

Jeodezik ağlarda kaba hatanın bilinmeyen olarak modellenmesi

Utkan Mustafa Durdağ^{1*} 

¹Artvin Çoruh Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Artvin, Türkiye.

Öz: Uyuşumsuz ölçülerin tespitinde sıklıkla kullanılan Baarda ve Pope yöntemlerinde kaba hatalar toplam yanlışlık (additive bias) modeliyle kestirilmektedir. Geleneksel yöntemin aksine uyuşumsuz ölçüler ek bilinmeyen olarak modellenebilmektedir. Bu yaklaşımda bütün ölçülere kuşku bakılmaktadır. Bu nedenle olası bütün kombinasyonların hesaba katılması önem arz etmektedir. Ağdaki ölçü sayısı kadar (n elemanlı) kümeden meydana gelmesi muhtemel en yüksek kaba hata sayısına kadar olan kombinasyonların değerlendirilmesi temeline dayanmaktadır. Bu çalışmanın amacı, kaba hatanın bilinmeyen olarak modellenmesi yaklaşımını jeodezik ağlarda uygulamak ve farklı dağılımlara ait karşılaştırma değerleriyle elde edilen sonuçların güvenilirliğini değerlendirmektir. Geleneksel ve önerilen yaklaşımların gizleme ve batma etkisi senaryolarında da etkinlikleri araştırılmıştır. Bu amaçla; bir jeodezik nivelman ağı simüle edilerek küçük genlikli kaba hataların tespit edilmesine ait ortalama başarı oranları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre kaba hatanın bilinmeyen olarak modellenmesi yaklaşımı geleneksel yöntemlere nazaran yaklaşık %30-40 daha güvenilirdir. Önerilen yöntemde kullanılan üç farklı dağılımdan standart normal dağılım ve Tau dağılımı en yüksek başarı oranına sahiptir. Bununla beraber gizleme ve batma etkisi senaryolarında hem geleneksel hem de önerilen yaklaşıma ait sonuçların yanıltıcı olduğu gözlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kaba Hata, Bilinmeyen parametrelerin modellenmesi, Güvenirlik, Test istatistiği

Modeling outliers as unknown in geodetic networks

Abstract: In the Baarda and Pope methods, frequently used to detect outliers, the total bias additive model estimates the outliers. Unlike the traditional method, outliers can be modeled as additional unknowns. With this approach, all observations are viewed as suspicion. It is, therefore, essential to consider all possible combinations. It is based on evaluating the combinations from the number of observations in the network (n elements) to the highest possible number of outliers that can occur. This study aims to apply the approach of modeling the outliers as unknown in the geodetic network and to evaluate the results' reliability with the comparison values from different distributions. Also, the effectiveness of traditional and proposed approach in the masking and swamping effect scenarios were investigated. For this purpose, mean success rates for detecting small magnitude outliers were calculated by simulating a geodetic leveling network. According to the results, modeling the outliers as unknown is approximately 30-40% more reliable than traditional methods. Among the three distributions used in the proposed method, the standard normal distribution and Tau distribution have the highest success rates. Additionally, it has been noticed that both the conventional and proposed methods produce misleading outcomes in cases involving swamping and masking effects.

Keywords: Outlier, Modelling of unknown parameters, Reliability, Test statistics

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Tel: +90 466 215 1000 / 4639

Geliş Tarihi/Received: 13.08.2023
Kabul Tarihi/Accepted: 09.10.2023



1. Giriş

Jeodezik ölçmelerde aletin okunması, hedefe tatbiki veya ölçülerin kaydedilmesi esnasında yapılan yanlışlıklar sonucunda kaba hatalar ortaya çıkabilir. Bu hataların, ölçümler her ne kadar tekrarlı yapılırsa yapılsın, sonuçlara yansımaları kaçınılmazdır. Kaba hatalı ölçünün varlığı deformasyon, heyelan, yer kabuğu hareketleri gibi jeodezik uygulamalara ait kestirim sonuçlarına yayılarak sonuçların yanlış yorumlanmasına sebep olabilir. Bu sebeple, kaba hataların tespit edilmesi ve ölçü kümesinden dışlanması gerekmektedir. Kaba hataların tespit edilmesinde geleneksel yöntemler sıklıkla başvurulan yöntemlerin başında gelir. Geleneksel Baarda testi (Baarda, 1968) ve Pope testi (Pope, 1976) En Küçük Kareler (EKK) ilkesine dayanır. Robust M-kestirim yöntemleri (Hampel, 1968) ise iteratif EKK şeklinde uygulanmaktadır. Ancak EKK yöntemi model varsayımlarından sapmalara oldukça duyarlıdır (Erdoğan, Hekimoğlu, Durdağ, & Öcalan, 2019; Hampel, Ronchetti, Rousseeuw, & Stahel, 1986). Örneğin; sadece bir uyuşumsuz ölçü dahi, örneklem ortalaması ve örneklem standart sapması gibi klasik istatistikler üzerinde sınırsız bir etkiye sahiptir (Hampel vd.,1986; Maronna, Martin, & Yohai, 2006). Rousseeuw ve Leroy (1987) tarafından sadece bir uyuşumsuz ölçünün, EKK'nin sonuçlarını bozacağı ve n sonlu örneklem için gözlem sayısı iken, kırılma noktasının $1/n$ 'ye eşit olduğu belirtilmiştir. Diğer bir deyişle örnekleme bulunan bir kaba hata değeri sonsuza gittikçe etki fonksiyonu da sonsuza gitmektedir (Durdağ, Hekimoğlu, & Erdoğan, 2022). Buna ilaveten birçok istatistiksel yöntem bir kaba hatanın belirlenmesinde başarılı sonuçlar vermesine karşın birden çok kaba hatanın ortaya çıktığı durumlarda yetersiz kalabilmektedir (Hekimoğlu & Koch, 2000; Xu, 2005). Ancak eğer ölçüler arasında korelasyon varsa örnekleme tek bir kaba hata dahi yanlış ölçünün kaba hatalı tespit edilmesine neden olabilir (Hekimoğlu, Erdoğan, Soycan, & Durdağ, 2014). Buna ek olarak Baselga (2007) önsel varyansın bilinmediği durumda geleneksel yöntemle (Pope testi) ağda yalnızca bir kaba hatanın belirlenebileceğini göstermiştir. Bunun yanı sıra; birden fazla kaba hatalı ölçü, gizleme ve batma etkisine neden olmaktadır. Karar aşamasında, batma ve gizleme etkisine maruz kalan ölçüler birinci tip hata (yanlış negatif) ve ikinci tip hata (yanlış pozitif) olarak ortaya çıkabilir. Durdağ vd. (2022) tarafından ortaya çıkan bu tip hatalar EKK'nin yayma etkisi olarak ifade edilerek etki fonksiyonu ile ilişkilendirilmiştir. Aynı çalışmada jeodezik ağda yayma etkisinin kısmi redündan bir fonksiyonu olarak sistematik şekilde davrandığı gösterilmiştir.

Geleneksel yöntemler; uyuşumsuz ölçünün toplamsal kaba hata modeline dayalı olarak standartlaştırılmış düzeltme değeri elde edilerek sınır değerle karşılaştırılması temeline dayanmaktadır. Ancak istatistikte kaba hatanın ek bilinmeyen olarak modellendiği yöntemin geleneksel yöntemle kıyasla daha başarılı sonuçlar verdiği Hekimoğlu, Erdoğan ve Erenoğlu (2015) tarafından doğrusal regresyon için kanıtlanmıştır. Bilindiği üzere bir analizden önce hangi ölçünün kaba hatalı olduğu ile alakalı herhangi önsel bilgiye ulaşmak imkansızdır. Bu nedenle ölçülerin hepsi potansiyel kaba hatalı ölçü adayları olarak ele alınmalıdır. Ayrıca bu yöntemde yinelemeli araştırma ile olası bütün kombinasyonların değerlendirilmesi dikkate alınmaktadır. Genel anlamda n ölçü sayısı ve k kaba hata sayısı iken C_k^n olası kombinasyonları dikkate alınmalıdır. İlk olarak bir kaba hatanın araştırıldığı durumda C_1^n kombinasyonu dikkate alınır ve aralarındaki en küçük varyansa sahip ölçüye ait bilinmeyen değeri sınır değerle karşılaştırılır. Daha sonra C_2^n için ikili kombinasyona ait model sonuçları arasından yine en küçük varyansa sahip olan ölçü ikilisi seçilerek bunlara ait bilinmeyenler sınır değerle karşılaştırılır. Bu işlem olası bütün kombinasyonlar için tekrarlanır. Geleneksel yöntemlerde yapılan tekrarlı kaba hata araştırmasında bulunan kaba hatalı ölçü, veri kümesinden atılarak bir sonraki araştırmaya geçilir. Ancak burada bir önceki kombinasyonda işaretlenen kaba hatalı ölçü sonraki kombinasyonlarda dikkate alınmaz. Esas olarak tek başına kaba hatalı gibi davranan bir ölçünün ikili kombinasyonda ortaya çıkmaması olasılığı dikkate alınmaktadır. Bir jeodezik ağda belirlenebilecek maksimum kaba hatalı ölçü sayısı serbestlik derecesinin yarısı ($m \cong f/2$) kadardır (Hekimoğlu vd., 2015). Böylece n (ölçü sayısı) elemanlı kümeden maksimum m elemanlı kombinasyon ($C_1^n, C_2^n, \dots, C_m^n$) dikkate alınmalıdır. Analizlerde kritik değeri aşan bilinmeyenler, her kombinasyon aşaması için potansiyel kaba hata olarak işaretlenir. İlk olarak ölçüler tek tek bilinmeyen olarak modellenir, en

küçük varyansa sahip olanı seçildikten sonra test değeri sınır değerle karşılaştırılır. Eğer test değeri sınır değerden küçükse analiz sonlandırılır, büyükse ilgili ölçü işaretlenir ancak birden fazla kaba hatalı durum olması ihtimali göz önüne alınarak ikinci aşamaya geçilir. Bu aşamada ölçülerin ikişerli şekilde bilinmeyen olarak modellenmesi için n elemanlı ölçü kümesinden 2 elemanlı kombinasyonları dikkate alınır. Tekrar en küçük varyansa sahip ikili ölçü tespit edildikten sonra her birine ait test değeri sınır değerle karşılaştırılır. Eğer en az birisinin test değeri sınır değeri geçemezse analiz sonlandırılır ve bir önceki adımda işaretlenen ölçü kaba hatalı olarak tespit edilir. Ancak iki test değeri de sınır değeri geçerse ilgili ölçüler işaretlenerek üçüncü aşamaya geçilir. Burada ölçülerin üçerli şekilde bilinmeyen olarak modellenmesi için n elemanlı ölçü kümesinden 3 elemanlı kombinasyonları dikkate alınır. Üçlü kombinasyonda en küçük varyansa sahip üçlü ölçüden bir ölçü bilinmeyi bile kritik değer altında kalırsa alternatif hipotez reddedilir ve bir önceki aşamada işaretlenen adaylar kaba hatalı ölçü olarak tespit edilmiş olur. Bu çalışmada önerilen yaklaşımın güvenilirlik sonuçları farklı test istatistikleri için karşılaştırmalı olarak hesaplanmıştır. Önerilen yaklaşımın jeodezik ağda farklı test istatistikleri ile kullanılabilirliği ve geleneksel yöntemlere göre ne derece başarılı olduğu sorularına cevap aranmıştır. Bununla beraber batma ve gizleme etkilerinin hem geleneksel hem de önerilen yöntemlerdeki tepkisi araştırılmıştır. Ancak batma ve gizleme etkileri geleneksel yöntemlerde olduğu gibi önerilen yöntemde de ağın geometrik yapısının zayıflığından faydalanarak ortaya çıkmaktadır.

2. Dengelemenin Matematiksel Modeli

Gauss Markov modeli doğrusallaştırılmış fonksiyonel model ve stokastik model ile,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_{ll} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ll} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (2)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, \mathbf{v} ölçülere getirilecek düzeltmeler vektörünü, \mathbf{A} katsayılar matrisini, $\hat{\mathbf{x}}$ kestirilmiş küçültülmüş bilinmeyenler vektörünü, \mathbf{l} küçültülmüş ölçüler vektörünü, \mathbf{C}_{ll} ölçülere ait varyans-kovaryans matrisini, σ_0^2 ise önsel varyansı, \mathbf{Q}_{ll} ölçülerin ağırlık katsayıları (kofaktör) matrisini ve \mathbf{P} ölçülerin ağırlık matrisini temsil etmektedir. EKK düzeltmelerin ağırlıklı karelerini minimum ($\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$) yapma ilkesine (Grossmann, 1969; Koch, 1999) dayanarak fonksiyonel ve stokastik modele ait normal denklemler,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (3)$$

eşitliğiyle verilmektedir. En uygun yansız kestirici olarak ifade edilen (Gauss, 1823, s.21; Koch, 1999, s.153; Markov, 1912, s.218) EKK yönteminin bilinmeyenler vektörü,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (4)$$

olmak üzere bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları (kofaktör) matrisi $\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ eşitliğiyle elde edilir. Düzeltmelerin ağırlık katsayıları matrisi ve birim ağırlıklı ölçünün sonsal standart sapması sırasıyla,

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{P}^{-1} - (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (5)$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f}} \quad (6)$$

eşitlikleriyle hesaplanır. Burada f serbestlik derecesini ifade etmektedir (Koch, 1999).

2.1 Uyuşumsuz Ölçü Testi

Ölçülerin normal dağılımlı olması beklenmesine rağmen, aykırı değerlerin tespit edilmesi için ölçülerin farklı bir dağılımdan geldiği varsayımı dikkate alınmalıdır. Çünkü tespit edilmeyen kaba hata(lar) bilinmeyen vektörüne, düzeltme vektörüne ve sonsal varyans gibi birçok kestirim parametresine yayılım gösterir. Bu sebeple kaba hatalı ölçülerin tespiti ve dengeleme hesabından dışlanması, sonuçların güvenilirliği açısından önem arz etmektedir. Jeodezi’de uyuşumsuz ölçülerin tespitinde kullanılan varyans faktörüne ve dağılımına bağlı olarak değişen yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan en sık kullanılan iki yöntemden ilki olan Baarda yönteminde (Data-Snooping), önsel standart sapmayla σ_0 birlikte,

$$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \quad (7)$$

eşitliği kullanılarak test büyüklüğü elde edilir (Baarda, 1968). Burada $q_{v_i v_i} = (\mathbf{Q}_{vv})_i$ olarak yazılır. Eğer en büyük standartlaştırılmış düzeltme değeri sınır değerden büyük ($w_i > z_{(1-\alpha/2)}$) ise, ilgili ölçü kaba hatalı olarak kabul edilir. Burada $z_{(1-\alpha/2)}$ standart normal dağılımın tablo değeridir ve α için 0.001 seçilir. İkinci olarak Pope yönteminde, eğer σ_0^2 önsel varyansı için güvenilir bir değer alınamıyorsa, kaba hatalardan muhtemelen etkilenmiş s_0^2 sonsal varyans değeri kullanılarak τ (Tau) dağılımlı test büyüklüğü,

$$T_i = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \quad (8)$$

şeklinde hesaplanır (Pope, 1976). En büyük studentleştirilmiş düzeltmeye sahip gözlem seçilir ve sınır değerle karşılaştırılarak test edilir. Sınır değer $\tau_{f,1-\alpha_0/2}$ olmak üzere, burada f serbestlik derecesini, n ölçü sayısını göstermektedir. Ayrıca α yanılma olasılığı iken $\alpha_0 = \alpha/n$ olarak hesaplanır. Eğer seçilen test büyüklüğü sınır değerden büyükse ($T_i > \tau_{f,1-\alpha_0/2}$) ilgili ölçü kaba hatalı olarak kabul edilir. Gözlemlerin birden fazla uyuşumsuz ölçü içermesi ihtimaline karşın testler yinelemeli olarak kullanılır. Kaba hatalı ölçü gözlemden dışlanarak kalan ölçülerle yeniden dengeleme yapılır. Uyuşumsuz ölçü bulunmayıncaya kadar bu işlem tekrarlanır. Bununla beraber EKK yöntemine alternatif olacak Kaba Hatanın Bilinmeyen Olarak Modellenmesi (KHBOM) bir sonraki başlıkta sunulacaktır.

3. Kaba Hatanın Bilinmeyen Olarak Modellenmesi

Eşitlik 1’de verilen Gauss Markov modeli, ek bilinmeyen parametreleri barındıran vektör $\hat{\mathbf{e}}$ ve tasarım matrisi \mathbf{M} ile aşağıdaki şekilde genişletilir:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = [\mathbf{A} \ \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ll} = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{ll} \quad (9)$$

burada σ^2 genişletilmiş modele ait birim ağırlıklı varyansı, $\hat{\mathbf{e}}$ modellenen kaba hata vektörünü temsil etmektedir. Eğer, $j = 1 \dots n$ iken l_j ölçüsünde bir adet Δ_j kaba hata ortaya çıkarsa, $\hat{\mathbf{e}} = \Delta_j$ olmak üzere $\mathbf{e}_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ ve $\mathbf{M} = \mathbf{e}_j$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda \mathbf{e}_j vektöründe j bileşeni bir değerini alır. Ayrıca \mathbf{A} matrisindeki j ölçüsüne ait satır vektörü \mathbf{A}_j olmak üzere $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j, \dots]^T$, ölçü eşitliği,

$$\mathbf{l}_j + \mathbf{v}_j = \mathbf{A}_j^T \hat{\mathbf{x}} + \hat{\Delta}_j \quad (10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Arda kalan ölçüler ($k = 1, 2, \dots, n$) ve $k \neq j$ için $\mathbf{l}_k + \mathbf{v}_k = \mathbf{A}_k^T \hat{\mathbf{x}}$ eşitliği yazılabilir. Birden fazla kaba

hatalı ölçü varsa,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = [\hat{\Delta}_j, \hat{\Delta}_{j+1}, \dots, \hat{\Delta}_t]^T, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_t]^T \quad (11)$$

halini alır. Eşitlik 9'da verilen model Koch (1999) tarafından ayrıcalıklı Gauss-Markov modeli, Cook ve Weisberg (1982) tarafından ortalama kaydırma modeli olarak tanımlanmıştır. Genişletilmiş modelin ek bilinmeyen parametreler kestirimi:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad (12)$$

olmak üzere, burada;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1})^{-1} & -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{S} \\ -\mathbf{S} \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{M}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{M}]^{-1} = (\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P} \mathbf{M})^{-1} \quad (14)$$

açık şekilde yazılabilir. Böylece kestirilmiş kaba vektörü,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{S} \mathbf{M}^T \mathbf{P} (\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{l} \quad (15)$$

eşitliği kullanılarak elde edilebilir. Eşitlik 1'de verilen Gauss Markov modeli için düzeltmeler,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l} = (\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) (-\mathbf{l}) \quad (16)$$

eşitliğiyle verilir. Eşitlik 16'nın sağ tarafındaki $(\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) (-\mathbf{l})$ ifadesi $(-\mathbf{v})$ olarak Eşitlik 15'te yerine yazılırsa,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{S} \mathbf{M}^T \mathbf{P} (\mathbf{E} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{l} = -\mathbf{S} \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (17)$$

olur. Son olarak Eşitlik 14'te \mathbf{S} açık olarak Eşitlik 17'de yerine konursa ek bilinmeyen parametre vektörü,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = -(\mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (18)$$

ile bulunabilir (Koch, 1999).

3.1 Test İstatistiği Adımları

Tüm ölçülerin aynı normal dağılıma ait olduğunu gösteren sıfır hipotezi ve buna karşın aykırı değerlerin varlığı durumundaki alternatif hipotez,

$$H_0: E\{l\} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad (19a)$$

$$H_A: E\{l\} = [\mathbf{A} \ \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \quad (19b)$$

şeklinde yazılır. Olası alternatif hipotez farklı varyansa ve beklenen değere sahip dağılımdan kaynaklanıyor olabilir. Bu durum doğru alternatif hipotez özelliklerine ulaşmanın uygulamaya bağımlı olduğunu göstermektedir. Öyleyse; alternatif hipotezin doğru tanımlanması için kaba hatalı ölçülerin tüm olası kombinasyonları dikkate alınmalıdır. n gözlem sayısı, b aykırı değer sayısı iken tüm olası alternatif hipotezler C_b^n kombinasyonu ile belirlenir. İlk olarak ölçülerin modelde tek tek

bilinmediği varsayılır. Katsayılar matrisindeki her bir satır için kestirilmiş ek bilinmeyenler $\hat{\epsilon}$ yeniden yazılarak her bir ölçü için tekrarlı olarak hesaplanır. Böylece, her artık değer vektörüne ait birim ağırlıklı varyanslar şu şekilde hesaplanır:

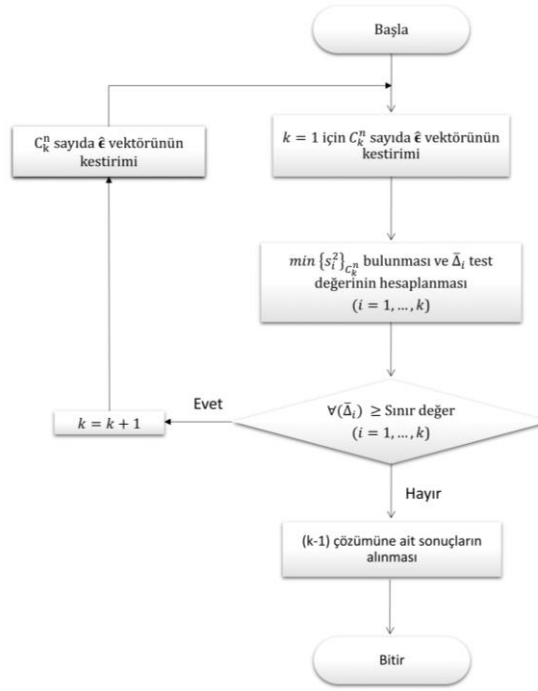
$$\hat{s}_i^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u_k}; \quad i = 1 \dots n \quad (20)$$

burada \hat{s}_i^2 sonsal varyansı, $u_k = u + 1$ eşitlik 9'da hesaplanan bilinmeyen sayısını göstermektedir. Hesaplanan sonsal varyans kümesi elemanı C_1^n kombinasyon sayısı kadardır. Sıfır hipotezinin kabul veya reddedilmesinde uygulanacak test adımları aşağıda detaylandırılacaktır. Ölçülerin tek tek modelde bilinmeyen olarak değerlendirilmesi aşaması sonrasında H_0 reddedilirse bu kez ölçüler ikişer ikişer modelde bilinmeyen olarak yer alır. Daha sonra ölçülerin üçerli, dörderli şekilde kombinasyonları aynı koşul göz önüne alınarak araştırmaya devam edilir. Bir jeodezik ağda belirlenebilecek maksimum kaba hatalı ölçü sayısı serbestlik derecesinin ($m \cong f/2$) yarısı kadardır. Böylece bu işlem n elemanlı ölçü kümesinden m elemanlı kombinasyonları C_m^n hesaplanana kadar devam edebilir.

Hekimoğlu vd. (2015) regresyon analizinde test büyüklüğünü ek bilinmeyen değeri Δ_k olarak hesaplayıp sınır değerle karşılaştırmaktadır. Bu çalışmada ise bilinmeyen değer standartlaştırılarak test büyüklüğü hesaplanmıştır. Hangi ölçünün kaba hatalı olduğunu tanılamak için her bir kombinasyon adımına ait en küçük varyansa sahip ölçü(ler) belirlenir. İlgili ölçü veya ölçülere ait standartlaştırılmış bilinmeyen değeri kritik değerle karşılaştırılır. Örneğin bir kaba hata araştırması aşamasında C_1^n kombinasyonu arasından en küçük varyans $\min \{\hat{s}_i^2\} = \hat{s}_k^2$ iken standartlaştırılmış Δ_k değeri sınır değer ile karşılaştırılır. Burada Δ_k için standartlaştırılmış değer $\bar{\Delta}_k = |\Delta_k| / (\hat{s}_k \sqrt{Q_{x_i x_i}})$ eşitliği ile elde edilebilir. Eğer sıfır hipotezi kabul edilirse algoritma işlemi sonlandırılır. Ancak eğer $\bar{\Delta}_k$ değeri sınır değerden büyükse H_0 reddedilir, k ölçüsü kaba hatalı olarak işaretlenir ve model iki potansiyel kaba hatanın var olduğu durum için genişletilir. Katsayılar matrisi bu sefer C_2^n kombinasyonuna ait sonsal varyansları hesaplamak için yeniden yazılır. Burada her bir kombinasyon için yapılan tanılama işlemi birbirinden bağımsız olarak yapılır. Örneğin; n elemanlı ölçü kümesinden iki elemanlı kombinasyona ait kaba hatanın araştırılmasında bir önceki aşamada işaretlenen kaba hatalı ölçü dikkate alınmaz. Daha sonra kombinasyonlar arasından en küçük varyansa sahip iki ölçünün test değerleri $(\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_j)$ $i = 1 \dots n$ ve $j = 1 \dots n$ için $i \neq j$ olmak üzere, kritik değerle karşılaştırılır. Her iki değer de kritik değerden büyükse ilgili ölçüler kaba hatalı olarak işaretlenir. Aynı araştırma, üçlü kombinasyon C_3^n için yapılarak en küçük varyansa sahip üç ölçünün test değerleri sınır değerle karşılaştırılır ve eğer üç değer de kritik değeri aşarsa kaba hatalı olarak işaretlenirler. Bu işlem olası bütün kaba hatalı ölçülerin araştırılmasına kadar her bir kombinasyon adımında tekrar edilir. En küçük varyansa sahip ölçülere ait kaba hata barındıran ek bilinmeyen vektör elemanlarının test değerleri kritik değerle karşılaştırılır. Eğer ilgili test değerlerinden en az bir tanesi bile kritik değeri geçemezse H_0 hipotezi kabul edilir ve bir önceki H_0 hipotezinin reddedildiği adımda işaretlenen ölçüler kaba hatalı olarak kabul edilir. Yöntemin işlem adımlarını gösteren akış diyagramı Şekil 1'de gösterilmektedir.

EKK yöntemine ve rastgele hatalar kuramına dayalı dengeleme için istatistiksel testlerde yaygın olarak kullanılan bazı tek boyutlu ve sürekli dağılımlar vardır (Kreyszig, 1968). İlk olarak rastgele ölçülerin en yaygın dağılım şekli olan normal dağılım dikkate alınmıştır. Standartlaştırılmış düzeltmelerin karşılaştırılması için istatistiki testlerde sıklıkla kullanılan güven düzeyleri hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra t-dağılımı $f \rightarrow \infty$ için beklenen değeri $\mu = 0$ ve standart sapması $\sigma = 1$ olacak şekilde standart normal dağılıma dönüşür (Demirel 2003; Schaffrin & Wang, 1994). Pratikte $f \geq 30$ koşulu sağlandığında t-dağılımının standart normal dağılıma yakınsadığı kabul görmektedir. Son olarak Tau-dağılımı ele alınmıştır (Pope, 1976). Her ne kadar büyük ölçü dizileri için üç dağılımın çakışması ve test yöntemlerinin özdeş sonuç vermesi beklense de uygulamada bahsedilen büyük ölçü dizilerinin elde edilmesi hem zaman hem ekonomik açıdan olası değildir. Buna ek olarak yine büyük ölçü dizilerinde 0.001 anlamlılık seviyesi tercih edilmektedir. Ancak güven düzeyinin yüksek olması testin

güçüyle ters orantılıdır.



Şekil 1: KHBOM için akış diyagramı

Bahsi geçen bu üç dağılıma ait standartlaştırma adımları farklı varyans faktörlerine dayanmasıyla farklı güven sınırlarına sahiptir. İlgili güven düzeyleri ve sınırları ilgili nivelman ağı için hesaplanmıştır. Bu değerler KHBOM için ilk iterasyonda hesaplanan güven sınırı değerlerini barındırmaktadır ve her iterasyonda bilinmeyen sayısı, serbestlik derecesi değiştiği için yeniden hesaplanarak analize devam edilmiştir. Bu çalışmada farklı dağılımlara ait karşılaştırma değerleri dikkate alınarak önerilen yöntem ve geleneksel yöntem için başarı oranları karşılaştırılmıştır. Üç dağılım için de iki yanlı en sık kullanılan güven düzeyleri için kritik değerler dikkate alınmıştır.

4. Gizleme ve Batma Etkisi

Kaba hata değeri l^b iken $\bar{\mathbf{I}}$ kaba hatalı ölçü vektörü,

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}' + \Delta \mathbf{I} \quad (21)$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta \mathbf{I}$ kaba hata vektörünü, örneğin $\Delta \mathbf{I} = [0 \dots l^b \dots 0]$, göstermektedir. Ayrıca, $\boldsymbol{\varepsilon}$ normal dağılmış rastgele hatalı ölçü vektörü ile \mathbf{I} hatasız ölçü vektörünün toplamı,

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kaba hatalı ölçü vektörü için,

$$\hat{\mathbf{x}}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{I}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{I}) \quad (23)$$

bilinmeyen vektörü elde edilir. Kaba hatasız durum dikkate alındığında,

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}' \quad (24)$$

eşitliği yazılabilir. İki bilinmeyen vektörünün farkı,

$$\Delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_b - \hat{\mathbf{x}} \quad (25)$$

iken $\Delta \mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}'$ yazılabilir. Böylece;

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{l} \quad (26)$$

şeklinde düzenlenerek yazılabilir. Burada $\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{B}$ olarak ifade edilirse herhangi i. ölçüde ortaya çıkan bir kaba hatanın bilinmeyen parametrelere olan yayma etkisi daha açık şekilde,

$$\Delta x_j = b_{j1} \Delta l_1 + \dots + b_{ji} \Delta l_i + \dots + b_{un} \Delta l_{n+1} \quad (27)$$

formülüyle gösterilebilir. Burada b_{ji} terimi, $i = 1, 2, \dots, n$ and $j = 1, 2, \dots, u$ olmak üzere, \mathbf{B} matrisinin elemanıdır. Buna ilaveten $\bar{\mathbf{v}}$ kaba hatalı, \mathbf{v} kaba hatasız ölçülerden elde edilen düzeltme vektörleri olmak üzere $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ olarak yazılabilir (Welsch, Heunecke ve Kuhlmann, 2000, s.230). Böylece,

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{l} \quad (28)$$

eşitliği elde edilebilir. Projeksiyon veya şapka matrisi $\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$ olmak üzere,

$$\Delta \mathbf{v} = (\mathbf{H} - \mathbf{E}) \Delta \mathbf{l} = -\mathbf{R} \Delta \mathbf{l} \quad (29)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{R} = \mathbf{H} - \mathbf{E}$ redüdens matrisi \mathbf{E} ise birim matrisi temsil etmektedir. Açık şekilde düzeltmeler için yayma etkisi,

$$\Delta v_i = -r_{i1} \Delta l_1 \dots - r_{ij} \Delta l_j \dots - r_{in} \Delta l_n \quad (30)$$

olarak ifade edilir. Sonuç olarak düzeltme vektörüne redüdens kaynaklı sistematik olarak etki eden formül aşağıdaki şekilde gösterilebilir (Durdağ vd., 2022).

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{l}} = (\mathbf{H} - \mathbf{E}) \bar{\mathbf{l}} = -\mathbf{R} \bar{\mathbf{l}} \quad (31)$$

Yalnızca bir kaba hatanın belirlenmesi daha kolay olsa da, birden fazla kaba hatanın varlığı batma ve gizleme etkilerinin ortaya çıkmasına neden olur. Komşu iki ölçü kaba hatalı iken birinin genliği diğerine göre daha büyükse gizleme etkisinin çıkması daha olasıdır. Örneğin; Eşitlik 30'un sağındaki ikinci terim, birinci terime göre ters işaretli ise, bu iki terim birbirinden çıkarak kaba hatanın gerçek değerinden daha küçük ortaya çıkmasına yani gizlenmesine sebep olur. Böylece kaba hatalı ölçü kaba hatasız gibi görünür ve belirlenmesi mümkün olmaz. Bu ortaya çıkan durum gizleme etkisi olarak ifade edilmektedir (Hadi & Simonoff, 1993; Hekimoğlu, 2006). Kaba hata belirlenmesinde bir diğer önemli husus da batma etkisidir. Eğer l'_k ölçüsü kaba hatasız iken örneğin; \bar{l}_i ve \bar{l}_j 'li terimler aynı işaretli ise, komşu ölçü l'_k ölçüsünün düzeltilmesinin mutlak değeri olduğundan büyük olacak ve kaba hatalı gibi görünecektir (Hekimoğlu, 2006).

Bu çalışmada önerilen modelin batma ve gizleme etkisine karşı ne derece sağlam olacağının incelenmesi amacıyla farklı senaryolar üretilmiştir. Bu amaçla üç farklı etkiye ait senaryo Tablo 1'de gösterilmiştir. İlk olarak "sign" işaret fonksiyonu

kullanılarak kaba hatanın hangi işaret alacağı rastgele seçilmektedir. İşaret fonksiyonu;

$$\text{sign}(t_1) = \begin{cases} +\Delta_j, & t_1 > 0 \\ -\Delta_j, & t_1 \leq 0 \end{cases} \quad (32)$$

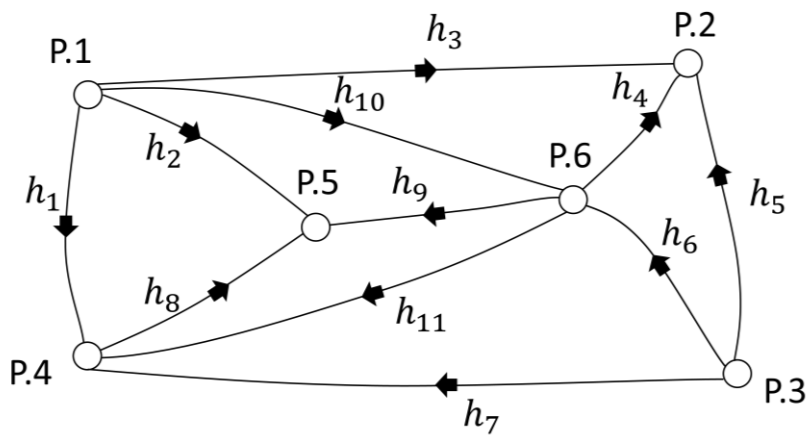
olarak yazılır. Burada t_1 düzgün dağılımlı olmak üzere kaba hata toplamda 5 000 farklı örneklem için rastgele işaretli olarak üretilir. Ancak burada her bir örneklem için; I. İki kaba hatanın aynı işaretli ve II. İki kaba hatanın farklı işaretli üretilmesi senaryoları dikkate alınarak batma ve gizleme etkilerinin geleneksel ve önerilen yaklaşımlar için başarı oranları hesaplanmıştır.

Tablo 1: Gizleme ve batma etkisi senaryoları

Etki Türü	Senaryo
Batma Etkisi	Kaba hatanın aynı işaretli üretilmesi
Gizleme Etkisi	Kaba hatanın farklı işaretli üretilmesi
Rastgele Etki	Kaba hatanın rastgele işaretli seçilmesi

5. Nivelman Ağı Simülasyonu

Geleneksel yöntemlerin ve KHBOM yaklaşımının Ortalama Başarı Oranlarını (OBO) hesaplamak amacıyla jeodezik nivelman ağı simüle edilmiştir. Beklenen değeri sıfır ve varyansı σ^2 olan normal dağılımlı $N(0, \sigma^2)$ rastgele hatalar ε_i ; $i = 1 \dots n$ için üretilmiştir. İyi ve yanlış ölçüler, [Hekimoğlu ve Erenoğlu \(2007\)](#) tarafından ayrıntılı olarak açıklandığı gibi üretilmiştir. Uyuşumsuz ölçüler simülasyon yoluyla üretildiğinden, analizden önce bir gözlemin kaba hatalı olup olmadığı bilinmemektedir. Modelde uyuşumsuz ölçü olarak tespit edilen ölçü, gerçekten kaba hatalı ölçüyle eşleşirse, yöntem başarılı kabul edilir. Eşleşme olmazsa sonuç başarısız sayılır. Rastgele gözlem hataları 100 farklı örneklem ve kaba hata ise 50 farklı örneklem için, küçük genlikli $[3-6\sigma]$ aralıklardan rastgele seçilerek, toplamda 5000 farklı örneklem için OBO hesaplanmıştır. Jeodezik nivelman ağının ölçü sayısı 11 ve bilinmeyen nokta sayısı 6 olarak Şekil 2’de gösterilmiştir. Önsel varyans, $\sigma_i^2 = \sigma_0/\sqrt{S}$ olmak üzere burada, $\sigma_0 = 1\text{mm}/\sqrt{1\text{km}}$ ve S km cinsinden geçki uzunluğudur.



Şekil 2: Nivelman ağı

İstatistikte bir testin ve kestiricinin güvenilirliğini ölçmek için farklı yöntemler bulunmaktadır. [Hekimoğlu ve Koch \(2000\)](#) tarafından kestirici ve testin güvenilirliği sonlu örneklemde kırılma noktası ile belirlenmiştir. [Niemeier \(1985\)](#) tarafından global testin güç fonksiyonu kullanılarak deformasyon ağlarının kapasitesi araştırılmıştır. Testin gücü farklı koşullarda aynı

değere sahip olsa da OBO; gözlem sayısına, kaba hatanın sayısına, büyüklüğüne ve bilinmeyenlerin sayısına bağlı olarak değişebilir. Buna ilaveten, [Erdoğan vd. \(2019\)](#) OBO'nun kaba hata tespitinde testin gücünün deneysel tahmini olduğunu kanıtlayarak, testin gücüne göre daha güvenilir sonuçlar vereceği gösterilmiştir. Bu nedenle, bu çalışmada geleneksel yöntemlerin ve KHBOM yaklaşımının güvenilirliklerinin hesaplanmasında OBO kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasındaki toplam deney sayısının Z ve toplam başarılı sonuç sayısının K olduğunu varsayarsak, $OBO=K/Z$ ile elde edilir.

6. Analizler ve Bulgular

KHBOM yaklaşımı için kullanılan yöntemler arasında en yüksek OBO standart normal dağılıma göre test yapıldığı durumda hesaplanmıştır. Bu yöntemde beklendiği gibi güven sınırı yükseldikçe testin gücü düşmektedir. OBO testin gücünün deneysel olarak karşılığına eşittir ([Erdoğan vd., 2019](#)). Bu anlamda standartlaştırılmış ek bilinmeyen parametrelerine ait karşılaştırma değerleri yükseldikçe başarı oranı düşmektedir. Bu durum t-dağılımı için de geçerlilik göstermektedir. Bütün testlerde kaba hata sayısı arttıkça başarı oranının düştüğü gözlenmektedir.

Tablo 2: Geleneksel yöntemlere ait OBO'lar (küçük genlikli kaba hatalar)

m	Baarda	Pope
1	50.64	23.78
2	14.1	0
3	1.68	0

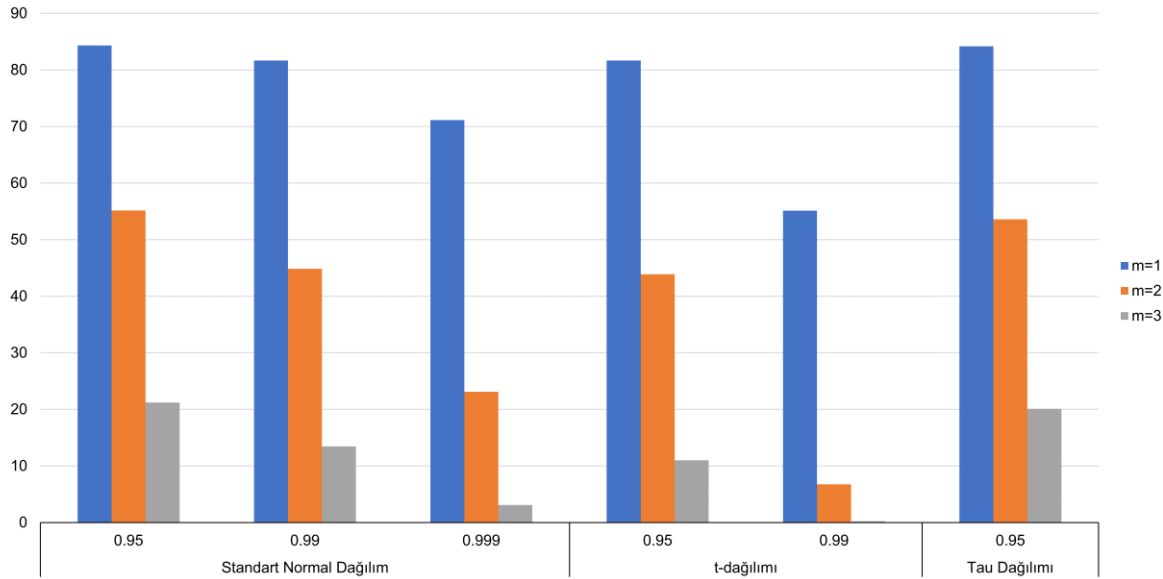
Tablo 2'de geleneksel yöntemlere ait OBO'lar incelendiğinde; önsel varyans faktörünün kullanıldığı Baarda test yöntemi sonuçlarının sonsal varyans faktörüne dayanan Pope testine göre daha etkin sonuçlar verdiği görülmektedir. KHBOM yönteminde olduğu gibi geleneksel yöntemlerde de kaba hata sayısı ile OBO arasında ters orantı gözlenmiştir.

Tablo 3: Farklı olasılık dağılımları için KHBOM yaklaşımına ait OBO'lar (küçük genlikli kaba hatalar)

Olasılık Dağılımı	Güven Düzeyi	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Standart Normal Dağılım	0.95	84.32	55.14	21.2
	0.99	81.66	44.84	13.44
	0.999	71.14	23.12	3.1
T-Dağılımı	0.95	81.66	43.88	10.98
	0.99	55.12	6.76	0.22
Tau Dağılımı	0.95	84.18	53.6	20.1

Tablo 3'e bakıldığında KHBOM yaklaşımıyla en yüksek OBO standart normal dağılıma ait güven düzeyi 0.95 iken iki yanlı güven sınırları için elde edilmiştir. Güven düzeyi 0.95 iken standart normal dağılım ve Tau dağılımına ait OBO sonuçları geleneksel yöntemlerden en başarılı olan Baarda ile karşılaştırıldığında bir kaba hatanın var olduğu durumda yaklaşık %30, iki kaba hata için %38 ve üç kaba hata içinse %19 oranlarında iyileşme gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra Şekil 2'ye bakıldığında aslında bir kaba hatalı durum için kullanılan üç dağılıma ait sonuçlarda %80'e yakın ortalama başarı oranı bulunmuştur. Elde edilen bu başarı kullanılan dağılımdan çok kullanılan dengeleme modeline aittir. Aynı dağılıma ait farklı güven düzeylerine göre bir karşılaştırma yapılırsa beklendiği gibi güven düzeyinin yükselmesi model testinin OBO değerlerine düşüş olarak yansımaktadır. Güven düzeyindeki artışla meydana gelen bu düşüş kaba hata sayısının iki ve üç

olmasıyla da ortaya çıkmaktadır (Şekil 3).



Şekil 3: Farklı olasılık dağılımları için KHBOM yaklaşımına ait OBO'lar

Batma ve gizleme etkilerini araştırmak için Şekil 2'deki nivelman ağında 3 ve 5 ölçülerine $4-8\sigma$ genlik arasından rastgele kaba hata büyüklüğü seçilerek yüklenmiştir. İlk olarak işaret fonksiyonu rastgele daha sonra aynı ve farklı işaretlerde seçilerek kaba hatalar üretilmiştir. Tablo 4 ve 5'te verilen sonuçlar iki kaba hatalı ölçü üretilmişken Baarda kestirim sonuçlarına göre hiç tespit edilemeyen, bir, iki, üç ve üçten fazla kaba hatalı ölçünün tespit edilebildiği durumlara ait sonuçlardır. Tablolarda b analiz sonucu ortaya çıkan kaba hata sayısını göstermektedir. Tablo 4'te gösterilen ilk satır iki kaba hata yüklendiğinde yaklaşımın bir kaba hatalı ölçü yakaladığı örneklem sayısını göstermektedir. Rastgele durumda yakalanan 3572 örneklemin içinde h_3, h_4, h_5, h_{10} ölçüleri bulunmakta ve bunlardan 2202 adet örneklemi yani toplama göre yaklaşık %44'ü komşu ölçü olan h_4 'e aittir. Bu durum batma etkisinde %89 olarak hesaplanmaktadır. Yani 5000 toplam örneklemden 4452'sinde h_4 komşu ölçüsü kaba hatalı tek ölçü olarak kestirilmiştir. Geriye kalan örneklem (4611'den 4452 çıktığında elde edilen) diğer noktalar arasında paylaşılmıştır.

Tablo 4: İki kaba hatalı ölçü varken Baarda yöntemiyle gizleme ve batma etkileri için örneklem sayıları ($4-8\sigma$ genlik)

b	Gizleme	Batma	Rastgele
1	2633	4611	3572
2	2367	4	1187
≥ 3	0	0	0
0	0	385	241
Toplam	5000	5000	5000

Bunun yanı sıra, rastgele duruma ait kaba hata verilen h_3 ve h_5 ölçülerinde tek başına kaba hatalı ölçü ortaya çıkması toplamda %27.18 oranında (1359 örneklem) iken, bu durum gizleme etkisinde %52.66 olarak (2633 örneklem) hesaplanmıştır (Tablo 4 ve 5). Rastgele duruma ait hesaplanan 3572 örneklemden geriye kalan 2213 örneklem ise h_3 ve h_5 ölçüleri dışındaki ölçülerin tek başına kaba hatalı olarak tespit edildiği duruma aittir. Böylece; Baarda yaklaşımıyla $4-8\sigma$ genlikli üretilen kaba

hataların rastgele duruma göre farklı işaretli olarak üretilmesiyle gizleme etkisine maruz kalarak h_3 ve h_5 ölçülerinin tek kaba hatalı olarak tespit edilmesi oranı artmıştır. Diğer yandan $4-8\sigma$ genlikli üretilen kaba hataların rastgele duruma göre aynı işaretli üretilmesiyle batma etkisi ortaya çıkarak h_3 ve h_5 ölçülerine komşu olan h_4 ölçüsündeki tek kaba hata tespiti ani bir yükseliş göstermiştir (Tablo 4 ve 5).

Tablo 5: İki kaba hatalı ölçü varken Baarda yöntemiyle gizleme ve batma etkileri için oranlar ($4-8\sigma$ genlik)

b	Gizleme	Batma	Rastgele
1	52.66	92.22	71.44
2	47.34	0.08	23.74
≥ 3	0	0	0
0	0	7.7	4.82

Tablo 6'da KHBOM yöntemi kullanılarak ölçü kümesinde iki kaba hatalı ölçü varken gizleme ve batma etkisi incelenmiştir. Burada en başarılı sonucu verdiği için $\alpha = 0.05$ iken standart normal dağılımlı karşılaştırma değeri dikkate alınmıştır. Tablo 6'da h_3 ve h_5 ölçülerine kaba hata yüklendiğinde bir kaba hatalı ölçünün tespit edildiği durumlara ait oranlar elde edilmiştir. Buna göre batma etkisi yüzünden komşu ölçünün (h_4) kaba hatalı olarak tespit edilmesi rastgele duruma nazaran yaklaşık iki katı oranında olmaktadır. Yine gizleme etkisi de yalnızca h_5 ölçüsünde rastgele duruma göre yaklaşık iki katı oranda hesaplanmıştır. Tabloda her senaryo için hesaplanan oranların 100'den farkı ise iki kaba hatanın doğru şekilde tespit edilmesi oranını ifade etmektedir.

Tablo 6: İki kaba hatalı ölçü varken KHBOM yöntemiyle gizleme ve batma etkileri için oranlar ($4-8\sigma$ genlik)

h_i	Gizleme	Batma	Rastgele
3	0	0	0
4	47.06	1.88	24.38
5	0	92.36	46.24

7. Sonuç ve Tartışma

Geleneksel yöntemlerle kaba hata tespitinin, EKK yöntemine dayandığı için, yeterli etkinliğe sahip olmadığı bilinmektedir. Daha etkin bir yaklaşım arayışı jeodezik uygulamalara ait sonuçların doğru şekilde yorumlanması açısından halen önemini korumaktadır. Bu çalışmada önerilen yöntem kaba hatanın dengeleme modelinde bilinmeyen olarak dikkate alınması varsayımına dayanmaktadır. Bu doğrultuda bir nivelman ağı uygulaması ele alınarak simülasyon tekniği ile kaba hata(lar) üretilerek modelin geleneksel yöntemle göre avantaj ve dezavantajları üzerinde araştırma yapılmıştır. Araştırmanın ilk adımında; yaklaşımın hangi dağılıma ait karşılaştırma değeri ile kullanılması üzerinde durulmuştur. Önerilen model ve yaklaşımda aslında her bir ölçü bilinmeyen olarak ele alınmakta ve sonrasında hesaplanan bütün bilinmeyenlere ait varyanslar arasından en küçüğe sahip olanı seçilmektedir. Bu yöntemin nivelman ağında kullanılabilirliği ve hangi karşılaştırma değeriyle daha güvenilir sonuçlar elde edileceğinin araştırılması literatürde bulunmamaktadır. Böylece elde edilen sonuçlara göre; bir kaba hata için önerilen KHBOM yöntemiyle, geleneksel yöntemlerden Baarda'ya kıyasla ortalama %30 daha yüksek OBO elde edilmiştir. İki kaba hatalı durumda %30-40 civarında ve üç kaba hatalı durumda ise %10-20 kadar daha yüksek OBO sonuçları elde edilmiştir. KHBOM yönteminin farklı dağılımlarla gösterdiği başarı oranlarına bakıldığında en başarılı iki yöntem güven düzeyi 0.95 iken standart normal dağılım ve Tau dağılımı olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu iki yöntemle Baarda'ya göre bir kaba hatalı durumda %30, iki kaba hatalı durumda %38 ve üç kaba hatalı durumda %19 daha yüksek OBO elde edilmiştir. KHBOM yöntemi ve geleneksel yöntemler için gizleme ve batma etkisi sonuçların güvenilirliğini oldukça yanıltıcı oranda etkilemektedir. Bu sonuçların yanlış yorumlamalara neden olması kaçınılmazdır. Bu sebeple bu iki etkiye ait

sonuçlar dikkate alındığında Baarda ve KHBOM yöntemlerinin birbirlerine göre herhangi bir üstünlüğü olduğu söylenemez. Gizleme ve batma etkileri kaba hata tespitinde, sorunu oldukça karmaşık hale getirmekte ve sonuçların yanlış yorumlanmasına sebep olmaktadır. Buna rağmen KHBOM yönteminin jeodezik ağda farklı dağılımlara ait karşılaştırma değerleriyle kullanılabilirliği gösterilerek, geleneksel yöntemlere göre oldukça başarılı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. KHBOM yöntemiyle kullanılan dağılımların her biri geleneksel yöntemlere nazaran daha iyi sonuçlar vermesine karşın aralarından standart normal dağılım ve Tau dağılımının KHBOM yöntemiyle daha etkin kullanılabileceği gösterilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazar, bu çalışmada bilinen ilgili herhangi bir finansal veya finansal olmayan çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

- Baarda, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks. *Netherlands geodetic commission*, 2(5).
- Baselga, S. (2007). Critical limitation in use of τ test for gross error detection. *Journal of Surveying Engineering*, 133(2), 52-55.
- Cook, R. D., & Weisberg, S. (1982). *Residuals and influence in regression*. New York: Chapman and Hall.
- Demirel, H. (2003). *Dengeleme hesabi*. İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi.
- Durdağ, U. M., Hekimoğlu, Ş., & Erdoğan, B. (2022). What is the relation between smearing effect of least squares estimation and its influence function?. *Survey Review*, 54(385), 320-331.
- Erdoğan, B., Hekimoğlu, Ş., Durdağ, U. M., & Öcalan, T. (2019). Empirical estimation of the power of test in outlier detection problem. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 63, 55-70.
- Gauss, C. F. (1823). *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Göttingen: Henricus Dieterich.
- Grossmann, W. (1969). *Grundzüge der Ausgleichsrechnung*. Berlin: Springer.
- Hadi, A. S., & Simonoff, J. S. (1993). Procedures for the identification of multiple outliers in linear models. *Journal of the American statistical association*, 88(424), 1264-1272.
- Hampel, F. R. (1968). *Contributions to the theory of robust estimation*. Berkeley: University of California.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. J., & Stahel, W. A. (1986). *Robust statistics: the approach based on influence functions*. New York: John Wiley & Sons.
- Hekimoğlu, Ş., & Koch, K. R. (2000). How can reliability of the test for outliers be measured. *Allg. Vermes. Nachr*, 107(7), 247-254.
- Hekimoğlu, Ş. (2006). Kaba hataların belirlenmesindeki sorunlar. *Harita Dergisi*, 73(135), 80 – 93.
- Hekimoğlu, Ş., & Erenoğlu, R. C. (2007). Effect of heteroscedasticity and heterogeneousness on outlier detection for geodetic networks. *Journal of Geodesy*, 81, 137-148.
- Hekimoğlu, Ş., Erdoğan, B., Soycan, M., & Durdağ, U. M. (2014). Univariate approach for detecting outliers in geodetic networks. *Journal of surveying engineering*, 140(2), 04014006.
- Hekimoğlu, S., Erdoğan, B., & Erenoğlu, R. C. (2015). A new outlier detection method considering outliers as model errors. *Experimental Techniques*, 39, 57-68.
- Koch, K. R. (1999). *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Berlin: Springer.
- Kreyszig, E. (1968). *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*, 3., Göttingen: durchgeschene Auf.
- Markov, A. A. (1912). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig: BG Teubner.
- Maronna, R. A., Martin, R. D., & Yohai, V. J. (2006). *Robust statistics theory and methods*. New York: John Wiley & Sons.
- Niemeier, W. (1985). "Anlage von Überwachungsnetzen." *Geodaetische netze in landes-und ingenieurvermessung II.*, H. Pelzer, ed., (pp: 527–558). Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer.
- Pope, A. J. 1976. *The statistics of residuals and the detection of outliers* (No. NOS-65-NGS-1).
- Rousseeuw, P. J., & Leroy, A. M. (1987). *Robust regression and outlier detection*. New York: Wiley.
- Schaffrin, B., & Wang, Z. W. (1994). Multiplicative outlier search using homBLUP and an equivalence theorem. *manuscripta*

geodaetica, 20(1), 21-26.

Welsch, W., Heunecke, O., & Kuhlmann, H. (2000). *Handbuch Ingenieurgeodäsie*. Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen, 3. Berlin: Wichmann.

Xu, P. (2005). Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness. *Journal of Geodesy*, 79(1-3), 146-159.