Kafkas Üniv Fen Bil Enst Derg.
5: 47-63, 2012

Sanal Katsayılı Gradiyent İçeren Durgun ve Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Gabil YAGUB*, Natig IBRAHİMOV,Matanat MUSAYEVA, Vugar YAGUBOV

Department of Math, Kafkas University, 36100 Kars, Turkey

Yayın Kodu: 5-4A

ÖZET: Bu çalışmada sanal katsayılı gradiyent içeren bir boyutlu durgun ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için birinci ve ikinci çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili sorular incelenmiştir. Denklemin katsayıları ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır. Galerkin yönteminden yararlanarak ele alınan birinci ve ikinci çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği teoremleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Galerkin yöntemi, Sınır değer problemleri

Existence and Uniqueness of Resolution of Initial Boundary Value Problems for Static and Nonlinear Schrödinger Equation with Virtual Coefficient Gradient

ABSTRACT: In this study, the questions deal with the existence and uniqueness of the almost all solution of first and second type boundary value problems for one-dimensional stationary nonlinear Schrödinger equation included gradient with imaginary coefficient one examined. The coefficients of the equation are the bounded measurable functions. The existence and uniqueness theorems for the almost all solutions of the first and second type boundary value problems considered using Galerkin's method are proved.

*(Corresponding author) e-mail: gabilya@mail.ru

GİRİŞ

Bu çalışmada sanal katsayılı gradiyent içeren durgun ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin iyi konulması ile ilgili sorular ele alınmıştır. Bilindiği üzere sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi ve onun için başlangıç sınır değer problemleri kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ortaya çıkar (Butkovskiy ve Samoilenko, 1984; Vorontsov ve Shmalgauzen, 1984). Özellikle kuantum mekaniğinde ve lineer olmayan optikte yüklü parçacıkların homojen olmayan ortamda hareketini incelediğimiz zaman sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi ortaya çıkar ve bu denklem için başlangıç sınır değer problemlerinin incelenmesi gerek teorik, gerekse de pratik açıdan önem taşır. Söylemek gerekir ki lineer ve lineer olmayan Schrodinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri farklı biçimlerde önceden (Iskenderov ve Yagubov, 1988; 1989; Yagubov ve Musayeva, 1997; Yajima ve Zhang, 2001; Baudouin, Kavian ve Puel, 2005; İsgandarov ve Yagubov, 2007; İskenderov ve Yagubov, 2012; Aksoy, Yıldız ve Yetişkin, 2012) ve son çalışmalarında geniş bir biçimde incelenmiştir. Ancak sanal katsayılı gradiyent içeren lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri çok az incelenmiştir(Akbaba, 2011; Yagubov, Toyoğlu ve Subaşı, 2012). Söz konusu (Akbaba, 2011; Yagubov, Toyoğlu ve Subaşı, 2012) çalışmalarında sanal katsayılı gradiyent içeren bir ve iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri denklemin katsayıları karesel integrallenebilir fonksiyonlar olması halinde ele alınmış ve galerkin yönteminin yardımıyla varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Sanal katsayılı gradiyent içeren durgun ve lineer olmayan

Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri hiç incelenmemiştir. Bu nedenle bu çalışmada ele alınan başlangıç sınır değer problemlerinin iyi konulmasının incelenmesi her açıdan bilimsel önem taşımaktadır.

1. Birinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Bu bölümde sanal katsayılı gradiyent içeren bir boyutlu durgun ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili soruları cevaplandırmağa çalışacağız.

Farz edelim ki $l>0$, $T>0-$ verilen sayılar, $0\le x\le l,$ $0\le t\le T$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$; $C^k([0,T],B)$- uzayı $[0,T]$ aralığında $k\ge 0$ kez sürekli diferansiyellenebilir ve değerleri B Banach uzayından olan fonksiyonların Banach uzayıdır; $L_p(0,l)$ uzayı $(0,l)$ aralığında mutlak değerinin $p\ge 1$ basamaktan integralenebilir fonksiyonların Lebesque uzayıdır; $L_2(0,T;B)-$ uzayı $(0,T)$ aralığında tanımlı değerleri B Banach uzayından olan mutlak değerinin karesi ile integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayıdır; $L_\infty(0,T;B)-$ uzayı $(0,T)$ aralığında tanımlı değerlri B Banach uzayından olan ölçülebilir sınırlı fonksiyonların Banach uzayıdır; $W_p^k(0,l), W_p^{k,m}(\Omega)$, $p\ge 1,\ k\ge 0,\ m\ge 0$ - Sobolev uzaylarıdır, mesela, (Ladyzenskaja, 1977) çalışmasında tanımlanmıştır.

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \quad (1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x)\,,\, x\in(0,l)\,, \tag{2}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0\,,\, t\in\left(0,T\right). \tag{3}$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $a_0>0$ verilen sayı; a_2- verilen kompleks sayı olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$a_2=\operatorname{Re}a_2+\operatorname{Im}a_2, \operatorname{Re}a_2<0, \operatorname{Im}a_2>0; \operatorname{Im}a_2\geq\left|\operatorname{Re}a_2\right| \tag{4}$$

$a(x), a_1(x), v(x)$ - reel değerli, ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$0\leq a(x)\leq\mu_1,\ \overset{0}{\forall}\, x\in(0,l),\ \ \mu_1=sabit>0\,, \tag{5}$$

$$\left|a_1(x)\right|\leq\mu_2, \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right|\leq\mu_3, \overset{0}{\forall}\, x\in(0,l)\,, \mu_2,\mu_3=sabit>0\,, \tag{6}$$

$$\left|v(x)\right|\leq b_0, \overset{0}{\forall}\, x\in D, b_0=sabit>0 \tag{7}$$

şartını sağlar; - kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega), \tag{8}$$

şartlarını sağlar.

Görüldüğü gibi (1)-(3) şartlarından fonksiyonunun bulunması problemi (1) denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak uzayından olan ve (1)-(3) şartlarını için sağlayan fonksiyonu anlaşılır. Şimdi bu biçimde olan çözümün varlık ve teklik teoremini ispatlayalım.

Teorem 1. Farz edelim ki a_2- kompleks sabiti ve $a(x)$, $a_1(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ fonksiyonları (4)-(8) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (1)- (3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)} \right). \qquad (9)$$

Burada >0 –bilinen sabittir.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla uzayında temel fonksiyonlar olarak aşağıdaki

$$LX = -a_0\frac{d^2X}{dx^2} + a(x)X = \lambda X\,,\ X(0) = X(l) = 0 \qquad (10)$$

öz değer probleminin $\lambda = \lambda_k$, k=1,2,… öz değerlerine karşılık gelen $X = u_k(x)$, k=1,2… öz fonksiyonlarını alalım. Ladyzenskaja (1973) çalışmasından bilindiği gibi L operatörünün katsayısı olan $a(x)$ fonksiyonu $a(x) \ge 0$ olduğundan λ_k, k=1,2,… öz değerleri reel ve pozitiftirler, bunun yanı sıra $u_k = u_k(x)$ k=1,2,… öz fonksiyonları da reeldirler ve $L_2(0,l)$, $W_2^1(0,l), \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında ortogonallık şartlarını sağlar (Ladyzenskaja, 1973). Kolaylık olsun diye $u_k = u_k(x)$ k =1,2,… öz fonksiyonlarının $L_2(0,l)$ ’de ortonormal olduğunu varsayalım, yani

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x)u_m(x)dx = \delta_k^m\,,\ k,m = 1,2,\ldots \qquad (11)$$

formülünün geçerli olduğunu varsayalım, burada

$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k=m \\ 0, k\ne m \end{cases}, k,m = 1,2,\ \ldots$. Kronecker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ de ortogonallık aşağıdaki gibi anlaşılır:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[a_0\frac{du_k}{dx}\frac{du_m}{dx} + a(x)u_k u_m \right]dx = \lambda_k \delta_k^m,\ \text{k,m=1,2,...} \quad (12)$$

$$\{u_k, u_m\} = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \int_0^l Lu_k Lu_m dx = \lambda_k^2 \delta_k^m, \, k, m = 1,2,\dots \,. \tag{13}$$

Ayrıca farz edelim ki $u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonları için aşağıdaki şart sağlasın:

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \le d_k \, , \, k=1,2\dots \,. \tag{14}$$

Burada $d_k > 0$ $k = 1,2,\dots$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde arayabiliriz:

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \,. \tag{15}$$

Burada $C_k^N(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)}$ $k = \overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} = (L\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} - (v(.)\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(i a_1(.) \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} - \left(a_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k \right)_{L_2(0,l)} + f_k(t), \, k = \overline{1,N} \,, \tag{16}$$

$$C_k^N(0) = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k \, , \; k = \overline{1,N} \,. \tag{17}$$

Burada $f_k(t) = \left(f(.,t), u_k \right)_{L_2(0,l)}$ dir.

Görüldüğü gibi (16) denklemler sistemi homojen olmayan, sabit katsayılı lineer olmayan adi diferansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemin sağ tarafındaki $f_k \in W_2^1(0,T), k = 1,2,...$ dir. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bildiğimize göre (16), (17) Cauchy probleminin $W_2^1(0,T)$ uzayında en az bir çözümü vardır (İskenderov ve Yagubov, 2012; Pontryagin, 1982; Vasilyev, 1986) .

Şimdi $C_k^N(t)$ katsayıları için başka bir deyişle (16), (17) Cauchy probleminin N ' e bağlı çözümleri için kestirim elde edelim. Bu amaçla integral özdeşliklerin yardımıyla ispatlanan aşağıdaki lemmayi ifade edelim.

Lemma 1. (16), (17) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le$$

$$\le c_0 (\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)}) . \qquad (18)$$

Burada $c_0 > 0$ - bilinen sabit

Şimdi teoremin ispatını devam ettirelim. Aşağıdaki gibi fonksiyonlar tanımlayalım:

$$l_{N,k}(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)}, k, N = 1,2,\dots . \qquad (19)$$

Bu formülü, Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini ve $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının ortonormallık şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_k\right\|_{2(0,l)} = \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T] .$$

Burada

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_1 \left\|\psi^N\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \qquad (20)$$

eşitsizliğini ve (18) kestirimini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_2, \forall t \in [0,T], k, N = 1,2,\dots \qquad (21)$$

Bu bağıntı $l_{\mathrm{N,k}}(t), k, N = 1,2,\dots$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Şimdi bu ailenin $[0,T]$ aralığında tespit edilmiş k ve $\forall N \ge k$ için eş sürekli (aynı dereceden sürekli) fonksiyonlar ailesi olduğunu gösterelim. Gerçekten (16) sisteminin k. denklemini $(t, t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralleyip kısmi integrasyon formülünü uygularsak elde edilen eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebilir:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\mu_2 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} + \mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+b_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_\infty(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} + \left|a_2\right| \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,t)\right\|^3_{L_6(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (22)$$

Ladyzenskaja (1973), Lions ve Magenes (1972) çalışmalarından bildiğimize göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ uzayına, $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $L_\infty(0,l)$ uzayına gömüldüğünden

$$\left\|\psi^N\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \le c_3 \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \qquad (23)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (18) kestirimini ve u_k lar için kabullendiğimiz (14) şartını kullanırsak (22)' den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_4 d_k \left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}}, \forall t \in [0,T], k, N = 1,2,... \qquad (24)$$

Burada c_{23} >0 sabiti, N,k ve Δt ' den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlikten k tesbit edildiğinde $\forall N \ge k$ için $\{l_{N,k}(t)\}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında eş sürekli olduğu elde edilir. Böylece $\{l_{N,k}(t)\}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu ispatlandı. Bu taktirde köşegen sürecin yardımıyla öyle $N_m, m = 1,2,...$ alt dizisi seçebiliriz ki bu alt dizi üzerinden $\{l_{N_m,k}(t)\}$ dizisi $[0,T]$ aralığında her bir $k = 1,2,...$ için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki gibi $\psi(x,t)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) u_k(x) \qquad (25)$$

Şimdi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin bu $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsak olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $\forall g \in L_2(0,l)$ için $\forall t \in [0,T]$ için [9] çalışmasındaki yöntemi kullanarak $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\left|(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g)_{L_2(0,l)}\right| < \varepsilon \quad (26)$$

yazabiliriz. Buradan gereken hükmü kolaylıkla elde ederiz. (18) kestirimine dayanarak $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinden (48) formülüyle tanımlanan $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$\psi^{N_m} \to \psi \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf}, \qquad (27)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} \to \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} \to \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \quad (30)$$

olur. Diğer yandan Ladyzenskaja (1973), Lions ve Magenes (1972) çalışmasından bildiğimiz kompakt gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T;L_\infty(0,l))$ uzayına kompakt gömülür. Bu taktirde (27)-(30) limit bağıntılarını sağlayan $\left\{\psi^{N_m}\right\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m} - \psi\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \to 0. \quad (31)$$

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (1)-(3) probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. İlk önce $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (1) denklemini $\forall (x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim. . Bu amaçla (16) sisteminin k. denklemini $\left[0,T\right]$ aralığında sürekli olan $\forall \overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonuyla çarpıp k üzerinden $k=1$' den $k = N' \le N$' e kadar toplayıp , $\left[0,T\right]$

aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}[i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}-a(x)\psi^N+ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}+$$

$$+v(x)\psi^N+a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N-f(x,t)]\overline{\eta}^{N'}(x,t)dxdt=0, \tag{32}$$

$$\forall\overline{\eta}^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\eta_k(t)u_k(x). \tag{33}$$

(27)-(30) limit bağıntılarını kullanarak (32) integral özdeşliğinde $N=N_m$ alıp $m\to\infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi-f_1(x,t)\right]\overline{\eta}^{N'}(x,t)dxdt=0 \quad .$$

(34)

Bilindiği üzere (33) biçiminde olan fonksiyonlar $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bundan dolayı $N'\to\infty$ için (34) integral özdeşliğinde limite geçersek $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi-f_1(x,t)\right]\overline{\eta}(x,t)dxdt=0$$

özdeşliğini elde ederiz. Buradan da $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun (1) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağladığını hükmedebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2) başlangıç şartını sağladığını ispatlayalım.

[13,16] çalışmasına göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0,\ \forall t\in[0,T]$$

limit bağıntısını yazabiliriz. $t=0$ alırsak $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\psi(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0$$

olur. Bu limit bağıntısını, göz önünde bulundurup $\psi^{N_m}(x,0)=\varphi_1^{N_m}(x), \quad x\in(0,l)$ eşitliğini

$$\|\psi(.,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)}\le\|\psi(.,0)-\psi^{N_m}(.,0)\|_{L_2(0,l)}+\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi_1\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinde limite geçersek kolaylıkla $\|\psi(.,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)}=0$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall}x\in(0,l)$ için (2) başlangıç şartını sağladığını görebiliriz.

Nihayet $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömüldüğünden (bak Ladyzenskaja, 1973; Lions ve Magenes, 1972) $m\to\infty$ için $\|\psi^{N_m}(s,.)-\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)}\to 0$, s=0,l olur. Bu limit bağıntılarını ve $\psi^{N_m}(s,t)=0$, $s=0,l$, $t\in(0,T)$ eşitliğini dikkate alıp

$$\|\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)}\le\|\psi(s,.)-\psi^{N_m}(s,.)\|_{L_2(0,T)}+\|\psi^{N_m}(s,.)\|_{L_2(0,T)}$$

eşitsizliğinde $m\to\infty$ için limite geçersek $\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \ \forall t\in(0,T)$

sınır şartlarını elde ederiz. Böylece $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ sınıfından çözümü olduğu ispatlandı. (18) kestiriminde $N=N_m$ alıp $m\to\infty$ için limite geçersek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak (9) kestiriminin geçerli olduğunu ispatlarız. Nihayet bu kestirimi kullanarak çözümün bir tek olduğunu da ispatlayalım. Bu amaçla farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\Phi(x,t)$ fonksiyonları (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin herhangi iki çözümü olsun. Bu fonksiyonların farkını $w(x,t) \equiv \psi(x,t) - \Phi(x,t)$ ile gösterelim. Bu taktide $w(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki problemin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} - a(x)w + v(x)w + a_2\left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right)w + a_2\psi\Phi\overline{w} = 0, (x,t) \in \Omega, \quad (35)$$

$$w(x,0) = 0, x \in (0,l),\ w(0,t) = w(l,t) = 0, t \in (0,T). \qquad (36)$$

Bu problemin çözümünü değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (35) denkleminin her iki tarafını $\overline{w}(x,t)$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen eşitliği $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu taktirde

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial w}{\partial \tau}\overline{w} + a_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\overline{w} + ia_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\overline{w} - a(x)|w|^2 + v(x)|w|^2\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} a_2\left(|\Phi|^2 + |\psi|^2\right)|w|^2\,dxd\tau + \int_{\Omega_\tau} a_2\psi\Phi(\overline{w})^2\,dxd\tau\ , \forall t \in [0,T]$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafında yer alan ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygulayıp (36)'da yer alan başlangıç ve sınır değer kullanıp elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l |w(x,t)|^2\,dx + 2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right)|w|^2\,dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|w|^2 dxd\tau - 2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left[a_2\psi\Phi(\overline{w})^2\right]dxd\tau\ , \forall t \in [0,T]\ .$$

Buradan da (6) şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yaza biliriz:

$$\int_0^l |w(x,t)|^2\,dx + 2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right)|w|^2\,dxd\tau \le$$

$$\leq \mu_3 \int\limits_{\Omega_t} \left|w(x,\tau)\right|^2 dxd\tau + 2|a_2| \int\limits_{\Omega_t} |\psi||\Phi||w|^2\, dxd\tau \quad .\forall t \in [0,T] \ . \tag{37}$$

(4) şartından kolaylıkla $|a_2| \leq \dfrac{3}{2}\operatorname{Im} a_2$ eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizliği dikkate alarak (37)'den aşağıdaki eşitsizliği geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|w(.,t)\right\|^2_{L_2(0,)} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_2 \int\limits_{\Omega_z} \left(|\Phi|^2 + |\psi|^2\right)|w|^2 dxd\tau \leq \mu_3 \int\limits_{\Omega_t} \left|w(x,\tau)\right|^2 dxd\tau \ , \forall t \in [0,T] \ .$$

Bu eşitsizlikten yaralanıp Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\left\|w(.,t)\right\|^2_{L_2(0,t)} = 0, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Buradan $w(x,t) \equiv \psi(x,t) - \Phi(x,t)$ =0, $\overset{0}{\forall} x \in (0,l), \forall t \in [0,T]$ olduğu çıkar, yani (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü tektir. Teorem 1 ispatlandı.

Not 1. Söylemek gerekir ki (İsgandarov ve Yagubov, 2007; İskenderov ve Yagubov, 2012) çalışmasındaki metodiği kullanarak (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $\psi = \psi(x,t)$ hemen hemen çözümünün

$\overset{0}{W}(\Omega) \equiv \left\{ \psi : \psi \in L_\infty\left(0,T; \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)\right), \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty\left(0,T; L_2(0,l)\right) \right\}$ fonksiyonel uzayına veya

$B_0 \equiv C^0\left([0,T]; \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T]; L_2(0,l)\right)$ fonksiyonel uzayına ait olduğu da kolaylıkla ispatlana bilir.

2. İkinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği.

Teorem 1'in yardımıyla (1) denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer probleminin

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan hemen hemen çözümün varlığı ve bir tekliği ispatlandı. Şimdi 2.çeşit başlangıç sınır değer problemi için teorem 1' in aynısını elde etmek için aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \quad (38)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l), \qquad (39)$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in[0,T]. \qquad (40)$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $l>0$, $T>0$, $a_0>0$ verilen sayılar; $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$, a_2- verilen kompleks sayı olup (4) şartını sağlar, $a(x)$, $a_1(x)$ - reel değerli, ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$0<\mu_0\le a(x)\le\mu_1, \overset{0}{\forall}x\in(0,l),\ \mu_0,\mu_1=sabit>0, \qquad (41)$$

$$|a_1(x)|\le\mu_2,\left|\frac{da_1(x)}{dx}\right|\le\mu_3,\overset{0}{\forall}x\in(0,l),a_1(0)=a_1(l)=0,\mu_2,\mu_3=sabit>0, \quad (42)$$

şartlarını sağlar; $v(x)$ -reel değerli fonksiyon olup (7) şartını sağlar; $\varphi(x), f(x,t)$ -kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi\in W_2^2(0,l),\frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\varphi(l)}{dx}=0,\ f\in W_2^{0,1}(\Omega), \qquad (43)$$

şartlarını sağlar.

Görüldüğü gibi (38)-(40) şartlarından $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi (38) denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan ve (61)-(63) şartlarını $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 2. Farz edelim ki a_2- kompleks sabiti ve $a(x)$, $a_1(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (4), (41), (42), (7), (43) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (38)-(40) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi^N\right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_5\left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^3_{W_2^1(0,l)}\right) \qquad (44)$$

Burada $c_5>0$ sabiti bilinen sabittir.

Bu teoremin ispatı teorem 1 de olduğu gibi Galerkin yöntemi ile gerçekleştirilir.

Sadece $W_2^{2,1}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak

$$LX=-a_0\frac{d^2X}{dx^2}+a(x)X=\lambda X\,,\frac{dX(0)}{dx}=\frac{dX(l)}{dx}=0 \qquad (45$$

öz değer probleminin $\lambda=\lambda_k, k=1,2,...$ öz değerine karşılık gelen öz fonksiyonları alınır. Kalan işlemler, yani teoremin ispatı uygun fonksiyonel uzaylar ve veriler üzerine konulan şartlar göz önünde bulundurularak teorem 1 deki gibi gerçekleştirilir.

Not 2. Söylemek gerekir ki $[8,9]$ çalışmalarındaki metodiği kullanarak (38)-(40) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan $\psi=\psi(x,t)$ hemen hemen çözümünün

$$W(\Omega)\equiv\left\{\psi:\psi\in L_\infty\left(0,T;W_2^2(0,l)\right),\frac{\partial\psi}{\partial t}\in L_\infty\left(0,T;L_2(0,l)\right)\right\}$$

fonksiyonel uzayına veya $B_1\equiv C^0\left([0,T];W_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T];L_2(0,l)\right)$ fonksiyonel ait olduğu da kolaylıkla ispatlana bilir.

KAYNAKLAR

Akbaba GD 2011. Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi, Yüksek Lisans tezi, Kars, 71 s.(Türkçe).

Aksoy NY, Yıldız B, Yetişkin H 2012. Variational Problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathematical Sciences, 122(3), pp. 469-484.

Baudouin L, Kavian O, Puel JP. 2005. Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. Differential Equations, 216, p. 188-222.

Butkovskiy AG, Samoilenko YI 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Moskova, Nauka, 256 s. (Rusça).

İsgandarov A, Yagubov G 2007. Optimal control problem with unbounded potential for multidimensional nonlinear and nonstationar Schrodinger equation // Proseedings of the Lankaran State University, Natural sciences series, pp. 3-56.(in Russian)

Iskenderov AD, Yagubov GY 1988. A variational method for solving of the inverse problem of determing the quantum-mechanical potential // Dokl. AN USSR, vol. 303, No 5, pp. 1044–1048. (in Russian)

Iskenderov AD, Yagubov GY 1989. Optimal control of nonlinear the quantum-mechanical systems // Automatic and telemechanics, No12, pp. 27–38. (in Russian)

İskenderov AD, Yagubov GY, Musayeva MA 2012. Identification of quantum potentials. Baku, Çaşıoglu, 548 p. (in Russian).

Ladyzenskaja OA 1973. Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri. Moskova, Nauka, 408 s. (Rusça).

Lions JL, Magenes E 1972. Non-homogeneous boundary value problems and applications. vol. 2. Berlin, 307 p.

Pontryagin LS 1982. Adi diferansiyel denklemler. Moskova, Nauka, 332 s.(Rusça).

Vasilyev FP 1980. Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metotları. Moskova, Nauka, 518 s.(Rusça).

Vorontsov MA, Shmalgauzen VI 1984. Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka, 336 s.(Rusça).

Yagubov G, Toyoğlu F, Subaşı M 2012. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol:218, iss.11, pp.6177-6187.

Yagubov GY, Musayeva MA 1997. On the identification problem for nonlinear Schrödinger equation // Differential equations, vol.3, No 12, pp. 1691–1698.(in Russian).

Yajima K, Zhang G 2001. Smoothing property for Schrodinger equations with potential super quadratic at infinity //Commun.Math.Phys., 231(3),p. 573-590.