Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., Cilt:7, Sayı:1, 2017,98-110/Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol:7, No:1,2017,98-110

L-BULANIK ESNEK GRUPLAR

Yıldıray ÇELİK[1*], Sevgi DEMİR[1]

[1] *Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ordu*

(Geliş Tarihi: 21.02.2017; Kabul Tarihi: 13.04.2017)

ÖZET

Bu çalışmada, L-bulanık esnek küme ve L-bulanık esnek grup kavramları verildi. Ayrıca L-bulanık esnek grupların cebirsel yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirildi.

***Anahtar Kelimeler*:** Bulanık küme, esnek küme, bulanık esnek küme.

L-FUZZY SOFT GROUPS

ABSTRACT

In this paper, the concepts of L-fuzzy sof set and L-fuzzy soft group are given. Also, the algebraic structure, the basic properties and relationship between results of L-fuzzy soft groups are introduced.

Key Words: Fuzzy set, soft set, fuzzy soft set.

*ycelik61@gmail.com

1.GİRİŞ

Ekonomi, mühendislik, çevre, sosyal bilim, tıp bilimi ve diğer birçok alandaki birçok karmaşık problemler kesin olmayan bilgiler içerir. Günlük yaşamda sürekli karşı karşıya geldiğimiz bu problemler klasik matematik metotları kullanılarak çözülemez. Klasik matematikte, bir objenin matematiksel modeli tasarlanır ve bu modelin tam çözümünün ifadesi kararlaştırılır. Bu yüzden klasik matematiksel model çok karmaşıktır ve kesin çözüm bulunamaz. Belirsizlikleri tanımlamak için birkaç tane iyi bilinen teoriler vardır. Örneğin, bulanık küme teorisi (Zadeh 1965), kaba küme teorisi (Pawlak 1982) ve diğer matematiksel araçlar. Fakat bütün bu teorilerin kendi içerisinde birtakım zorluklara sahip olduğu Molodtsov (Molodtsov 1999) tarafından işaret edildi. Molodtsov belirsizliklerle başa çıkabilmek için mevcut metotların sahip olduğu zorluklardan uzak yeni bir matematiksel araç olarak esnek küme kavramını ortaya koydu.

Esnek küme teorisi birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan bazısı Molodtsov (Molodtsov 1999) tarafından kendi öncü çalışmasında gösterilmiştir. Son zamanlarda esnek küme teorisi üzerindeki çalışmalar hızlı bir şekilde ilerleme göstermiştir. Maji, Biswas ve Roy (Maji et al. 2003) esnek küme teorisinin uygulamalarını tanımladılar ve esnek küme teorisi üzerinde birçok işlemle çalıştılar. Chen, Tsang, Yeung ve Wang (Chen et al. 2005) esnek kümelerin parametre dönüşümleriyle ilgili yeni tanımlar ortaya koydular ve bu tanımların kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Pei ve Miao (Pei & Miao 2005) esnek kümelerle bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi tartıştılar. Maji, Biswas ve Roy (Maji et al. 2001) tarafından esnek kümeler bulanık alt kümelere taşınarak bulanık esnek kümeler tanımlandı. Bu şekilde esnek kümeler için daha önceden bilinen tanım ve teoremler bulanık yapısına uyarlanmış oldu.

Esnek kümlerin cebirsel yapısı bazı bilim adamları tarafından incelendi. İlk olarak Aktaş ve Çağman (Aktaş & Çağman 2007) esnek grupların yapısını inceleyerek, esnek grupların bulanık alt kümeler ve rough kümelerle olan ilişkisini değerlendirdiler. Ayrıca Molodsov (Molodtsov 1999)'un esnek kümelerle ilgili tanımını kullanarak esnek grupların bazı özelliklerini ortaya koydular. Jun (Jun 2008) esnek BCK-BCI cebirlerini tanımladı ve bununla ilgili çalışmalar yaptı. Feng, Jun ve Zhao (Feng et al. 2008) esnek yarı halka kavramını ifade ettiler ve esnek kümeler için mevcut olan özellikleri yarı halka yapısına uyarladılar. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir (Ali et al. 2009) esnek kümeler için bilinen $\cap$, $\cup$ gibi cebirsel yapıları yeniden düzenleyerek esnek kümelerde yeni ifadeleri oluşturdular.

Bu çalışmada biz L-bulanık esnek küme kavramını vererek, L-bulanık esnek grupların yapısını inceledik. Ayrıca L-bulanık esnek grupların temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkileri değerlendirdik.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1. (Birkhoff 1967) L boştan farklı bir küme $"\leq"$ L'de bir bağıntı olsun. L'ye bir sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

i) $\forall\ a \in$ L için $a \leq a$

ii) $\forall a, b \in$ L için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

iii) $\forall a, b, c \in$ L için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

L sıralı kümesi (L, $\leq$) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.2. (Birkhoff 1967) (L, $\leq$) bir sıralı küme olsun.

(i) L'ye bir kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ a,b \in$ L için $\mathrm{Sup}\{a,b\} = a \vee b$ ve $\mathrm{Inf}\{a,b\} = a \wedge b$ mevcuttur.

(ii) L'ye bir zincir denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ a,b \in$ L için $a \leq b$ veya $b \leq a$.

(iii) L'ye bir tam kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall T \subseteq L$ için SupT ve İnfT mevcuttur.
(iv) L'ye bir modular kafes denir. $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in L$, $a \le b$ için
$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$.
(v) L'ye bir dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in L$ için
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
(vi) L'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ L bir tam kafes ve $\forall a, b_i \in L$, $i \in \Lambda$ için
$a \wedge (\bigvee_{i\in\Lambda} b_i) = \bigvee_{i\in\Lambda} (a \wedge b_i)$.

Tanım 2.3. (Kaufmann 1975) X bir küme olmak üzere $\mu : X \to L$ fonksiyonuna X'in L- bulanık alt kümesi denir. X'in bütün L- bulanık alt kümeleri L^X ile gösterilir. L=[0,1] ise L-bulanık alt kümelere X'in bulanık alt kümeleri denir. $\mu \in L^X$ için,
Res μ ={ μ(x): x$\in$X} ve μ^*={x$\in$X: 0 < μ(x) } kümelerine sırasıyla μ'nün görüntüsü ve desteği denir.

Tanım 2.4. (Kaufmann 1975) $Y \subseteq X$ ve $a \in L$-{0} için $a_Y \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak a=1 alınırsa 1_Y L- bulanık alt kümesine Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. Bu durum χ_Y notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.5. (Kaufmann 1975) $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $\forall$ x $\in$X için μ(x)$\le$ ν(x) ise ν'ye μ'yü kapsar denir ve $\mu \le \nu$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. (Kaufmann 1975) $\mu, \nu \in L^X$ ve x$\in$X olsun.
$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$
$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$
ile tanımlanan L-bulanık alt kümelere sırasıyla μ ile ν'nün birleşimi ve kesişimi (arakesiti) denir.

Tanım 2.7. (Mordeson & Malik 1998) $\mu \in L^X$ ve $\nu \in L^Y$ olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $\mu \times \nu(x,y) = \mu(x) \wedge \nu(y)$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümesine μ ve ν L-bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 2.8. (Bhattacharya & Jain 1972) $\varnothing \neq$ G bir küme ve '.' G üzerinde bir ikili işlem olsun. G'ye bir grup denir. $\Leftrightarrow$
i) $\forall$ x,y,z $\in$ G için x.(y.z) = (x.y).z
ii) $\exists$ e$\in$G öyle ki $\forall$ x$\in$G için e.x=x=x.e
iii) $\forall$ x$\in$G için $\exists$ y$\in$G öyle ki y.x=x.y=e

Burada e elemanına G'nin birim elemanı denir. y.x=x.y=e eşitliğini sağlayan y elemanına x'in tersi denir ve $y=x^{-1}$ veya y=-x ile gösterilir. G bir grup ise (G,.) ile gösterilir.

Tanım 2.9. (Bhattacharya & Jain 1972) (G,.) bir grup olsun. G'ye değişmeli grup denir $\Leftrightarrow$ $\forall$ x,y$\in$G için x**.**y=y**.**x'dir.

Tanım 2.10. (Bhattacharya & Jain 1972) (G,.) bir grup ve $\emptyset \neq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ olsun. H'ye G'nin bir alt grubu denir $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, b $\in$H için $a.b^{-1} \in$ H'tır. Bu durum H<G notasyonu ile gösterilir. G grubunun bütün alt gruplarının kümesi S(G) ile gösterilecektir.

Tanım 2.11. (Mordeson & Malik 1998) $\mu, \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olmak üzere $\forall x \in \mathrm{G}$ için
$(\mu.\nu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in \mathrm{G}, y.z = x\}$ ve $\mu^{-1}(x)=\mu(x^{-1})$
şeklinde tanımlanan $\mu.\nu$, μ^{-1} L-bulanık alt kümelerine sırasıyla μ ile ν 'nün çarpımı ve μ 'nün tersi denir.

Tanım 2.12. (Mordeson & Malik 1998) $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olsun. μ 'ye G'nin bir L-bulanık alt grubu denir. $\Leftrightarrow$
(G_1) $\forall x, y \in \mathrm{G}$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
(G_2) $\forall x \in \mathrm{G}$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

Eğer L=[0,1] ise L-bulanık alt grup, bulanık alt grup olarak adlandırılır. G nin bütün L-bulanık alt gruplarının kümesi FL(G) ile gösterilir.

Teorem 2.1. (Mordeson & Malik 1998) $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{FL(G)}$ olsun. Bu takdirde, $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \mathrm{FL(G)}$ 'dir.

Teorem 2.2. (Mordeson & Malik 1998) L bir tam kafes, (G,.) bir grup, $\emptyset \neq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ ve $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in \mathrm{G}$ ve $\forall$ t$\in$L için $\mu(x) = \begin{cases} \mathrm{t}, & x \in \mathrm{H} \\ 0, & x \notin \mathrm{H} \end{cases}$ L-bulanık alt gruptur $\Leftrightarrow$ H<G 'dir.

Teorem 2.3. (Mordeson & Malik 1998) (G, $\cdot$) bir grup μ ve ν G'nin L-bulanık alt grupları olmak üzere $\mu \cdot \nu$ G'nin bir L-bulanık alt grubudur $\Leftrightarrow \mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$

Tanım 2.13. (Mordeson & Malik 1998) $\mathrm{A} \neq \emptyset$ bir küme ve P(U), U'nun güç kümesini göstersin. F: A$\rightarrow$ P(U) bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Başka bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme U kümesinin alt kümelerinin bir parametreler ailesidir. $\varepsilon \in \mathrm{A}$ için F(ε), (F,A) esnek kümesinin ε-elemanlarının bir kümesi yada ε-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak adlandırılır. Esnek küme kavramı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.1. F: A$\rightarrow P$(U) bir dönüşüm olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için F(x)=$\emptyset$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi bir esnek kümedir.

Örnek 2.2. $f: \mathrm{A} \to \mathrm{U}$ bir fonksiyon ve F: $\mathrm{A} \to P(\mathrm{U})$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi U üzerinde bir esnek kümedir.

Örnek 2.3. (G,.) grup olsun. H: $\mathrm{G} \to P(\mathrm{G})$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{H(g)}=\langle \mathrm{g} \rangle = \{\mathrm{g}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{n} \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlanan (H,G) ikilisi G üzerinde bir esnek kümedir.

3. L-BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu bölümde bir L tam kafesi üzerinde L-bulanık esnek küme tanımı verilerek bazı temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilecektir. Bu şekilde bulanık esnek kümelerin mevcut yapısı herhangi bir L kafesi üzerinde incelenecektir.

Bu bölüm boyunca, U bir küme, E parametreler kümesi, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ ve L bir tam kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.1. $\mathrm{F}:\mathrm{A} \to \mathrm{L}^{\mathrm{U}}$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde L-bulanık esnek küme denir. Eğer L=[0,1] alınırsa L-bulanık esnek küme yerine bulanık esnek küme denir.

Örnek 3.1. L=[0,1] ve F: $\mathbb{Z} \to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $\forall n,\ x \in \mathbb{Z}$ için $\mathrm{F}(n): \mathbb{Z} \to \mathrm{L}$ dönüşümü

$$\mathrm{F}(n)(x) := \begin{cases} 1, & 3 \mid n-x \\ \frac{1}{2}, & 3 \mid n-x+1 \\ 0, & 3 \mid n-x+2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde (F,$\mathbb{Z}$) $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

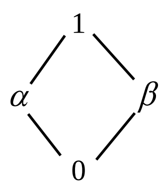
Tanım 3.2. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki L-bulanık esnek küme olsun. (F,A)'ya (G,B)'nin L-bulanık esnek alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$

(ii) $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{G}(x)$.

Bu durum (F,A)$\widetilde{\subseteq}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 3.2. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 1. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesi

F: $\mathbb{N} \to L^{\mathbb{Z}}$, G: $\mathbb{Z} \to L^{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $F(n): \mathbb{Z} \to L$, $G(n): \mathbb{Z} \to L$ dönüşümleri

$$F(n)(x)=\begin{cases} 0, & x<n \\ \alpha, & x\geq n \end{cases} \qquad G(n)(x)=\begin{cases} \beta, & x<n \\ 1, & x\geq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde (F,$\mathbb{N}$)$\tilde{\sqsubseteq}$(G,$\mathbb{Z}$)'dir.

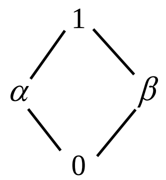
Tanım 3.3. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki L-bulanık esnek küme olsun. (F,A) ve (G,B)'ye eşittir denir. $\Leftrightarrow$ (F,A)$\tilde{\sqsubseteq}$(G,B) ve (G,B)$\tilde{\sqsubseteq}$(F,A).

Tanım 3.4. (F,A) U üzerinde bir L-bulanık esnek küme olmak üzere (F,A)'ya boş L-bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ için $F(x)=0_U$. Bu durum Φ_A notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.5. (F,A) U üzerinde bir L-bulanık esnek küme olmak üzere (F,A)'ya tam L-bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ için $F(x)=1_U$. Bu durum Ω_A notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.6. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. $C=A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x)=F(x)\wedge G(x)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin arakesiti denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\sqcap}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 3.3. G herhangi bir küme olmak üzere $L=\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2. L={0,α,β, 1} kafesi

F: $\mathbb{N} \to L^G$ olmak üzere $\forall a \in \mathbb{N}$, $x \in G$ için $F(a): G \to L$ dönüşümü

$$F(a)(x)=\begin{cases} 1, & x=a \\ \beta, & x\neq a \end{cases}$$

H: $\mathbb{Z} \to L^G$ olmak üzere $\forall b \in \mathbb{Z}$, $x \in G$ için $F(b): G \to L$ dönüşümü

$$H(b)(x)=\begin{cases} \alpha, & x=b \\ 0, & x\neq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (F, $\mathbb{N}$) ve (H, $\mathbb{Z}$) L-bulanık esnek kümeler olup bu kümelerinin arakesiti (F, $\mathbb{N}$)$\tilde{\sqcap}$(H, $\mathbb{Z}$) =(K,$\mathbb{N}$) ise $\forall a \in \mathbb{N}$, $x \in G$ için

$$K(a)(x)=\begin{cases} \alpha, & x=a \\ 0, & x\neq a \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.7. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A$\cup$B ve $\forall x \in$C için,

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x), & x\in \mathrm{A}\text{-}\mathrm{B} \text{ ise}\\ \mathrm{G}(x), & x\in \mathrm{B}\text{-}\mathrm{A} \text{ ise}\\ \mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(x), & x\in \mathrm{A}\cap\mathrm{B} \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin birleşimi denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\cup}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Önerme 3.1. (F,A) U üzerinde L-bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) (F,A)$\tilde{\cup}$(F,A)=(F,A)
(ii) (F,A)$\tilde{\cap}$(F,A)=(F,A)
(iii) (F,A)$\tilde{\cup}\,\Phi_{\mathrm{A}}$ =(F,A)
(iv) (F,A)$\tilde{\cap}\,\Phi_{\mathrm{A}} = \Phi_{\mathrm{A}}$
(v) (F,A)$\tilde{\cup}\,\Omega_{\mathrm{A}} = \Omega_{\mathrm{A}}$
(vi) (F,A)$\tilde{\cap}\,\Omega_{\mathrm{A}}$ =(F,A)

Tanım 3.8. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A×B ve $\forall(x,y)\in$ A×B için $\mathrm{H}(x,y)=\mathrm{F}(x)\wedge\mathrm{G}(y)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\wedge}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.9. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A×B ve $\forall(x,y)\in$A×B için $\mathrm{H}(x,y)=\mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(y)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\vee}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.10. (F,A) G_1 üzerinde (H,B) G_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A×B ve $\forall(x,y)\in$A×B için $\mathrm{G}(x,y)=\mathrm{F}(x)\times\mathrm{H}(y)$ şeklinde tanımlanan (G,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (H,B) L-bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\times}$(H,B) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 3.4. L=[0,1] kafesinde F: $\mathbb{Z}\to\mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ ve H: $\mathbb{Z}\to\mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ iki dönüşüm olmak üzere $\forall x,y,a,b\in\mathbb{Z}$ ve $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$ için

$$\mathrm{F}(x)(a)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a\\ \frac{1}{2}, & x-a=2k+1\end{cases}\qquad \mathrm{H}(y)(b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & 4\mid y-b+1\\ 1, & 4\mid y-b+2\\ 0, & 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (F,$\mathbb{Z}$) ve (H,$\mathbb{Z}$) L-bulanık esnek kümeler olup bu kümelerinin kartezyen çarpımı (G, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$)=(F, $\mathbb{Z}$)$\tilde{\times}$(H, $\mathbb{Z}$) ise $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ve $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$ için

$$\mathrm{G}(x,y)(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a,\ 4\mid y-b,\ 4\mid y-b+1,\ 4\mid y-b+2 \text{ veya } x-a=2k+1, 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & x-a=2k+1,\ 4\mid y-b+1,\ 4\mid y-b+2\\ 0, & 2\mid x-a,\ 4\mid y-b+3 \text{ veya } x-a=2k+1,\ 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.11. (G,·) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A×B ve $\forall(x,y)\in$ A×B için $\mathrm{K}(x,y)=\mathrm{F}(x)\cdot\mathrm{H}(y)$ şeklinde tanımlanan (K,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (H,B) L-bulanık esnek kümelerinin çarpımı denir. Bu durum $(F,A)\tilde{\cdot}(H,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.12. (G,·) bir grup, (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek küme olsun. $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{E}(x)=\mathrm{F}(x)^{-1}$ şeklinde tanımlanan (E,A) L-bulanık esnek kümesine (F,A) L-bulanık esnek kümesinin tersi denir. Bu durum $(F,A)^{-1}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.13. (G,·) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A∩B ve $\forall x\in$ A∩B için $\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\cdot\mathrm{H}(x)$ şeklinde tanımlanan (K,C) L- bulanık esnek kümesine (F,A) ve (H,B) L-bulanık esnek kümelerinin arakesit çarpımı denir. Bu durum $(F,A)\tilde{\cdot}_{\cap}(H,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.14. (G,·) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. C=A∪B ve $\forall x\in$ A∪B için

$$\mathrm{K}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x), & x\in \text{A-B}\\ \mathrm{H}(x), & x\in \text{B-A}\\ \mathrm{F}(x)\cdot\mathrm{H}(x), & x\in \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (K,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (H,B) L-bulanık esnek kümelerinin birleşim çarpımı denir. Bu durum $(F,A)\tilde{\cdot}_{\cup}(H,B)$ notasyonu ile gösterilir.

4. L-BULANIK ESNEK GRUPLAR

Aktaş ve Çağman (2007) tarafından esnek gruplar için yapılmış olan mevcut çalışma göz önüne alındığında esnek grupların, bulanık alt gruplarla ilişkilendirilebileceği gözlemlendi. Bu bölümde esnek gruplar için yapılmış olan çalışma da göz önüne alınarak ve L-bulanık esnek kümeler yardımıyla yeni bir kavram olarak L-bulanık esnek grup ve L-bulanık esnek alt grup tanımları verilerek L-bulanık esnek grupların yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Tanım 4.1. G bir grup, (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek küme ve L bir tam kafes olmak üzere $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ G'nin L-bulanık alt grubu ise (F,A)'ya G üzerinde bir L-bulanık esnek grup denir. Eğer L=[0,1] ise (F,A)'ya G üzerinde bulanık esnek grup denir.

Teorem 4.1. $(L,\leq)$ bir tam kafes, $(G,\cdot)$ bir grup, $\varnothing \neq H \subseteq G$ ve $t \in L$ olsun. (F,A) L-bulanık esnek kümesi $\forall x \in G$ ve $a \in A$ için $F(a)(x)=\begin{cases} t, & x\in H \\ 0, & x\notin H \end{cases}$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur $\Leftrightarrow$ H<G

İspat:

"$\Rightarrow$" (F,A) kümesi G üzerinde L-bulanık esnek grup olduğundan $\forall a \in G$ için F(a) G'nin L-bulanık alt grubudur. Teorem 2.2 ile H<G 'dir.

"$\Leftarrow$" H<G ve Teorem 2.2 ile $\forall a \in A$ için F(a), G'nin L-bulanık alt grubudur. Buradan (F,A) kümesi G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Örnek 4.1. $(L,\leq)$ bir tam kafes, $(G,\cdot)$ bir grup ve $e \in G$, G'nin birim elemanı olsun. $F:G\to L^G$, $F(g):G\to L$ olmak üzere $\alpha \in L$ ve $\forall x \in G$ için $F(g)(x)=\begin{cases} 1, & x=e \\ \alpha, & x\neq e \end{cases}$
şeklinde tanımlanan (F,G) kümesi G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Çözüm: (F,G) kümesinin G üzerinde L-bulanık esnek grup olduğunu göstermek için $\forall g \in G$ için $F(g)$ 'nin G'nin L-bulanık alt grubu olduğunu göstermemiz gerekir. $\forall x,y \in G$ için $F(g)(x^{-1})=F(g)(x)$ olduğu açıktır. $F(g)(x)\wedge F(g)(y)\leq F(g)(x\cdot y)$ olduğunu gösterelim. Eğer x =e veya y =e ise eşitsizlik doğrudur. Eğer $x\neq e$ ve $y \neq e$ ise $F(g)(x)\wedge F(g)(y)=\alpha\wedge\alpha\leq\alpha\leq F(g)(x\cdot y)$ olur. Yani $\forall g \in G$ için $F(g)$ G'nin L-bulanık alt grubudur ve buradan (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Örnek 4.2. L={$0,\alpha,\beta,1$} kafesinde $0<\alpha<\beta<1$ sıralaması verilsin. F: $A\to L^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$ olmak üzere $\forall$ $a\in A$ için $F(a)(\bar{0},\bar{0})=1$, $F(a)(\bar{1},\bar{0})=F(a)(\bar{0},\bar{1})=\alpha$, $F(a)(\bar{1},\bar{1})=\beta$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesi $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar ise (F,A)$\tilde{\cap}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

İspat: (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olduğundan $\forall x \in A\cap B$ için F(x) ve H(x) G'nin L-bulanık alt grubudur. Teorem 2.1 ile $\forall x \in A\cap B$ için F(x)$\wedge$H(x) G'nin L-bulanık alt grubudur. Buradan (F,A)$\tilde{\cap}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.3. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olsun. Eğer $A\cap B=\varnothing$ ise (F,A)$\tilde{\cup}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

İspat: Tanım 3.7 ile (F,A)$\tilde{\cup}$(H,B)=(K,C) olmak üzere $A\cap B=\varnothing$ ise $\forall x \in C$ için $x\in$ A-B veya $x \in$ B-A şeklindedir. Eğer $x\in$ A-B ise K(x)=F(x) G'nin L-bulanık alt gubudur. Eğer $x\in$ B-A ise K(x)=H(x) G'nin L-bulanık alt gurubudur. Buradan (F,A)$\tilde{\cup}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.4. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{H}(x)$ veya $\mathrm{H}(x) \leq \mathrm{F}(x)$ ise (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

İspat: Tanım 3.7 ile (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B)=(K,C) ve C=A∪B olmak üzere $\forall x \in \mathrm{C}$ için

$$\mathrm{K}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x), & x \in \mathrm{A-B} \\ \mathrm{H}(x), & x \in \mathrm{B-A} \\ \mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x), & x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

şeklindedir. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olduğundan dolayı $\forall x \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{H}(x)$ G'nin L-bulanık alt gruplarıdır. Eğer $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{H}(x)$ veya $\mathrm{H}(x) \leq \mathrm{F}(x)$ olursa $\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x)$'in G'nin L-bulanık alt grubu olduğu açıktır. Dolayısıyla $\forall x \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{K}(x)$ G'nin L-bulanık alt grubudur. Buradan (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.3 ve Teorem 4.4'de özel şartlar altında iki L-bulanık esnek grubun birleşiminin L-bulanık esnek grup olduğu görüldü. Fakat bu şartlar kaldırıldığında iki L-bulanık esnek grubun birleşimi L-bulanık esnek grup olmayabilir. Yani (F,A) ve (H,B) G üzerinde herhangi iki L-bulanık esnek gruplar ise (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B) G üzerinde her zaman L-bulanık esnek grup olmayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 4.3. G={1,2,3,4} grubu

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Tablo 1. (G, ·) grubu

ikili işlemi ile dikkate alınıyor. (F,A) ve (H,A) L-bulanık esnek grupları $\forall x \in \mathrm{A}$ için

$\mathrm{F}(x)(1)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{F}(x)(2)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{F}(x)(3)=\mathrm{F}(x)(4)=\frac{3}{8}$

$\mathrm{H}(x)(1)=\frac{7}{8}$, $\mathrm{H}(x)(2)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{H}(x)(3)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{H}(x)(4)=\frac{1}{4}$

şeklinde tanımlanırsa (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B)'nin G üzerinde L-bulanık esnek grup olmadığı görülür.

Çözüm: $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{H}(x)$ L-bulanık alt kümeleri G'nin L-bulanık alt gruplarıdır. Buradan (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruplardır. Fakat $\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x)$ L-bulanık alt kümesini göz önüne alırsak, $4 \in \mathrm{G}$ için

$$(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x))(4)=\frac{3}{8} \leq (\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x))(2) \wedge (\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x))(3)=\frac{5}{8}$$

elde edilir. Buradan $\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{H}(x)$'in G'nin L-bulanık alt grubu olmadığı görülür. Buradan (F,A)$\widetilde{\cup}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek grup değildir.

Teorem 4.5. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar ise (F,A)$\widetilde{\wedge}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

İspat: (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olduğundan $\forall x \in$ A ve $\forall y \in$ B için F(x) ve H(y) G'nin L-bulanık alt gruplarıdır. Teorem 2.1 ile F(x)∧H(y) G'nin L-bulanık alt grubudur. Tanım 3.8 ile (F,A)$\widetilde{\wedge}$(H,B) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.6. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde L-bulanık esnek gruplar ise (F,A)$\widetilde{\times}$(H,B) G×K üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.7. (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olsun. Bu takdirde, (F,A)$\tilde{\cdot}$(H,A) G üzerinde bir L-bulanık esnek gruptur $\Leftrightarrow$ (F,A)$\tilde{\cdot}$(H,A)=(H,A)$\tilde{\cdot}$(F,A)

İspat:
"$\Rightarrow$" (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar olduğundan $\forall x \in$ A için F(x) ve H(x) G'nin L-bulanık alt gruplarıdır. Teorem 2.3 ile F(x)·H(x) G'nin L-bulanık alt grubu ise F(x)·H(x)=H(x)·F(x)'dir. Buradan (F,A)$\tilde{\cdot}$(H,A)=(H,A)$\tilde{\cdot}$(F,A) olur.
"$\Leftarrow$" Teorem 2.3 ile $\forall x \in$ A için F(x)·H(x)=H(x)·F(x) ise F(x)·H(x) G'nin L-bulanık alt grubudur. Buradan (F,A)$\tilde{\cdot}$(H,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Tanım 4.2. (G,·) bir grup, A bir küme ve $\forall x \in$A için $\mathrm{F}(x) = 1_{\{e\}}$ ise (F,A) L-bulanık esnek kümesine G üzerinde birim L-bulanık esnek küme denir.

Teorem 4.8. L sonsuz ∨-dağılımlı bir kafes, (G,·) bir grup ve (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek küme olsun. Bu taktirde (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur ⇔

i) (F,A)$\tilde{\cdot}_{\cap}$(F,A))$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A)

ii) (F,A)$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A)$^{-1}$

İspat:
"$\Rightarrow$" (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek grup olduğundan $\forall a \in$ A için F(a) G'nin L-bulanık alt grubudur. Dolayısıyla $\forall x \in$G için (F (a)·F(a))(x)≤F(a)(x) dir. Buradan (F,A)$\tilde{\cdot}_{\cap}$(F,A))$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A) dir. Diğer yandan $\forall x \in$G için F(a)(x)≤F(a)(x^{-1})=F(a)$^{-1}$(x) olduğundan (F,A)$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A)$^{-1}$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $\forall x, y, z \in$ G için $z = x \cdot y$ olsun.

(F,A)$\tilde{\cdot}_{\cap}$(F,A))$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A) olduğundan $\forall a \in$ A için F(a):G⟶L dönüşümü

F(a)(z)≥(F(a)·F(a))(z)=$\bigvee\{\mathrm{F}(a)(x) \wedge \mathrm{F}(a)(y) \mid y, z \in \mathrm{G}, y.z = x\}$

$\geq \mathrm{F}(a)(x) \wedge \mathrm{F}(a)(y)$ şeklindedir.

Buradan F(a)(z)≥ $\mathrm{F}(a)(x) \wedge \mathrm{F}(a)(y)$ olur. Diğer taraftan (F,A)$\widetilde{\sqsubseteq}$(F,A)$^{-1}$ olduğundan $\forall x \in$G için F(a)(x)≤F(a)$^{-1}$(x)=F(a)(x^{-1}) dir. Dolayısıyla $\forall a \in$ A için F(a) G'nin L-bulanık alt grubudur. Buradan (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.9. (G,·) bir grup ve (F,A) G üzerinde birim L-bulanık esnek küme ise (F,A) G üzerinde L-bulanık esnek gruptur.

Tanım 4.3. (F,A) ve (H,K) G üzerinde L-bulanık esnek gruplar ve (H,K)$\widetilde{\subseteq}$(F,A) ise (H,K)'ya (F,A)'nın L-bulanık esnek alt grubu denir. Bu durum (H,K)$\widetilde{<}$(F,A) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 4.4. G bir grup ve $e \in G$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $F(x) = 0_G$, $H(x) = \chi_{\{e\}}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ve (H,A) L-bulanık esnek kümeleri için (F,A)$\widetilde{<}$(H,A)'dır.

Çözüm: $\forall x \in A$ için $F(x)$ ve $H(x)$ G' nin L-bulanık alt grubudur. Dolayısıyla (F,A) ve (H,A) L-bulanık esnek kümeleri G üzerinde L-bulanık esnek gruplardır. Üstelik $\forall a \in G$ için $F(x)(a) \leq H(x)(a)$'dır. Buradan (F,A)$\widetilde{<}$(H,A) olur.

Teorem 4.10. (F,A) G üzerinde bir L-bulanık esnek grup, $\{(H_i, K_i) \mid i \in I\}$ (F,A)'nın L-bulanık esnek alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde $\widetilde{\cap}_{i\in I}(H_i, K_i)$ (F,A)'nın L-bulanık esnek alt grubudur.

İspat: Açık olarak $\cap_{i\in I} K_i \subseteq$A'dır. $\forall i \in I$ için $(H_i, K_i) \widetilde{<}$ (F,A) olduğundan dolayı $\widetilde{\cap}_{i\in I}(H_i, K_i)$ (F,A)'nın L-bulanık esnek alt grubudur.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada L-bulanık esnek grup tanımı verilerek esnek gruplar için bilinen önemli tanım ve teoremler bu alana taşınmaya çalışılmıştır. Literatürde mevcut çalışmaların bu tanımlarla yeniden yapılandırılabilmesi bakımından katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Zadeh L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353, 1965.

Pawlak Z., Rough sets, Int. J. Inform. Comput. Sci., 11, 341-356, 1982.

Molodtsov D., Soft set theory-first results, Comput. Math. Appl., 37, 19-31, 1999.

Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R., Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45, 555-562, 2003.

Chen D., Tsang E.C.C., Yeung D.S. and Wang X, The parameterization reduction of soft sets and its applications, Comput. Math. Appl., 49, 757-763, 2005.

Pei D. and Miao D., From Soft Sets to Information Systems, IEEE International Conferance on Granular Computing, 2, 617-621, 2005.

Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R., Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 9, 589-602, 2001.

Aktaş H. and Çağman N., soft sets and soft groups, Information Science, 177, 2726-2735, 2007.

Jun Y.B., Soft BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 56, 1408-1413, 2008.

Feng F., Jun Y.B. and Zhao X, Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56, 2621-2628, 2008.

Ali M.I., Feng F., Liu X., Min W.K. and Shabir M., On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553, 2009.

Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island, 1967.

Kaufmann A., Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London, 1975.

Mordeson, J.N. and Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998.

Bhattacharya P.B. and Jain S.K., First Course in Group Theory, New Delhi, 1972.