizi kavramını tanıtalım. $k_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ olduğunda

$$h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ dizisi negatif olmayan tamsayılarda artan bir dizi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizidir denir. $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için

$$I_r = (k_{r-1}, k_r] \text{ ve } q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$$

biçimindedir.

Çalışma boyunca $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olarak kabul edilecektir.

Bir (x_k) dizisi için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} x_k = L$$

ise (x_k) dizisi L sayısına lacunary yakınsaktır denir. Bir (x_k) dizisi için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k,p\,\in I_r}(x_k-x_p)=0$$

ise (x_k) dizisine lacunary Cauchy dizisidir denir.

Bir (x_k) dizisi verildiğinde her bir $\varepsilon>0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{J}$$

ise (x_k) dizisi L sayısına lacunary $\mathcal{J}$-yakınsaktır denir ve bu durum

$$x_n\to L(\mathcal{J}_\theta)$$

ile sembolize edilir.

Bir (x_k) dizisi için her $\varepsilon>0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}(x_k-x_N)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

kümesi $\mathcal{J}$ ya ait olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisine lacunary $\mathcal{J}$-Cauchy dizisidir denir.

Lemma 2.1 (Nabiev *et al.* 2007) $\mathcal{J}\subseteq 2^{\mathbb{N}}$, (AP) şartını sağlayan bir admissible ideal ve $F(\mathcal{J})$, $\mathcal{J}$ idealine karşılık gelen bir filtre olsun. Her i için $P_i\in F(\mathcal{J})$ olmak üzere $\{P_i\}_1^\infty$, $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin sayılabilir bir ailesi olmak üzere $P\in F(\mathcal{J})$ ve her i için $P\backslash P_i$ sonlu bir küme olacak şekilde bir $P\subset\mathbb{N}$ kümesi vardır.

3. Lacunary $\mathcal{J}^*$-Yakınsaklık ve Lacunary $\mathcal{J}^*$-Cauchy Dizisi

Tanım 3.1 (x_k), $\mathbb{R}$ de bir dizi ve $L\in\mathbb{R}$ olsun. Bir $M=\{m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots\}\subset\mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki $M'=\{r\in\mathbb{N}: m_k\in I_r\}\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ kümesi için

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\(r\in M')}}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{m_k}=L$$

ise (x_k) dizisi L sayısına lacunary $\mathcal{J}^*$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta^*)$ ile sembolize edilir.

Teorem 3.1 Bir (x_n) dizisi için $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta^*)$ ise bu durumda $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta)$ dir.

İspat: Farz edelim ki $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta^*)$ olsun. Bu takdirde, bir $M=\{m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots\}\subset\mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $M'=\{r\in\mathbb{N}: m_k\in I_r\}\in\mathcal{F}(\mathcal{J})(H=\mathbb{N}\backslash M'\in\mathcal{J})$ kümesi ve her $\varepsilon>0$ için $r>r_0$ olduğu durumda

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{m_k}-L\right|<\varepsilon,\qquad (r\in M')$$

olacak şekilde bir $r_0=r_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$A(\varepsilon)=\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\tfrac{1}{h_r}\textstyle\sum_{k\in I_r}x_{m_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subset H\cup\{1,2,\cdots,r_0\}$$

yazılabilir. $\mathcal{J}$ bir admissible ideal olduğundan

$$H\cup\{1,2,\cdots,r_0\}\in\mathcal{J}$$

ve böylece $A(\varepsilon)\in\mathcal{J}$ elde edilir. Sonuç olarak $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta)$ olduğu görülür.

Teorem 3.2 $\mathcal{J}$ admissible ideali (AP) şartını sağlasın. Bir (x_n) dizisi için $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta)$ ise bu durumda $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta^*)$ dir.

İspat: $x_n\to L(\mathcal{J}_\theta)$ olduğunu kabul edelim. Tanımdan, her $\varepsilon>0$ verildiğinde

$$T(\varepsilon)=\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{J}$$

olur. $p\geq 2$ ve $p\in\mathbb{N}$ için

$$T_1 = \left\{ r \in \mathbb{N}: \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k - L \right| \geq 1 \right\}$$

ve

$$T_p = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{p} \leq \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k - L \right| < \frac{1}{p-1} \right\}$$

kümelerini alalım. Bu durumda $i \neq j$ için $T_i \cap T_j = \emptyset$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $T_i \in \mathcal{I}$ olduğu açıktır. (AP) şartından dolayı bir $\{V_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyleki her $j \in \mathbb{N}$ için $T_j \Delta V_j$ kümesi sonlu bir kümedir ve

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \in \mathcal{I}$$

dir. $M' = \mathbb{N} \backslash V \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ için

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ (r \in M')}} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k = L$$

olduğunu ispatlayacağız. $\frac{1}{q} < \delta$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k - L \right| \geq \delta \right\} \subset \bigcup_{j=1}^{q-1} T_j$$

dir. $j \in \{1,2,\cdots,q-1\}$ seçildiğinde $T_j \Delta V_j$ kümesi sonlu olduğu için

$$\left(\bigcup_{j=1}^{q-1} T_j \right) \cap \{r \in \mathbb{N}:\ r \geq r_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} V_j \right) \cap \{r \in \mathbb{N}:\ r \geq r_0\}$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $r \geq r_0$ ve $r \notin V$ ise

$$r \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} V_j \quad \text{ve böylece} \quad r \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} T_j$$

dir. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k - L \right| < \frac{1}{q} < \delta$$

olduğundan

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ (r \in M')}} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k = L$$

elde edilir. Sonuç olarak $x_k \to L(\mathcal{I}_\theta^*)$ olduğu görülür.

Tanım 3.2 (x_k), $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki $M' = \{r \in \mathbb{N}: m_k \in I_r\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi için

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ (r \in M')}} \frac{1}{h_r} \sum_{k,p \in I_r} (x_{m_k} - x_{m_p}) = 0$$

ise (x_k) dizisine lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir denir.

Teorem 3.3 Bir (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise bu durumda, (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat: Farz edelim ki (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda tanımdan, bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $M' = \{r \in \mathbb{N}: m_k \in I_r\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k,p \in I_r} (x_{m_k} - x_{m_p}) \right| < \varepsilon, \quad (r \in M')$$

dir. Böylece, verilen her $\varepsilon > 0$ için $r_0 = r_0(\varepsilon)$ vardır öyleki her $r > r_0 = r_0(\varepsilon)$ ve $N = N(\varepsilon) \in I_{r_0+1}$ için

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_{m_k} - x_N \right| < \varepsilon, \quad (r \in M')$$

elde edilir. Şimdi $H = \mathbb{N} \backslash M'$ olsun. $H \in \mathcal{I}$ olduğu açıktır öyle ki

$$A(\varepsilon)=\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_k-x_N\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subset H\cup\{1,2,\cdots,r_0\}$$

dir. $\mathcal{I}$ bir admissible ideal olduğu için

$$H\cup\{1,2,\cdots,r_0\}\in\mathcal{I}$$

elde edilir ve böylece $A(\varepsilon)\in\mathcal{I}$ dir. Sonuç olarak (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisidir.

Teorem 3.4 $\mathcal{I}$ admissible ideali (AP) şartını sağlasın. Eğer bir (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ise bu durumda (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

İspat: Farz edelim ki (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde tanımdan, her $\varepsilon>0$ için bir $N=N(\varepsilon)$ vardır öyleki

$$A(\varepsilon)=\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}(x_k-x_N)\right|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}$$

dir. $i=1,2,\ldots$ için $m_i=N\left(\frac{1}{i}\right)$ olmak üzere

$$P_i=\left\{r\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_k-x_{m_i}\right|\geq\frac{1}{i}\right\}$$

olsun. Her $i=1,2,\cdots$ için $P_i\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır.

$\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağladığı için Lemma 2.1 den bir $P\subset\mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki her i için $P\backslash P_i$ sonlu bir kümedir ve $P\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır. Şimdi

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\(r\in P)}}\frac{1}{h_r}\sum_{k,m\in I_r}(x_k-x_m)=0$$

olduğunu göstereceğiz. İspat için $j>\frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ ve $j\in\mathbb{N}$ alalım. $r\in P$ ise $P\backslash P_j$ sonlu bir kümedir. Böylece bir $r_0=r_0(j)$ vardır öyleki her $r>r_0(j)$ için $r\in P_j$ dir. Bu durumda, her $r>r_0(j)$ için

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}(x_k-x_{m_j})\right|<\frac{1}{j}\ \text{ ve}$$

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{m\in I_r}(x_m-x_{m_j})\right|<\frac{1}{j}$$

dir. Buradan, her $r>r_0(j)$ için

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k,m\in I_r}(x_k-x_m)\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left(x_k-x_{m_j}\right)\right|+\left|\frac{1}{h_r}\sum_{m\in I_r}(x_m-x_{m_j})\right|$$

$$<\frac{1}{j}+\frac{1}{j}<\varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak her $\varepsilon>0$ için $r_0=r_0(\varepsilon)$ vardır öyleki her $r>r_0(\varepsilon)$ ve $r\in P\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ için

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k,m\in I_r}(x_k-x_m)\right|<\varepsilon$$

olduğundan (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

Teorem 3.5 Bir (x_n) dizisi L ye lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsak ise bu (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat: $x_n\to L(\mathcal{I}_\theta^*)$ olduğunu farz edelim. Bu durumda, bir $M=\{m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots\}\subset\mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $M'=\{r\in\mathbb{N}:m_k\in I_r\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ için

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\(r\in M')}}\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{m_k}-L\right|=0$$

dir. Buradan verilen her bir $\varepsilon>0$ için bir $r_0=r_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki seçilen her $r>r_0$ için

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{m_k}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad(r\in M')$$

yazılır. Her $r>r_0$ için

$$\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k,p\in I_r}(x_{m_k}-x_{m_p})\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{m_k}-L\right|+\left|\frac{1}{h_r}\sum_{p\in I_r}x_{m_p}-L\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\qquad (r\in M')$$

olduğundan

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\(r\in M')}}\frac{1}{h_r}\sum_{k,p\in I_r}(x_{m_k}-x_{m_p})=0$$

elde edilir. Böylece (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir ve Teorem 3.3 den (x_n) dizisi lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

5. Kaynaklar

Das P., Savaş E. and Ghosal S. K., 2011. On generalized of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters,* **24**(9), 1509-1514.

Debnath P., 2012. Lacunary ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, **63**(3), 708–715.

Dündar E. and Altay B., 2014. $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of double sequences. *Acta Mathematica Scientia*, **34**(2) , 343–353.

Dündar E. and Altay B., 2011, On some properties of $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of double sequences. *General Mathematics Notes*, **7**(1), 1–12.

Dündar E., Ulusu U. and Pancaroğlu N., 2016. Strongly $\mathcal{I}_2$-lacunary convergence and $\mathcal{I}_2$-lacunary Cauchy double sequences of sets. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, **35**(1-2), 1–15.

Dündar E. and Ulusu U., 2023. On Rough $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy sequence for functions defined on amenable semigroup. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, **6**(2), 86–90.

Fast H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicae,* **2**(3-4), 241–244.

Freedman A. R., Sember J. J. and Raphael M., 1978. Some Cesàro type summability spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society,* **3**(3), 508-520.

Kostyrko P., Šalát T. and Wilczyński W., 2000. $\mathcal{I}$-convergence, Real Analysis Exchange, **26**(2), 669–686.

Nabiev A., Pehlivan S. and Gürdal M., 2007. On $\mathcal{I}$-Cauchy sequence. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11**(2), 569–576.

Sever Y., Ulusu U. and Dündar E., 2014. On strongly $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-lacunary convergence of sequences of sets. *In: AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics*, **1611**(1), 357–362.

Schoenberg I. J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, **66**(5), 361–375.

Tripathy B. C., Hazarika B. and Choudhary B., 2012. Lacunary $\mathcal{I}$-convergent sequences. *Kyungpook Mathematical Journal,* **52**(4), 473-482.

Ulusu U. and Dündar E., 2014. $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Filomat*, **28**(8), 1567–1574.

Ulusu U. and Nuray F., 2020. Lacunary $\mathcal{I}$-invariant convergence. *Cumhuriyet Science Journal*, **41**(3), 617–624.

Yamancı U. and Gürdal M. 2013. On lacunary ideal convergence in random-normed space. *Journal of Mathematics*, **2013**, 868457. https://doi.org/10.1155/2013/868457