

## Geliştirilmiş Dalgarno-Lewis Pertürbasyon Yöntemiyle Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemlerin Enerji Düzeylerinin Hesaplanması

Serhat Fevzi ÖZEREN\*

Hitit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, 19030, Çorum  
Hitit Üniversitesi, Bilimsel Teknik Uygulama ve Araştırma Merkezi (HÜBTUAM), 19030, Çorum

Geliş tarihi/Received 11.04.2017

Düzeltilerek geliş tarihi/Received in revised form 03.07.2017

Kabul tarihi/Accepted 24.07.2017

### Öz

*Bu çalışmada, geliştirilmiş Dalgarno-Lewis pertürbasyon yöntemi üzerinde durulmaktadır. Enerji düzeylerinin ve dalga fonksiyonlarının hesabıyla ilgili işlemci tanımlanmaktadır. Elde edilen işlemci yardımıyla birinci ve ikinci mertebeden düzeltme terimleri hesaplanmaktadır. Simetri hesaba katıldığında yöntemin nasıl uygulanacağı ve elde edilen sonuçlar tartışılmaktadır.*

**Anahtar kelimeler:** *Cebirsel yöntemler, Kuantum mekaniği, Pertürbasyon yöntemi*

## Calculation of Energy Levels of The Linear and Non-Linear Systems By Means of The Emprored Dalgarno-Lewis Perturbation Method

### Abstract

*In this study, it has been focused on the emproved Dalgarno-Lewis perturbation method. The operator related to the calculation of energy levels and wave functions are defined. First and second order correction terms are calculated using the obtained operator. When symmetry is considered, how the method will be applied and the results obtained are discussed.*

**Keywords:** *Algebraic methods, Quantum mechanics, Perturbation methods*

### 1. Giriş

Atomik ya da moleküler bir yapının tam olarak çözümlenebilmesi, ilgili yapıya ait Schrödinger denkleminin tam olarak çözülmesiyle mümkün olabilir. Çoğu durumda Schrödinger denklemini tam olarak çözmek matematiksel olarak mümkün değildir. Böyle durumlarda ilgili Schrödinger denklemini çözmek ve sistemin fiziksel özelliklerini ortaya koymak için birçok yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir

(Merzbacher, 1970; Miller ve Good, 1953; Gutzwiller, M.C., 1967; Hugenholtz, N.M., 1957; Maslov, V.P. ve Fedoriuk, M.V., 1981; March, N.H., 1957; Turbiner, A.V., 2016). Bu yaklaşım yöntemlerinden biri olan pertürbasyon yöntemi, atomik ya da moleküler bir sisteme dışarıdan etki eden bozucu bir etkileşmenin (örneğin, elektrik ve manyetik alan gibi), enerji düzeylerine nasıl bir katkı yaptığını ve sistemin dalga fonksiyonunu

\* Serhat Fevzi ÖZEREN, sfözeren@gmail.com, Tel: (0505) 386 46 51, (0364) 219 28 50

nasıl değiştirdiğini ortaya koymada etkili bir yöntemdir (Landau ve Lifshitz, 1977). Bu yöntemde, pertürbasyon serisi denilen bir serideki ikinci, üçüncü ve diğer terimler hesaplanarak, enerji düzeylerinin ve dalga fonksiyonlarının gerçek değere yakın sonuçları elde edilir. Eğer dış etkiler zayıfsa, ikinci mertebeden sonraki terimler ihmal edilecek kadar küçüktür. Bazı durumlarda, ikinci ve üçüncü mertebeye terimlerin hesaplanması oldukça zor olabilmektedir. Dalgarno ve Lewis (1955), ikinci ve üçüncü mertebeye enerjilerin hesaplanmasında özel bir işlemci tanımlayarak pertürbasyon yöntemini geliştirdiler. Bu çalışmada, dejenere olmayan durumlarda zamandan bağımsız pertürbasyon yöntemi üzerinde durulmaktadır. İkinci mertebeye enerji düzeltme teriminin hesaplanmasında, Dalgarno ve Lewis pertürbasyon yönteminin geliştirilmiş bir şekli olan yeni bir yöntem kullanılmaktadır (Balantekin ve Malkus, 2010). Öncelikle, bu yeni yöntemin detayları özetlenmektedir. Daha sonra, zayıf bir dış etkileşme durumunda ikinci mertebeden enerji düzeltme terimi hesaplanmaktadır. Son olarak, harmonik bir dış etki durumunda, sistemin simetrisini göz önüne alarak enerji düzeyleri bulunmaktadır. Sonuç ve tartışma kısmında, yeni yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırması ve kullanılabilirliği üzerinde durulmaktadır.

## 2. Geliştirilmiş Dalgarno - Lewis pertürbasyon yöntemi

Bu çalışmada, Balantekin ve Malkus (2010) tarafından teklif edilen yeni bir işlemci yardımıyla, Dalgarno-Lewis yönteminin geliştirilmiş bir tanımı kullanılmaktadır. İlgili çalışmada geliştirilen yöntem, çekirdeklerde derin kuyu potansiyellerine uygulanmaktadır. Bu çalışmada ise, aynı yöntem doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere ve harmonik dış etkiler durumunda ki sistemin enerji düzeylerinin hesabında kullanılmaktadır. Bu

kısımda, hesaplamada kullanılan yöntem özetlenmektedir.

İlgili sistemin toplam Hamiltonyeni

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{U} \quad (1)$$

formundadır. Burada  $\hat{H}_0$ , dejenere olmayan özdeğerlere sahip çözümü bilinen bir Hamiltonyendir:

$$\hat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle \quad (2)$$

$\lambda$  küçük bir parametre,  $\hat{U}$  sisteme dışarıdan etki eden pertürbasyon terimi,  $|n\rangle$  ve  $\epsilon_n$  ise sırayla, çözümü bilinen Hamiltonyenin dalga fonksiyonu ve enerjilerdir. (1) eşitliği için Schrödinger denklemi

$$\hat{H} |\Psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |\Psi_n(\lambda)\rangle \quad (3)$$

olarak yazılabilir. Balantekin ve Malkus (2010), çözümü bilinen pertürbe olmamış  $|n\rangle$  hallerini, (3) eşitliğindeki  $|\Psi_n(\lambda)\rangle$  halleri ile ilişkilendiren yeni bir  $\hat{S}_n(\lambda)$  işlemcisini tanımladılar:

$$|\Psi_n(\lambda)\rangle = \hat{S}_n(\lambda) |n\rangle. \quad (4)$$

$\hat{S}_n(\lambda)$  işlemcisi ve  $E_n(\lambda)$  enerjileri  $\lambda$  parametresi cinsinden aşağıdaki gibi seriye açılabilir:

$$\hat{S}_n(\lambda) = \exp(\lambda \hat{A}_n + \lambda^2 \hat{B}_n + \lambda^3 \hat{C}_n + \dots), \quad (5)$$

$$E_n(\lambda) = \epsilon_n + \lambda \epsilon^{(1)}_n + \lambda^2 \epsilon^{(2)}_n + \dots \quad (6)$$

Burada  $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \dots$  belirlenecek olan işlemciler ve  $\epsilon_n, \epsilon^{(1)}_n, \epsilon^{(2)}_n, \dots$  ise sırayla sıfırıncı, birinci, ikinci, ... enerji düzeltme terimleridir. (3), (5) ve (6) eşitliklerinden

$$[(\hat{S}_n(\lambda))^{-1} \hat{H} \hat{S}_n(\lambda)] |n\rangle = (\epsilon_n + \lambda \epsilon^{(1)}_n + \lambda^2 \epsilon^{(2)}_n + \dots) |n\rangle \quad (7)$$

yazılabilir. (7) eşitliğinin sol tarafını,

$$\exp(-\hat{A}) \hat{B} \exp(\hat{A}) = \hat{A} + \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (8)$$

Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) formülüyle tekrar düzenleyerek, ilk iki enerji

düzeltilme terimi için aşağıdaki ifadeler kolayca elde edilir:

$$(\hat{U} - [\hat{A}_n, \hat{H}_0])|n\rangle = \epsilon^{(1)}_n |n\rangle \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{2}[\hat{A}_n, [\hat{A}_n, \hat{H}_0]] - [\hat{B}_n, \hat{H}_0] - [\hat{A}_n, \hat{U}]\right)|n\rangle = \epsilon^{(2)}_n |n\rangle. \quad (10)$$

$\hat{H}_0$  işlemcisi  $|n\rangle$  bazında köşegen bir matris işlemcisidir.  $\hat{U}$  pertürbasyon terimini Köşegen (K) ve Köşegen Olmayan (KO) terimlerine ayırarak  $\hat{U} = \hat{U}_K + \hat{U}_{KO}$  şeklinde yazılırsa, birinci ve ikinci mertbe enerji düzeltmeleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\epsilon^{(1)}_n = \langle n | \hat{U}_K | n \rangle \quad (11)$$

$$\epsilon^{(2)}_n = -\frac{1}{2} \langle n | [\hat{A}_n, \hat{U}_{KO}] | n \rangle. \quad (12)$$

Burada  $\hat{U}_{KO} = [\hat{A}_n, \hat{H}_0]$  dir.

Böylece, Balantekin ve Malkus'un (2010) önerdiği geliştirilmiş Dalgarno-Lewis pertürbasyon yöntemiyle enerji düzeltme terimleri için (11) ve (12) eşitlikleri elde edilir. Yukarıda özetlenen yöntemden yararlanarak ilk iki enerji düzeltmesinin hesaplanabilmesi için  $\hat{A}_n$  işlemcisinin bulunması gerekir. İlgili çalışmada, çekirdeklerde derin kuyu potansiyelleri için enerji düzeltmesinin nasıl hesaplandığı yer almaktadır. Bu çalışmada ise, harmonik titreşim yapan bir sistemin (örneğin, iki atomlu bir molekülün düşük sıcaklıklarda titreşimi) doğrusal bir dış etkiye maruz kalması durumunda (örneğin, zayıf dış elektrik alan durumu) ilk iki enerji düzeyinin hesaplanması yapılmaktadır. Daha sonra, doğrusal olmayan dış etki durumunda enerji düzeyleri hesaplanmaktadır.

### 3. Doğrusal zayıf bir etkileşme durumunda harmonik salınıcı

Harmonik salınıcı modeli, teorik fiziğin hemen hemen her alanında yaygın olarak kullanılan bir modeldir (Shankar, 1980). Bu kısımda, harmonik titreşim yapan bir sistemin (örneğin iki atomlu bir molekül) dış etki

durumunda davranışı incelenmektedir. Harmonik titreşim yapan bir fiziksel sistem dışarıdan zayıf bir doğrusal etkiye maruz kaldığında, sistemin Hamiltoniyeni,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + m \omega^2 c x \quad (13)$$

olarak verilir (Zettili, 2009). Burada c bir sabittir. (13) eşitliği, kuantum mekaniğinde iyi bilinen yoketme ( $a$ ) ve yaratma ( $a^+$ ) işlemcileri cinsinden aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^+ + a^+a) + \frac{m\omega^2 c}{2\alpha} (a + a^+) \quad (14)$$

Burada  $\alpha = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}$  dir. (14) eşitliğinde ilk terim, çözümü iyi bilinen harmonik terimdir. İkinci terim ise pertürbasyon terimidir. (1) ve (14) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^+ + a^+a), \quad (15)$$

$$\hat{U} = a + a^+, \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{m\omega^2 c}{2\alpha} \quad (17)$$

olduğu kolayca görülebilir.  $\hat{U}$  pertürbasyon işlemcisi  $|n\rangle$  bazında köşegen olmayan bir işlemcidir. Bundan dolayı, (11) eşitliğine göre birinci mertbe enerji düzeltmesinin  $\epsilon^{(1)}_n = 0$  olduğu açıktır. (15), (16) ve  $\hat{U}_{KO} = [\hat{A}_n, \hat{H}_0]$  eşitliklerini kullanarak  $\hat{A}_n$  işlemcisi kolayca bulunabilir:

$$\hat{A}_n = \frac{1}{\hbar\omega} (a - a^+). \quad (18)$$

(18) eşitliği (12) eşitliğinde yazılırsa, ikinci mertbe enerji düzeltmesinin,

$$\epsilon^{(2)}_n = -\frac{1}{\hbar\omega} \quad (19)$$

olduğu görülmektedir. Böylece (6) eşitliğiyle, zayıf dış etkiye maruz kalmış harmonik salıncının enerjileri,

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n + 1) - \frac{m\omega^2 c^2}{2} \quad (20)$$

olarak bulunur. (20) eşitliğini literatürdeki sonuçla uyumlu olduğu görülebilir (Zettili, 2009).

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a) + \lambda(a^3 + a^{+2}a + aa^+a + a^+a^2 + a^2a^+ + a^{+3} + aa^{+2} + a^+aa^+). \quad (22)$$

İlk terim çözümü bilinen harmonik terimdir. İkinci terim pertürbasyon terimidir ve  $|n\rangle$  bazında tamamen köşegen olmayan elemanlardan oluşmaktadır. Bundan dolayı,

$$\hat{A}_n = \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{1}{3}a^3 - aa^{+2} + a^2a^+ + aa^+a + a^+a^2 - a^{+3} - a^+aa^+ - a^{+2}a \right). \quad (23)$$

Böylece, (12) eşitliği yardımıyla ikinci mertebe enerji düzeltmesi detaylı bir hesaplamayla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\epsilon^{(2)}_n = -\frac{1}{2\hbar\omega} \left[ \frac{189}{3}n^2 + \frac{195}{3}n + 28 \right]. \quad (24)$$

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n + 1) - \frac{\hbar^3 d^3}{8m^3 \omega^3} \left[ \frac{189}{3}n^2 + \frac{195}{3}n + 28 \right]. \quad (25)$$

### 5. Harmonik dış etki altında üç-boyutlu harmonik salıncı

Son olarak, bu kısımda, dış etkinin harmonik olması durumunda üç-boyutlu bir salıncının enerji düzeyleri hesaplanmaktadır. Üç-boyutlu harmonik salıncının simetrisi SU(1,1) Lie grubuyla ilgilidir ve baz fonksiyonu olarak su(1,1) Lie cebirinin bazı alınmalıdır (Wybourne, 1974). Sistemin Hamiltonyeni

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \lambda\hat{U} \quad (26)$$

### 4. Doğrusal olmayan etkileşmelerde enerji düzeyleri

Bu kısımda, zayıf dış etkinin doğrusal olmaması durumunda enerji düzeylerinin nasıl hesaplanacağı tartışılmaktadır. Sistemin Hamiltonyeni

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + dx^3 \quad (21)$$

şeklinde verilebilir. Burada d, küçük bir parametredir. Yoketme ve yaratma işlemcileri cinsinden (21) eşitliği tekrar yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

(11) eşitliğine göre birinci mertebe enerji düzeltmesi  $\epsilon^{(1)}_n = 0$  olarak bulunur.  $\hat{U}_{KO} = [\hat{A}_n, \hat{H}_0]$  eşitliğini sağlayan  $\hat{A}_n$  işlemcisi kolayca hesaplanabilir:

(24) eşitliği ile birlikte düzeltilmiş enerji düzeyleri hesaplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

olarak verilir. Burada  $\hat{U} = r^2$  pertürbasyon terimidir. (26) eşitliği pertürbasyon yöntemi kullanılmadan çözümü kolayca yapılabilen bir Hamiltonyen olsa da, bu çalışmada kullanılan yöntemin daha farklı potansiyellere genişletilebileceğini görmek açısından önemlidir. (26) eşitliği, su(1,1) Lie cebirinin işlemcileri cinsinden yazılabilir (Wybourne,

1974). Üç-boyutta yoketme ve yaratma işlemcileri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_j^+ = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} x_j - i \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{1/2} p_j \quad (27)$$

$$a_j = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} x_j + i \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{1/2} p_j . \quad (28)$$

Burada  $j= 1,2,3$  değerlerini alınır.  $su(1,1)$  Lie cebirinin işlemcileri ise şu şekilde tanımlanır (Inomata, Kuratsuji ve Gerry, 1992):

$$K_0 = \frac{1}{4} \sum_j (a_j^+ a_j + a_j a_j^+) , K_+ = \frac{1}{2} \sum_j a_j^+ a_j^+ , K_- = (K_+)^+ . \quad (29)$$

(29) işlemcileri arasında aşağıdaki komütasyon kurallarının geçerli olduğu kolayca tespit edilebilir:

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} , [K_+, K_-] = -2K_0 . \quad (30)$$

Bu cebirin her elemanıyla komüt olan Casimir işlemcisi ise,

$$C_2 = K_0^2 - \frac{1}{2} (K_+ K_- + K_- K_+) \quad (31)$$

olarak verilir. (29) işlemcileri kullanılırsa (31) eşitliği

$$C_2 = \frac{1}{4} L^2 - \frac{3}{16} \quad (32)$$

olur. Burada  $L$ , yörüngesel açısal momentum işlemcisidir.  $su(1,1)$  cebirinin bazı,  $|k, n\rangle$  şeklinde  $k$  ve  $n$  sayılarıyla verilir. Bu bazda

$$C_2 |k, n\rangle = k(k-1) |k, n\rangle \quad (33)$$

özdeğer eşitliği geçerlidir. Burada  $k = \frac{1}{2}(\ell + \frac{3}{2})$  Bargmann indeksidir.  $n = k, k+1, k+2, \dots$  değerlerini alır.  $\ell$ , açısal momentum kuantum sayısıdır. Bu bazda (29) işlemcileri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$K_0 |k, n\rangle = n |k, n\rangle , K_{\pm} |k, n\rangle = \sqrt{(n \pm k)(n \mp k \pm 1)} |k, n \pm 1\rangle . \quad (34)$$

Böylece,  $su(1,1)$  Lie cebirinin işlemcileri cinsinden (26) Hamiltonyeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{H} = 2\hbar\omega K_0 + \frac{\hbar}{m\omega} (K_+ + K_- + 2K_0) . \quad (35)$$

Burada birinci terim, çözümü bilinen pertürbe olmamış Hamiltonyen ve ikinci terim ise pertürbe olmuş Hamiltonyendir. (34) eşitliğinden sadece  $K_0$  işlemcisinin köşegen olduğu görülmektedir. Böylece,  $\hat{U}_{KO} = [\hat{A}_n, \hat{H}_0]$  eşitliğinden,

$$\hat{A}_n = -\frac{1}{2m\omega^2} K_+ + \frac{1}{2m\omega^2} K_- \quad (36)$$

elde edilir. (11) eşitliğiyle birinci mertebe enerji düzeltmesi hesaplanır:

$$\epsilon_n^{(1)} = \left\langle k, n \left| \frac{2\hbar}{m\omega} K_0 \right| k, n \right\rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} n . \quad (37)$$

(12) eşitliği ile ikinci mertebe enerji düzeltmesi hesaplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\epsilon_n^{(2)} = -\frac{\hbar}{m^2\omega^3} n . \quad (38)$$

Son olarak, (37) ve (38) eşitliklerinden, düzeltilmiş enerji düzeyleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E_n = \left\{ 2\hbar\omega + \frac{2\hbar^2}{m^2\omega^2} - \frac{\hbar^3}{m^4\omega^5} \right\} n . \quad (39)$$

## 6. Sonuç ve tartışma

Bu çalışmada, Dalgarno-Lewis pertürbasyon yönteminin geliştirilmiş bir formülasyonu üzerinde duruldu. Yöntem kısaca özetlendikten sonra, harmonik titreşim yapan sisteme dış etki olarak katılan pertürbasyon terimlerinin, sistemin enerji düzeylerine katkıları, birinci ve ikinci mertebeden yaklaşımlarla hesaplandı. Pertürbasyon olarak doğrusal, kuadratik ve kübik terimler incelendi. Harmonik salınıcı modeli, iyi bilinen temel bir modeldir. Atomik sistemler düşük sıcaklıklarda harmonik titreşimler yaparlar. Ancak daha yüksek sıcaklıklarda harmonik olmayan etkileşimler kendini gösterir. Burada çalışılan yöntem, daha yüksek mertebeden pertürbasyonlara da uygulanabilir. Örneğin iki atomlu bir molekül için, molekülün titreşim düzeylerini en iyi tasvir eden potansiyel Morse potansiyelidir. Molekül bir elektrik ya da manyetik alana maruz kalırsa enerji düzeyleri değişir. Bu değişim burada çalışılan yöntem kullanılarak hesaplanabilir. Geliştirilmiş Dalgarno-Lewis yöntemiyle burada sadece ikinci mertebeye kadar olan düzeltmeler hesaplandı. Dış etkinin durumuna göre, üçüncü ve daha yüksek terimleri hesaplamak da mümkündür. Ayrıca, (4) ve (5) eşitlikleri, pertürbe durumda sistemin dalga fonksiyonlarını hesaplamaya izin verir. Böylece, incelenen sisteme ait tüm fiziksel parametreler (bulunma olasılıkları, termodinamik değişkenler, vb.) hesaplanabilir.

### Katkı belirtme

Bu çalışma, Hitit Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından FEF01.13.002 Nolu proje ile desteklenmiştir.

## 7. Kaynaklar

- Balantekin, A.B. ve Malkus, A., 2010. Dalgarno-Lewis method revisited, arXiv:1012.4783v1.
- Dalgarno, A. ve Lewis, J.T., 1956. The exact calculation of long-range forces between atoms by perturbation theory,

Proceedings of The Royal Society of London, Series A, 233, 70-74.

- Gutzwiller, M.C., 1967. Phase-integral approximation in momentum space and the bound states of an atom, Journal of Mathematical Physics, 8, 1979.
- Hugenholtz, N.M., 1957. Perturbation theory of large quantum systems, Physica, 23, 481.
- Inomata, A., Kuratsuji, H. ve Gerry, C.C., 1992. Path integrals and coherent states of SU(2) and SU(1,1), World Scientific, Singapore, 318s.
- Landau, L.D. ve Lifshitz, E.M., 1977. Quantum mechanics, Pergamon Press, Exeter, 677s.
- March, N.H., 1957. The Thomas-Fermi approximation in quantum mechanics, Advances in Physics, 6, 1-101.
- Maslov, V.P. ve Fedoriuk, M.V., 1981. Semi-classical approximation in quantum mechanics, D.Reidel Publishing, London, 307s.
- Merzbacher, E., 1970. Quantum mechanics, Wiley, NY, 621s.
- Miller, S.C. ve Good, R.H., 1953. A WKB-type approximation to the Schrödinger equation, Physical Review, 91, 174.
- Shankar, R., 1980. Principles of quantum mechanics, Plenum, NY, 676s.
- Turbiner, A.V., 2016. One-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger equations, Physics Report, 642,1.
- Wybourne, B.G., 1974. Classical groups for physicists, Wiley, NY, 415s.
- Zettili, N., 2009. Quantum mechanics, Wiley, Wiltshire, 674s.