



Generation of a comprehensive load distribution algorithm in a gear pair and its effect on dynamic response

Süleyman Emre Civan^{1,2*}, Cihan Demir¹

¹Department of Mechanical Engineering, Yıldız Technical University, Barbaros Bulvarı, 34349, Yıldız, Beşiktaş, İstanbul, Türkiye

²TUSAŞ Engine Industry (TEI), Esentepe Mahallesi Çevreyolu Bulvarı, 26210, Tepebaşı, Eskişehir, Türkiye

Highlights:

- The main factors distorting the gear contact; shaft bending, profile gap, and gear blank torsional deformation
- Separating effect of shaft deflection due to gear position on tooth contact
- Partial loss of contact with torsional deformation of the gear body

Keywords:

- Spur gear-pair
- Load distribution
- Tooth surface modification
- Nonlinear gear dynamics
- Gear system deformation

Article Info:

Research Article
Received: 22.08.2023
Accepted: 09.12.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1348239

Correspondence:

Author: Süleyman Emre Civan
e-mail:
suleymancivan@gmail.com
phone: +90 505 200 4730

Graphical/Tabular Abstract

A coupled lumped parameter model is studied for a pair of spur gears to demonstrate tooth load distribution continuity with system deformation components. Shaft bending, the torsional deformation of the gear body, and the profile gap between mating surfaces are investigated to specify effects on load distribution. A nonlinear time-variant dynamic model of a pair of spur gears is established using the Lagrange method to see contact loss effects on dynamic transmission error. The nonlinear model considering torsional deformation and gear profile gap with the complete analytical approach is proposed as considering parabolic load distribution in contact that differs from existing literature. The workflow for obtaining load distribution and DTE is given in Figure A.

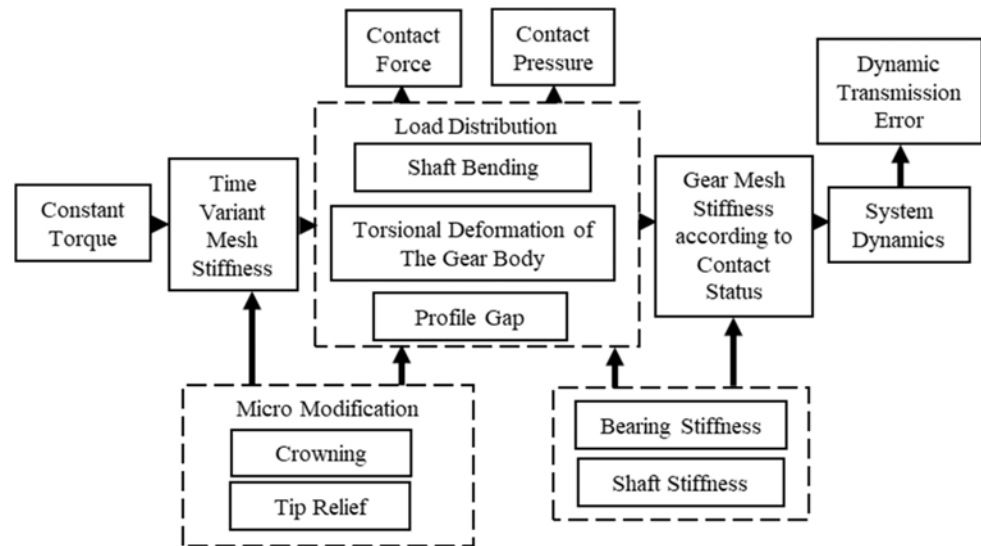


Figure A. Workflow of the study

Purpose: Gear pair mesh stiffness is affected by loading conditions due to some portion of the tooth surface not mating with the counter surface. How the contact loading state of the gear tooth surface effects the vibration behavior of the gear system is shown in this study.

Theory and Methods: Gear pair stiffness is modeled in the frame of Weber Banaschek's theory. The shaft is modeled using the Timoshenko beam theory. With the proposed load distribution algorithm, the load distribution on the tooth, depending on the stiffness of the gear pair is found by separating the tooth into slices.

Results: The response of the system is adversely affected by the decreasing gear mesh stiffness with partial contact loss.

Conclusion: The ratio of lateral distances from the gear center to each bearing ends as much as it increases, and the amount of shaft deformation tends to increase gradually. Partial contact loss causes to increase in torsional deformation of the gear body. The reason is that distributed force accumulates at the less deformed side of the gear, increasing torque at the gear blank. Crowning provides to distribute the load larger section of the tooth surface when the load is distributed non-uniformly. It contributes to improving contact status depending on the condition.



Bir dişli çiftinde kapsamlı bir yük dağılım algoritması oluşturulması ve dinamik tepki üzerindeki etkisi

Süleyman Emre Civan^{1,2*}, Cihan Demir¹

¹Makine Mühendisliği Bölümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, Barbaros Bulvarı, 34349 Yıldız, Beşiktaş, İstanbul, Türkiye

²TUSAŞ Motor Sanayi (TEI), Esentepe Mahallesi Çevreyolu Bulvarı No, 26210 Tepebaşı, Eskişehir, Türkiye

ÖNEÇIKANLAR

- Dişli temasını bozan ana etmenler; shaft sehimi, profil boşluğu ve dişli gövdesi burulma deformasyonu
- Dişli konumuna bağlı shaft sehiminin diş temasını ayırıcı etkisi
- Dişli gövdesinin burulma deformasyonu ile kısmi temas kaybı

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 22.08.2023

Kabul: 09.12.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1348239

Anahtar Kelimeler:

Düz dişli çifti,
yük dağılımı,
diş yüzeyi modifikasyonu,
doğrusal olmayan dişli
dinamiği,
dişli sistemi deformasyonu

ÖZ

Dişli çiftlerinde yük dağılımı, sistem elemanlarının deformasyonları nedeniyle alın genişliği boyunca temas sürekliliğinin bozulmasından etkilenir. Bu çalışmada, sistem deformasyonu bileşenleri ile diş yükü dağılımı sürekliliğini göstermek için bir düz dişli çifti için birleştirilmiş yığın parametre modeli oluşturulmuştur. Yüklü bir diş teması analizi, yinelemeli ilerlemede analitik olarak verilmiştir. Yük dağılımı üzerindeki etkileri belirlemek için shaft bükülmesi, dişli gövdesinin burulma deformasyonu ve eşleşen yüzeyler arasındaki profil boşluğu araştırılmıştır. Dinamik iletim hatası üzerindeki temas kaybı etkilerini görmek için Lagrange yöntemi kullanılarak bir çift düz dişlinin doğrusal olmayan zamana bağlı dinamik modeli oluşturulmuştur. Eşdeğer dişli çifti rijitliği elde etmek için dilimler arasındaki kaplin rijitliğini de dikkate alan yığın bir parametre modeli kullanılmıştır. Burulma deformasyonunu ve dişli profili boşluğunu tam analitik yaklaşımla dikkate alan doğrusal olmayan model, mevcut literatürden farklı olarak temas halindeki parabolik yük dağılımını dikkate alacak şekilde önerilmiştir. Shaft eğilme deformasyonu simetrik ve asimetric dişli konumlandırılmada incelenmiştir. Dişlinin shaft üzerinde yataklara olan mesafesinin oranı arttıkça kısmi yüklenmesi de artmaktadır. Sistemin tepkisi, kısmi temas kaybı ile azalan dişli çifti rijitliğinden olumsuz etkilenmektedir. Sonuçlar, sonlu elemanlar analizi ve literatürden deneysel test sonuçları ile doğrulanmıştır.

Generation of a comprehensive load distribution algorithm in a gear pair and its effect on dynamic response

HIGHLIGHTS

- The main factors distorting the gear contact; shaft bending, profile gap, and gear blank torsional deformation
- Separating effect of shaft deflection due to gear position on tooth contact
- Partial loss of contact with torsional deformation of the gear body

Article Info

Research Article

Received: 22.08.2023

Accepted: 09.12.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1348239

Keywords:

Spur gear-pair,
load distribution,
tooth surface modification,
nonlinear gear dynamics,
gear system deformation

ABSTRACT

Load distribution is affected by distortion of contact continuity along the face width due to deformations of the system elements. In this study, a coupled lumped parameter model is studied for a pair of spur gears to demonstrate tooth load distribution continuity with system deformation components. A loaded tooth contact analysis is made analytically in iterative progress. Shaft bending, the torsional deformation of the gear body, and the profile gap between mating surfaces are investigated to specify effects on load distribution. A nonlinear time-variant dynamic model of a pair of spur gears is established using the Lagrange method to see contact loss effects on dynamic transmission error. A lumped parameter model with coupling stiffness is utilized to obtain equivalent mesh stiffness. The nonlinear model considering torsional deformation and gear profile gap with the complete analytical approach is proposed as considering parabolic load distribution in contact that differs from existing literature. Shaft bending deformation is investigated in symmetrical and asymmetrical gear positioning. As the ratio of the distance of the gear to the bearings on the shaft increases, its partial loading also increases. The response of the system is adversely affected by the decreasing gear mesh stiffness with partial contact loss. The results are validated by the finite element analysis and experimental test results from the literature.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : *suleymancivan@gmail.com, cdemir@yildiz.edu.tr / Tel: +90 505 200 4730

1. Giriş (Introduction)

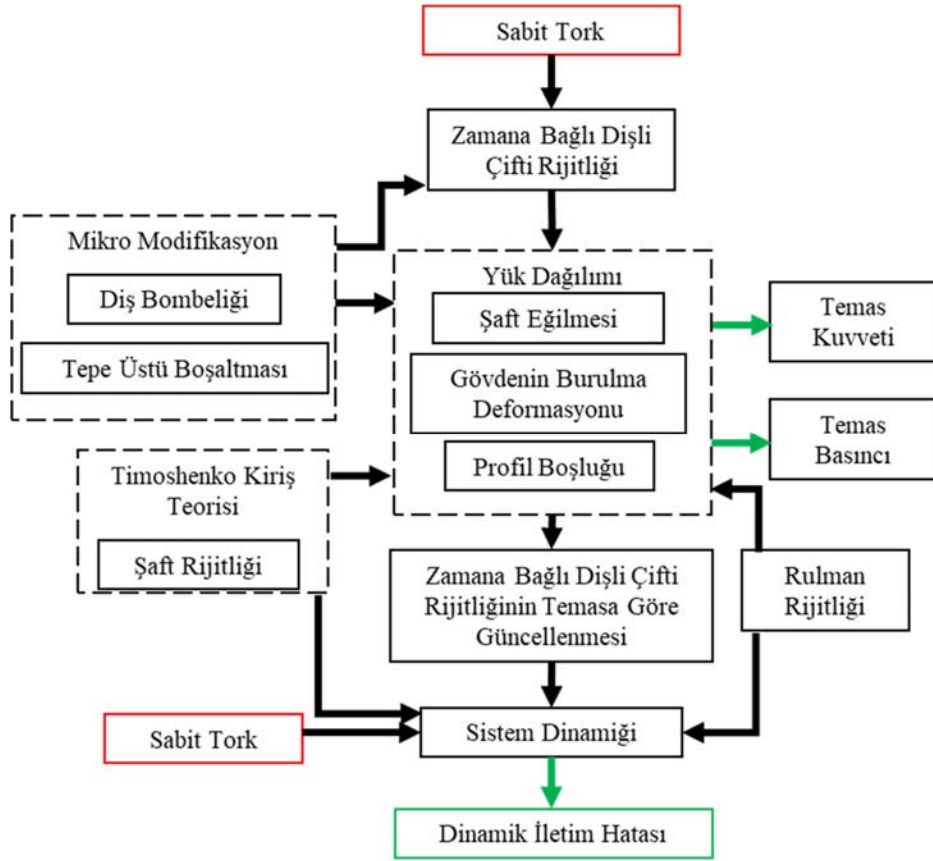
Tork iletimi, kaplin ve şafttan dişli çiftlerine kadar sistem elemanlarında deformasyonlara neden olmaktadır. Hareket hattına uygulanan yükün herhangi bir sistem deformasyon elemanı olmaksızın üniform olarak dağılması beklenmektedir. Bununla birlikte, temas yükü dağılımı genellikle üniform değildir. Kuvvet dağılımı profil ve dişli genişliği modifikasyonlarına, elastik deformasyon faktörlerine, dişli imalat hatalarına ve yanlış montajdan kaynaklanan hizalamalara bağlıdır. Diş yüzeyinin eşit olmayan şekilde yüklenmesi, dişli sisteminin gürültü ve titreşim özelliklerini olumsuz etkileyebilmektedir.

Bu çalışmada literatür çalışmaları iki gruba ayrılmaktadır; yük dağılımı ve sistem dinamiği modeli. Yük dağıtım çalışmalarına bazı örnekler şu şekilde verilebilir; Conry ve Seireg [1] silindirik dişli çiftlerinde yük dağılımını bulmak için bir algoritma kullanmıştır. Şaft sehimi bu çalışmaya dahil edilmiştir. Bu bozulma etkisini ortadan kaldırmak için profil modifikasyonu önerilmiştir. Eritenel ve Parker [2] dişli çiftinin doğrusal olmayan yük ve moment davranışını elde etmek ve doğrusal olmayan mekanizmayı belirlemek için helisel dişli çiftleri üzerinde çalışmışlardır. Wink ve Serpa [3] hesaplama performansı açısından üç farklı helisel dişli yük dağıtım algoritmasını karşılaştırdı. Statik denge koşullarında, temas yüzeyindeki elastik sapmalar incelenmiştir. Zhang ve Fang [4] diş temas analizi ile yüklü diş temas analizi arasındaki farkları göstermiştir. Yük dağılımı, yüklü diş temas analizi için dişli çiftindeki boşluğa ve temas noktalarındaki diş deformasyonuna dayalı olarak önerilmiştir. Zhang vd. [5] helis dişliyi, dilimleri küçük bir helis açısında dönen bir dizi ince düz dişli dilimleri gibi ele almıştır. Diş esneklik parametreleri, değişen dişli çifti sertliği elde etmek için tanımlanmıştır. Enlemesine çapraz boşluk için profil ve dişli genişliği modifikasyonları, şaft yanlış hizalaması, bükülme ve burulma sapmaları açıklanmaktadır. Zhou vd. [6] yüzey genişliği boyunca yükün üniform olmayan dağılımını kullanarak yüzey yük faktörünü incelemiştir. Dişli çifti hareket hattı boyunca çoklu doğrusal olmayan yaylar ve doğrusal olmayan çok noktalı temas noktaları olarak modellenmiştir. Statik denge durumu yinelemeli bir hesaplama süreciyle elde edilmiştir. Bitişik dilimler arasındaki kaplin yayından bu çalışmada bahsedilmemiştir. Yuan vd. [7] şaftın dişli genişliği boyunca sehimini bulmak için Timoshenko kiriş teorisini kullanmışlardır. Temas yer değiştirmelerini dilim dilim bulmak için dişli çifti incelenmiştir. Makalede şaft-dişli sisteminin burulma deformasyonu ve kaplin rijitliği verilmemiştir. Dinamik iletim hatası elde etmek için doğrusal bir zaman değişkenli model kurulmuştur. Peng vd. [8] yüzey modifikasyonları ve yanlış hizalama ile yük dağılımını bulmak için sayısal bir yöntem önermiştir. Bu yöntem, potansiyel enerjinin minimizasyonuna dayanmaktadır. Yuan vd. [9] bir çift helisel dişli sistemi için yarı statik çok noktalı bir temas analizi modeli geliştirmiştir. Sistem deformasyonu için şaft sehimi, rulman ve muhafaza deformasyonları dikkate alınmıştır. Modifikasyonlu dişli çiftleri dikkate alınarak yüklü diş temas analizi verilmiştir. Dai vd. [10] analitik titreşim modeline temas kuvveti sonlu eleman modelinden oluşan bir birleşik model kurmuştur. Sonlu eleman modeli, dinamik modelleme için kuvvet-sapma fonksiyonunu bulmak için kısmi temas kaybı koşulunu bulmaktadır. Yuan vd. [11] silindirik bir dişli çifti için yüklü diş temas analizi ve yığın parametre modelinden oluşan birleşik bir model önermiştir. Dişli çifti sönümü ve helis açısı gibi bazı tasarım parametrelerine ek olarak, diş yüzeyi hatasının yüklemeye üzerindeki etkisi incelenmiştir. Wang vd. [12] dişli çifti rijitliği, şaft eksen kayması ve diş bombeliği değişimi için dişli genişliği dilimler halinde dikkate alınarak araştırılmıştır. Dişli çiftindeki deformasyon için bir başlangıç değeri tanımlayarak ve bunu mildeki mikro modifikasyon ve yanlış hizalama değeri ile karşılaştırarak diş teması olup olmadığını belirlemek için yinelemeli bir döngü oluşturulmuştur. Han vd. [13] helisel dişli çiftindeki montaj,

üretim ve sistem deformasyonlarından kaynaklanan yanlış hizalamayı dişli genişliği boyunca değişkenler olarak alarak diş temas analizi üzerinde çalışmışlardır. Profil ve dişli genişliği boyunca statik iletim hatasını ve mikro modifikasyonların varyansını en aza indirmek için, optimizasyon bir genetik algoritma tarafından gerçekleştirilmiştir. Wang vd. [14] bir dizi yay kullanarak eşdeğer dişli çifti rijitliği üzerinde bir etki elde etmek için profil hatası, dişli genişliği, bombeleme ve yanlış hizalamaları incelemiştir.

Sistem dinamiği modelleme çalışmalarından bazı örnekler şu şekilde verilebilir; Ma vd. [15] tepe boşaltması uygulanan dişli çifti sistemi için dişli çifti rijitliğini bulmak için bir sonlu elemanlar analizi kullanmıştır. Timoshenko kiriş teorisini, düğüm yer değiştirmelerini bulmak için kullanılmıştır; böylece şaft rijitliği elde edilmiştir. Dinamik modelleme için birleştirilmiş eğilme ve burulma dinamik hareket eşitlikleri dikkate alınmıştır. Dişli çifti rijitliği üzerinde farklı miktarda tepe boşaltması etkisi incelenmiştir. Kahraman ve Singh [16] dişli çifti sistemini tek serbestlik derecesi ve üç serbestlik derecesi olarak modelleyerek sistem tepkilerini incelemiştir. Yataklardaki doğrusal olmayan hareketi bulmak için boşluk, periyodik ve sinüzoidal dişli çifti değerleri dikkate alınmıştır. Kim vd. [17] sistemin dinamik tepkisini elde etmek için rulmanlardaki düzlemsel deformasyonu dahil etmiştir. Bu nedenle, sistem basınç açısı ve temas oranı, dinamik bir modelde zamanla değişen parametreler haline gelmiştir. Dönme ve öteleme hareketi dinamik tepki karakteristikleri, dişli çifti ve yatak rijitliği araştırılmıştır. Sun vd. [18] dişli çifti rijitliği için ince dilim teorisini yöntemini, tepe boşaltması ve bombelemeyi dahil etme açısından geliştirmiştir. Sonuçların doğruluğunu artırmak için sonlu eleman modelinden bir düzeltme katsayısı kullanılmıştır. Liu vd. [19] on serbestlik derecesi yanal-burulma-sallanma birleşik hareketi için geometrik eksantriklik, jiroskopik moment ve üniform olmayan yüklemeye oluşan dinamik bir model oluşturmuştur. Optimum modifikasyon miktarını bulmak için dinamik yanıt üzerinde farklı tepe boşaltması tipleri ve uzunlukları araştırılmıştır. Kahraman ve Blankenship [20] farklı doğrusal tepe boşaltması uygulama noktaları ve farklı giriş tork değerleri için deneysel bir çalışma yürütmüştür. Dinamik iletim hatası büyüklüğü, HPSTC'den (highest point of single tooth contact – en yüksek diş temas noktası) daha yüksek tork ve daha kısa tepe boşaltması uygulama noktaları ile artmaktadır. Kang ve Kahraman [21] üç eksenli ivmeölçerler kullanarak burulma, öteleme ve sallanma yönlerinde titreşimin analiz verilerini toplamıştır. Şaftın DTE (dynamic transmission error – dinamik iletim hatası)'ye katkısı ve düz dişlilerin doğrusal olmama durumları gözlemlenmiştir. Hotait ve Kahraman [22], DTE ile düz dişli çiftlerinin dinamik gerilim faktörü arasındaki doğrusal ilişkiyi ortaya koymuştur. Tang vd. [23] tek ve çift kaplin etkilerini dikkate alarak düz ve helisel dişli çifti rijitliğini incelemiştir. İmalat kusurlarından kaynaklanan profil hatası, işleme kalitesiyle birlikte değişmektedir. Bunun sonucunda dişli kalitesine göre yüksüz statik iletim hatası tanımlanmaktadır. Xie vd. [24] düz dişlilerde hizalama kaçıklığı nedeniyle dinamik olarak iletilen kuvvette ve dişli çifti rijitliklerindeki etkisini incelemiştir. Dişli çifti rijitliğinin hizalama kaçıklığı ve hızdan etkilendiği gösterilmiştir. Bazı varsayımlarla sinüzoidal bir dalga olarak simüle edilebilmektedir. Ek olarak, profil hatası için gerçek konumdan sapmalarla istatistiksel çalışma yapılabilir [25,26]. Karpat vd. [27] farklı parametrelere sahip dişli çiftinde diş dibindeki gerilmeleri grafik metotla gösterip sonlu elemanlar modeliyle kıyaslayarak doğrulamıştır.

Bu çalışmada, 3. derece polinom eğri türeterek temas ve ayrılma etkilerindeki dilimlere bağlı olan yeni bir yük dağıtım algoritması önerilmiştir. Profil yönündeki ve dişli genişliğindeki deformasyonlar, tanımlanan yük dağıtım algoritmasında tanımlanmıştır. Böylece diş yüzeyinde topoloji optimizasyonuna izin vermektedir. Bu algoritmada



Şekil 1. Çalışmanın akış şeması (Workflow of the study)

burulma deformasyonu ve dişli profili boşluğu tamamen analitik bir yaklaşımla ele alınmış olup mevcut literatürden farklılık göstermektedir. Şaft, dişli ve yatak deformasyonları, diş yükü ve dinamik tepkisi üzerindeki etkileri analitik olarak incelenmiştir. Şaft ve dişli gövdesindeki elastik deformasyonları bulmak için parçalar Timoshenko kiriş teorisi ile modellenmiştir. Dişli çifti rijitliği bulmak için Weber Banaschek'in analitik yaklaşımı kullanılmıştır [28]. Ek olarak, temas kuvvetlerini ve basınç dağılımını belirlemek için farklı şaft uzunlukları ve giriş yükleme koşulları araştırılmıştır. Her dilimdeki temas kuvvetleri elde edildikten sonra, her bir dönme açısındaki ve dişli genişliğindeki temas noktaları temel alınarak esneklik matrisi hesaplanmıştır. Daha sonra, sistem deformasyon bileşenleri ile eşdeğer dişli çifti rijitliği elde etmek için yığın bir parametre modeli kullanılmıştır. Sonuç olarak, sistem deformasyon bileşenleri ile dişli çifti rijitliği elde edilmiş ve dinamik modelleme için bir girdi parametresi olarak kullanılmıştır. NTV (nonlinear time varying – doğrusal olmayan zamanla değişen) modeli olarak altı serbestlik dereceli bir dişli dinamiği modeli kurulmuştur. Hareket eşitlikleri Runge Kutta yöntemi ile zaman integrasyonu ile çözülmüştür.

Diş yüzeyi modifikasyonları ve sistem deformasyon bileşenleri, yük dağılımını belirlemektedir. Bu nedenle, dişli çifti rijitliği ve DTE, yükleme koşullarından önemli ölçüde etkilenmektedir. Diş bombeliği ve doğrusal tepe boşaltması, temas yüzeyindeki mikro modifikasyonlar olarak incelenmiştir. Diş bombeliği, yükü dişin yüzey merkezinde toplamaktadır. Tepe boşaltması ise, dönme esnasında olan kuvvet geçişini yumuşatmaktadır. Bu çalışmada, temas kuvveti ve stres değerleri yayınlanan çalışma [2] ile karşılaştırıldı ve hesaplanan DTE sonuçlarını doğrulamak için DTE'nin [21] deneysel

verileri kullanıldı. Dişlinin asimetrik konumlandırılması ile kenar yükünün arttığı, diş üzerinde temasın kaybolmasına ve dinamik iletim hatasında harmoniklerin değişmesine neden olduğu gösterilmiştir.

2. Modelleme (Modeling)

Bu bölümde Weber Banaschek teorisi çerçevesinde dişli çifti rijitliği modellenmiştir. Şaft, Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak modellenmiştir. Önerilen yük dağıtım algoritması ile dişli çiftinin rijitliğine bağlı olarak diş üzerindeki yük dağılımı diş dilimlere ayırarak bulunmaktadır. Şaft eğilmesi, dişli gövdesinin burulma deformasyonu ve profil boşluğu modelde temas sürekliliği bozulmasının nedenleri olarak kabul edilmiştir. Önerilen modelde, her bir faktör için deformasyon değerleri kavrama hattı yönünde üst üste bindirilmiştir. Temas kuvvetlerini ve basınç dağılımını belirlemek için farklı şaft uzunlukları ve giriş yükleme koşulları araştırılmıştır. Gerçek konumdan bu sapmalar, üniform olmayan yüklü diş temasına ve dişte kısmi temas kaybına neden olabilmektedir. Böylece dişli çifti rijitliği, diş yüzeyinin bir kısmının karşı yüzey ile eşleşmemesi nedeniyle yükleme koşullarından etkilendiği gösterilmiştir. Dişli çiftinde diş yüzeyinin temas yükleme durumunun sistemin titreşim davranışını doğrudan etkilediği bilinmektedir. Her simülasyon için dinamik iletim hatası elde edilmiştir. Profil boşluğu ve dişli burulma deformasyonunun etkileri de dikkate alınmıştır. Yük dağılımını ve DTE'yi elde etmek için iş akışı Şekil 1 ile verilmiştir.

Bölüm 2.2'de temas ayırma bileşenleri, Bölüm 2.3'te yük dağıtım algoritması ve Bölüm 2.4'te temas durumuyla birlikte güncellenmiş dişli çifti rijitliği verilmiştir. Dişli pozisyonuna göre sistem deformasyon bileşenlerinin etkileri, özellikle şaft sehimi etkisi ile yük

dağıtım algoritmasının doğruluğu Bölüm 3.2, 3.3 ve 3.4'te verilmiştir. Bölüm 3'te test kurulumunda aynı dişli parametreleri ile yapılan simülasyonun validasyonu gösterilmektedir. Daha sonra, gösterilen her örneğin dinamik iletim hatası sonuçları incelenmiştir.

2.1. Sistem dinamik modeli (System dynamic modeling)

Bu bölümde dinamik modellemede, yuvarlanma açısı yönünde yığın bir parametre modeli oluşturulmuştur. Dinamik model, dişli boşluğunu, zamanla değişen dişli çifti rijitliğini, sürtünme kuvvetini ve yüksüz statik iletim hatasını içermektedir. Şekil 2 ile düzlemsel yatak ve şaft hareketleri dahil olmak üzere sistemin altı serbestlik derecesini göstermektedir.

Düzlemde dişli hareket eşitlikleri Eş. 1 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_{b1}(y_1) + c_{b1}(\dot{y}_1) - c(\dot{p}) - k g &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{b2}(y_2) + c_{b2}(\dot{y}_2) + c(\dot{p}) + k g &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Burada $m_{1,2}$, bağlı şaft ve dişli kütlesi, $k_{b1,2}$ toplam yatak rijitliği, $c_{b1,2}$ yatak sönümlenme katsayısı ve y kavrama hattı yönünde yer değiştirmesidir.

Z dönme ekseninde şaft eşitlikleri Eş. 2 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} J_{Sin} \ddot{\theta}_{Sin} + c_{Sin}(\dot{\theta}_{Sin} - \dot{\theta}_2) + k_{Sin}(\theta_{Sin} - \theta_2) &= T_2 \\ J_{Sout} \ddot{\theta}_{Sout} + c_{Sout}(\dot{\theta}_{Sout} - \dot{\theta}_1) + k_{Sout}(\theta_{Sout} - \theta_1) &= -T_{1new} \end{aligned} \quad (2)$$

Z dönme ekseninde dişli eşitlikleri Eş. 3 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + c_{Sout}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{Sout}) + k_{Sout}(\theta_1 - \theta_{Sout}) - r_1 c \dot{p} - r_1 k g \\ = -F_{Sa(i)} \cdot r_{a(i)} \cdot \sin(\theta_{a(i)}) \\ - F_{Sb(i)} \cdot r_{b(i)} \cdot \sin(\theta_{b(i)}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\theta}_2 + c_{Sin}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{Sin}) + k_{Sin}(\theta_2 - \theta_{Sin}) + r_2 c \dot{p} + r_2 k g \\ = F_{Sa(i)} \cdot r_{a(i)} \cdot \sin(\theta_{a(i)}) \\ + F_{Sb} \cdot r_{b(i)} \cdot \sin(\theta_{b(i)}) \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafı, zamana veya yuvarlanma açısına bağlı olarak sürtünme kuvveti kayıplarını göstermektedir. Burada k dişli çifti rijitliği, c sönümlenme katsayısı, b dişli boşluğunun yarısı, J_2 pinyon atalet momentini, J_1 dişli atalet momentini, k_{Sin} , k_{Sout} giriş ve çıkış şaft rijitliğini sertliğini ifade eder. p , dinamik ve statik iletim hatalarından oluşan ilgili dişli çifti yer değiştirmelerini temsil eder [31].

Doğrusal olmayan dinamik faktör, dişli çifti rijitliği ve boşluk değişiminden oluşmaktadır. Doğrusal olmayan yer değiştirme fonksiyonları dişli çifti için Eş. 4 ile tanımlanmıştır [16, 32].

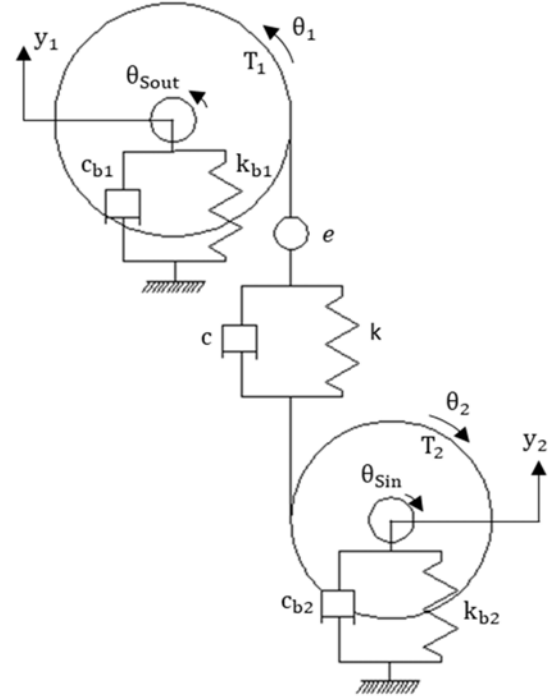
$$g \begin{cases} p - b, & p > b \\ 0, & -b \leq p \leq b \\ p + b, & p < -b \end{cases} \quad (4)$$

$$p = r_2 \theta_2 - r_1 \theta_1 - e + (y_2 - y_1)$$

Eş. 3 ile hesaplanan sürtünme kuvveti Eş. 5 ile her bir dişte sabit sürtünme katsayısı ile hesaplanmıştır.

$$F_{S1,2} = W_{1,2} \cdot \mu \quad (5)$$

Sistemin giriş torkunun sabit olduğu varsayılmıştır. Şekil 3 ile görüldüğü gibi sürtünme kuvvetinin ürettiği tork değeri çıkıştaki yeni tork çıkış değerinden çıkarılarak yeni tork değeri bulunmuştur.



Şekil 2. 6 s.d. dişli çiftinin şematik hali (Schematic of six DOF gear pairs)

Öncelikle Eş. 6 ile normal kuvvet elde edilmektedir. Daha sonra, iletilen dişlideki normal kuvvetin pinyona eşit ve zıt olduğu kabul edilmiştir.

$$T_2 = F_{nnew} \cdot r_{b2} + F_{S2a} \cdot r_{(i)2a} \cdot \sin(\theta_{(i)2a}) + F_{S2b} \cdot r_{(i)2b} \cdot \sin(\theta_{(i)2b}) \quad (6)$$

Eş. 7 ile çıkış tork değeri T_{1new} , sürtünme nedeniyle güç kaybı dikkate alınarak hesaplanmıştır.

$$F_{nnew} \cdot r_{b1} = T_{1new} + F_{S2a} \cdot r_{(i)1a} \cdot \sin(\theta_{(i)1a}) + F_{S2b} \cdot r_{(i)1b} \cdot \sin(\theta_{(i)1b}) \quad (7)$$

Burada T_2 giriş tork değeri, T_{1new} sürtünmeden kaynaklanan güç kaybı dikkate alınarak çıkış tork değeri, r_a , r_b dişler için dönme açısındaki birinci ve ikinci anlık temas noktaları, F_s ve θ karşılık gelen sürtünme kuvveti ve yuvarlanma açısı değerini göstermektedir.

2.2. Sistem deformasyon bileşenlerinin modellenmesi (Modeling of system deformation components)

2.2.1. Dişli gövdesindeki burulma deformasyonu (Torsional deformation of the gear body)

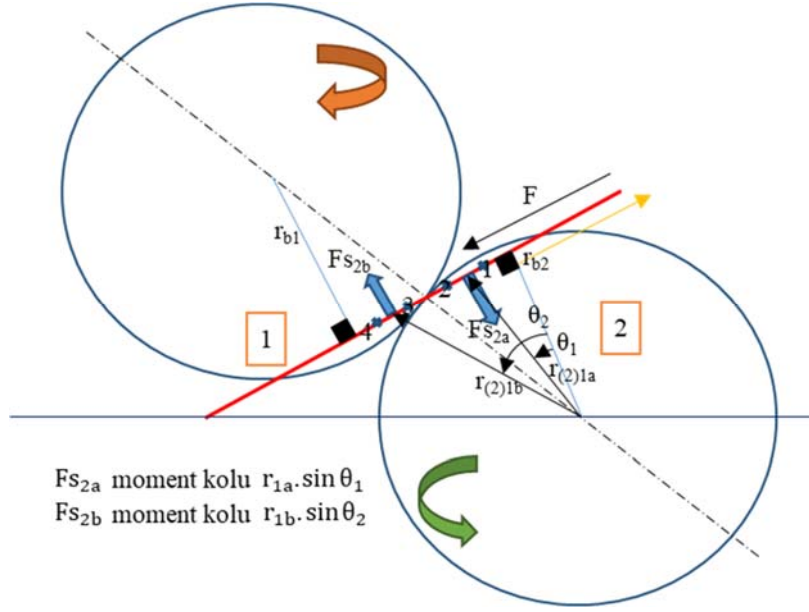
Dişli genişliği boyunca burulma deformasyon açısı, Eş. 8'deki gibi kavrama hattı boyunca dağıtılmış yük kullanılarak elde edilmiştir.

$$\theta = \int_0^L \frac{F_n \cdot r_b \cdot x \, dx}{GJ} = \frac{F_n \cdot r_b \cdot x^3}{3 GJL} \Big|_0^L \quad (8)$$

Burulma deformasyonu Eş. 9 ile verilmiştir.

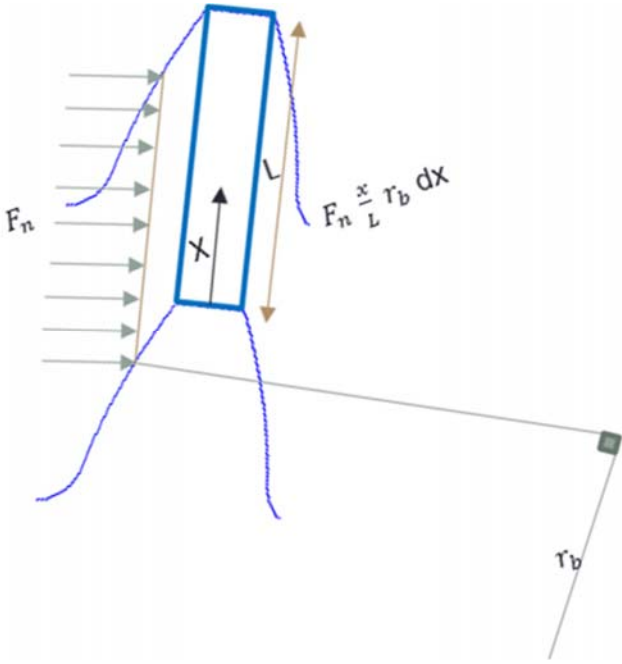
$$\delta_{torsional(i,j)} = r_{any} \theta \quad (9)$$

İlk olarak burulma deformasyonu, Şekil 4 ile gösterildiği gibi düzgün dağıtılmış kuvvetle elde edilmiştir. Bununla birlikte, elastik deformasyonlar nedeniyle temas kuvveti üniform değildir. Bu



Şekil 3. Temas noktasına göre sürtünme kuvvetinin çıkarılması (Friction torque relative to the contact point)

nedenle, dağıtılmış temas kuvveti hesabından sonra, burada F_n burulma deformasyon açısı Eş. 10 güncellenmelidir.



Şekil 4. Uniform dağıtılmış yük ile burulma deformasyonu (Torsional deformation with the uniform distributed load)

Yeniden hesaplanan deformasyon açısı Eş. 10 ile verilmiştir.

$$\theta_{\text{dist}} = \int_0^L \frac{F_n(x) r_b x dx}{GJ} \quad (10)$$

Temas kuvveti dağılımı için 3. derece polinom fonksiyonu Eş. 11 ile oluşturulmuştur.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (11)$$

2606

Burada a, b, c ve d fonksiyon katsayılarıdır ve bu parametreler eğri türetme ile bulunabilir. Dişli genişliği boyunca güncellenmiş burulma deformasyon açısı Eş. 12 ile verilmiştir.

$$\theta_{\text{dist}} = \frac{r_b}{GJ} \int_0^L F_n(x) x dx = \frac{r_b}{GJ} \int_0^L (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx) dx \quad (12)$$

2.2.2. Şaft sehimi (Shaft bending)

Şaft için eleman sayısı, dişli yerleşiminin yatak merkezlerine olan mesafesine bağlı olarak düzenlenmiştir. Her bir düğüm noktasının yer değiştirmesi Eş. 13 ile hesaplanmıştır.

$$q_{(j)} = [K^{-1}][F_{\text{new}}] \quad (13)$$

Şaft sehiminde radyal şaft yer değiştirmesini tanımlarken, Şekil 5 ile verildiği gibi her bir düğümde dişli genişliği boyunca minimumdan maksimuma yer değiştirme farkı Eş. 14 ile elde edilmektedir,

$$\delta_{\text{deflection}(j)} = (q_{(j)} - \min(q_{(j)})) \quad (14)$$

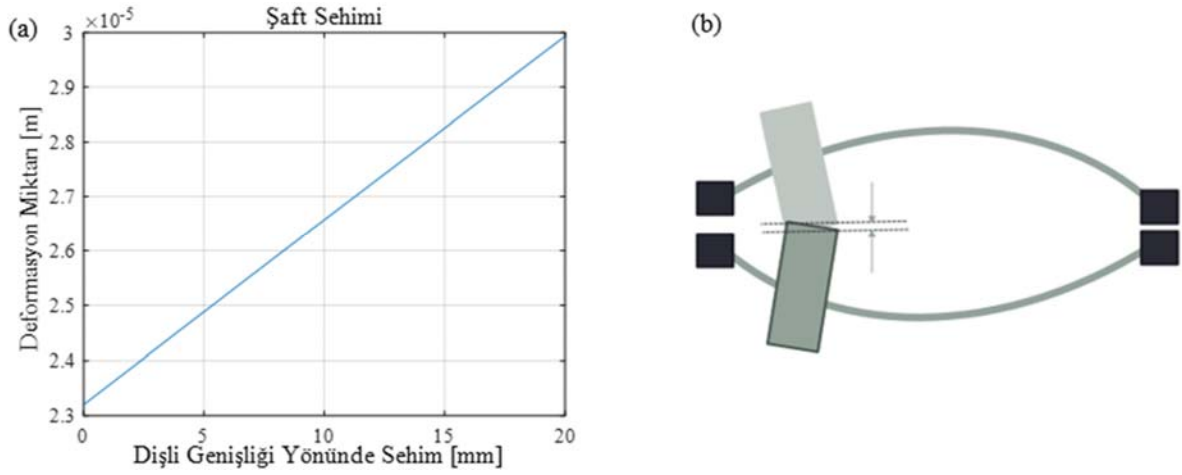
Dişin yükün neden olduğu sapma, ilk iterasyon için sistem elemanlarının deformasyonu olmaksızın diş üzerindeki her düğümde aynı değerde alınmıştır. Dişli çiftindeki şaft sehimi kısmi temas kaybına neden olurken, burulma deformasyonu dişlinin şaft üzerindeki konumuna bağlıdır.

2.3.3. Profil boşluğu (Profile gap modeling)

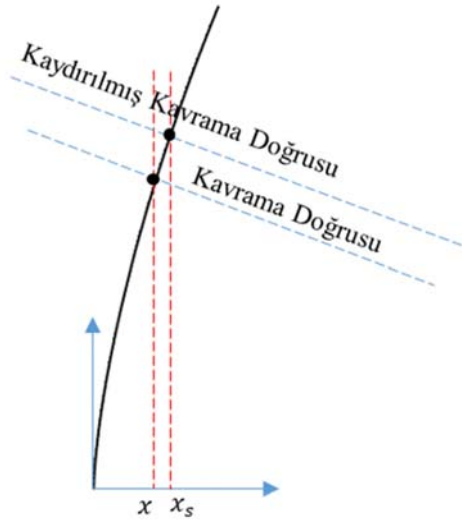
Temas, düz dişli çifti için dişli genişliğindeki bir çizgi hattında gerçekleşmektedir. Diş üzerindeki son düğüme kadar devam edebilen temas izi, şaft sehimi sonrasında dişin yan yüzeyinde bir eğriye dönüşür. Profil boşluğu, Şekil 6 ile gösterildiği gibi, profil evolvent eğrisinin doğası gereği, dişli çifti temas noktaları arasında şaftın sehiminden sonra daha yüksek bir dişli yarıçapına doğru kaymaktadır. Profil boşluğu, kısmi temas kaybına neden olmaktadır.

Şaft sehimi sonrasında dişli genişliği boyunca olan merkezlerarası uzaklığın değişimi Eş. 15 ile verilmiştir.

$$AW_{(i,j)} = q_{(j)} \sin \alpha_c + \frac{m(z_1+z_2)}{2} \quad (15)$$



Şekil 5. (a) Her bir düğümde hesaplanan şaft sehimi. (b) Şaft sehiminin şematik görünümü ve bunun dişli teması üzerindeki etkisi.
((a) Calculated shaft bending at each node. (b) Schematic view for shaft bending and its effect on gear contact.)



Şekil 6. Şaft sehimi sonrasında oluşan profil boşluğu
(Profile gap after shaft bending)

Şaft sehimi sonrasında çalışma basıncı açısının dişli genişliği boyunca değişimi Eş. 16 ile hesaplanmıştır.

$$\alpha_{w(i,j)} = \arccos\left(\frac{r_{b1} + r_{b2}}{AW_{(i,j)}}\right) \quad (16)$$

Her bir düğüm noktasındaki kaymış temas yarıçapı Eş. 17 ile bulunmuştur.

$$r_{s(i,j)} = \frac{rb}{\cos \alpha_{w(i,j)}} \quad (17)$$

Temas yarıçapının yatay koordinatı Eş. 18 ile verilmiştir.

$$x_{s(i,j)} = r_{s(i,j)} \sin(\text{inv } \alpha_{w(i,j)}) \quad (18)$$

Dişli genişliği boyunca profil boşluğu Eş. 19 ile belirtilmiştir.

$$\delta_{g(i,j)} = \frac{x_{s(i,j)} - x_{(j)}}{\cos \alpha_{w(i,j)}} \quad (19)$$

Bağıl profil boşluğu Eş. 20 ile bulunmuştur.

$$\delta_{\text{gap}(i,j)} = \delta_{g(i,j)} - \min(\delta_{g(i,j)})_j \quad (20)$$

2.3. Yük dağılım modeli (Load distribution modeling)

Bu bölümde, sistem deformasyonlarının yük dağılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Diş, her bölümdeki yük dağılımını belirlemek için birkaç dilime bölünmektedir. Deformasyon yüzdesi, Şekil 7 ile verildiği gibi kısmi temas kaybı koşulları için yükü dağıtmakta kullanılmaktadır. İlk döngüde, kısmi temas koşullarından tam teması başlatmak için ne kadar yük gerektiğini belirlenmektedir. Yük, döngüde bir birim yük artışı ile sıfırdan başlayarak tanımlanmış bir değere verilmektedir. Ayırma elemanlarından oluşan boşluğun üstesinden gelmek için yeterli deformasyonu sağlayan bir miktar yük olması gerekir. Ardından diş yan yüzeyi karşı yüzeye eşleşmektedir. Belirlenen yük değeri, ikinci döngüde deformasyon oranı ile dağıtılmaktadır. Toplam ve belirlenen yük değerleri arasındaki yük farkı tüm dilimlere eşit olarak eklenmektedir.

Deformasyon matrisi, şaft sehimi, dişli gövdesinin burulma deformasyonu ve profil boşluğundan oluşmaktadır. Diş üzerindeki gerçek dağıtılmış yük miktarı ilk yinelemede mevcut olmadığından gerçek şaft sehimini belirlemek için yinelemeli bir çalışma yapılmaktadır. Başlangıçta üniform yük dağılımı varsayılır ve ardından ilk şaft eğilme eğrisi elde edilmektedir. Birinci şaft sehimi tarafından oluşturulan yük dağılımı, ikinci iterasyonun girdisidir. Bu algoritma, şaft sehimi belirli bir değere yaklaşıncaya kadar devam etmektedir. Dişli gövdesinin burulma deformasyonu ve profil boşluğu da her yinelemede hesaplanmaktadır.

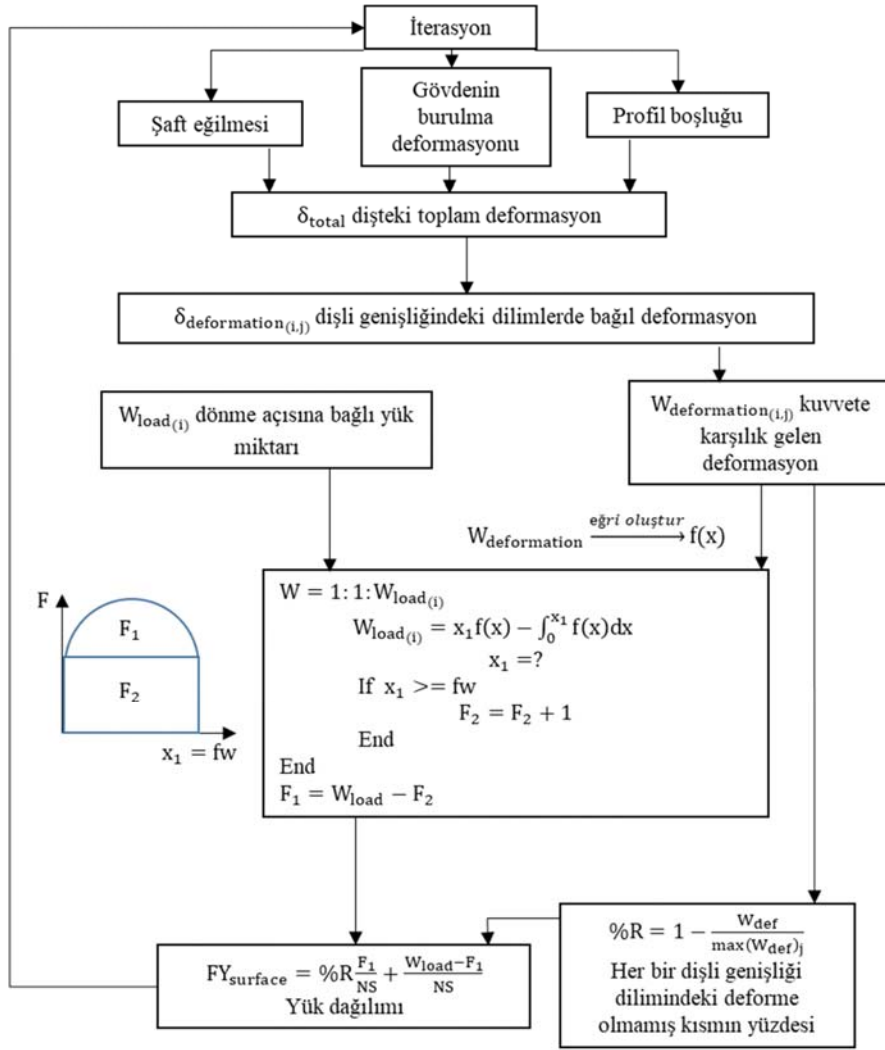
Etki çizgisinde belirlenen deformasyonlar Eş. 21'deki gibi toplanmaktadır. Şaft maksimum eğilme noktası, yük aktarma yolu ile aynı tarafta ise, burulma deformasyonunun diğer bozulma etkilerinden çıkarılması gerekir, aksi takdirde toplanmaktadır.

$$\delta_{\text{total}(i,j)} = \pm \delta_{\text{twist}(i,j)} - \delta_{\text{bending}(i,j)} - \delta_{\text{gap}(i,j)} \quad (21)$$

Deformasyon matrisi, Şekil 8 ile gösterildiği gibi Eş. 22 ile karşılık gelen yuvarlanma açısının minimum deformasyon değerinden çıkarılmaktadır,

$$\delta_{\text{deformation}(i,j)} = \delta_{\text{total}(i,j)} - \min(\delta_{\text{total}(i,j)})_j \quad (22)$$

Eş. 23'te verilen $W_{\text{deformation}}$ ayrı temas noktalarına neden olan ve deformasyon matrisi ile temas dişli çifti rijitliği çarpılarak elde edilebilen eşdeğer kuvvet değeridir.



Şekil 7 Yük dağıtım algoritması (Load distribution algorithm)

$$W_{\text{deformation}(i,j)} = \delta_{\text{deformation}(i,j)} \cdot C_{\gamma\beta(i)} \quad (23)$$

$C_{\gamma\beta}$ temas rijitliğinin, tek diş rijitliğinin orantılı değeridir. Her yuvarlanma açısı için yük miktarı, Eş. 24 ile verildiği gibi dişli genişliğinin çarpımına eşittir.

$$W_{\text{load}(i)} = W_{1(i)} \cdot fw \quad (24)$$

Hem yuvarlanma açısı düzlemlerinin hem de dişlinin genişliği boyunca deformasyon değerleri elde edilmiştir. Bu değerleri kullanarak, yüzey genişliği boyunca deformasyon değişimi 3. derece burulma deformasyon eşitliği olması nedeniyle Eş. 25 ile 3. derece bir eğri için türetilmiştir.

$$F_{n(x)} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (25)$$

Şekil 8 ile gösterildiği gibi, bu 3. derece türetilmiş eğrilerin altındaki alanlar, toplam dağıtılmış yükü bulmak için her bir yuvarlanma açısı için dikdörtgen alanlardan çıkarılmalıdır. Burada x_1 alın genişliği boyunca son temas noktasıdır ve bu noktadan sonra kısmi temas kaybı başlamaktadır. Eş. 26'nın köklerinden sadece biri dişli genişliği aralığında gelmektedir.

2608

$$W_{\text{load}(i)} = x_1(Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D) - \int_0^{x_1} (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) dx$$

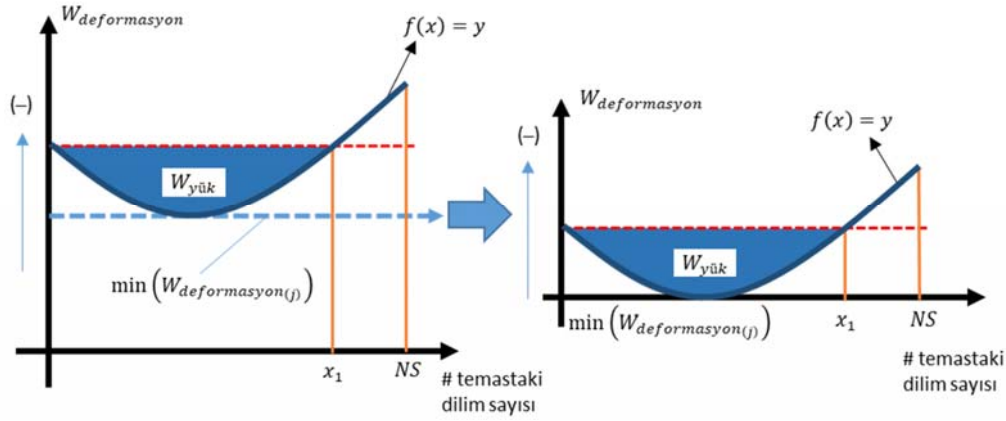
$$W_{\text{load}(i)} = Ax_1^4 + Bx_1^3 + Cx_1^2 + Dx_1 - \left(\frac{Ax^4}{4} + \frac{Bx^3}{3} + \frac{Cx^2}{2} + Dx \right) \Big|_0^{x_1}$$

$$\frac{3Ax_1^4}{4} + \frac{2Bx_1^3}{3} + \frac{Cx_1^2}{2} - W_{\text{load}(i)} = 0 \quad (26)$$

Her yuvarlanma açısının deformasyon değerleri, orantılı bir deformasyon yüzdesi elde etmek için ilgili dilimdeki maksimum deformasyon değerine bölünmektedir. Deformasyon değerleri negatif büyüklükler olarak temsil edilmiştir. Ardından, Eş. 27'de deforme olmayan bir oran elde etmek için tüm yüzdeler birden çıkarılmaktadır.

$$\%R_{(i,j)} = 1 - \frac{W_{\text{deformation}(i,j)}}{\max(W_{\text{deformation}(i,j)})_j} \quad (27)$$

Her bir yuvarlanma açısı için dişli genişliği boyunca toplam yük $W_{\text{load}(i)}$ Eş. 28 ile verilmiştir. Yük, %R ile çarpılarak yüz genişliği boyunca dağıtılmaktadır. $W_{\text{load}(i)}$ her yuvarlanma açısı için tanımlanmıştır. Önemli olan nokta, her yuvarlanma açısı adımı için



Şekil 8. Dişli genişliği boyunca deformasyon matrisi için eğri türetme (Curve fitting for deformation matrix along face width)

kısmi temas kaybına neden olmayan ayırma faktörü etkilerini yükün ne kadar telafi edebileceğidir. Bu nedenle, kısmi temas kaybını sona erdiren yük miktarını bulmak için yük sıfırdan artımlı olarak uygulanmaktadır. Dişli genişliği boyunca kısmi bir temas kaybı varsa her yuvarlanma açısı adımı için yük deformasyon yüzdesi ile dağıtılmaktadır. Tüm dilimler dişli genişliği boyunca karşı yüzeyle eşleşirse, ilk adımda kısmi temas kaybını sona erdiren kısmi yük F_1 miktarının belirlenmesi gerekir. Bu yük bir deformasyon yüzdesi ile dağıtılır. F_2 yükünün diğer kalan kısmı üniform bir yüküdür ve dişli genişliğindeki tüm dilimler için eşit bir değerdir.

$$W_{load(i)} = F_{1(i)} + F_{2(i)} \quad (28)$$

F_2 yükünün kalan kısmı, toplam dağıtılmış yükten F_1 kısmi yükünün çıkarılmasıyla elde edilmiştir. F_2 sıfıra eşitse, W_{load} F_1 ile aynıdır. Bu, dişli çiftinin çizgisel temasını kaybettiği ve kısmen yüklendiği anlamına gelmektedir. Birinci yük dağıtım iterasyonu, Eş. 29 ile üniform yükleme için bulunmaktadır. Düzgün olmayan yük dağılımı ile shaft sehiminin yeniden hesaplanması gerekir ve bu, sonuçlar arasında çok küçük bir fark olana kadar devam eden bir yineleme sürecini gerektirmektedir. Bu adımlardan sonra, temas basıncı ve dişli çifti rijitliği hesaplamaları için yük dağılımı kullanılmaktadır.

$$F_{Y_{surface(i,j)}} = \%R_{(i,j)} \frac{F_{1(i)}}{NS} + \frac{F_{2(i)}}{NS} \quad (29)$$

Diş yüzeyindeki yük dağılımı kullanılarak temas bant genişliği ve basınç dağılımı Eş. 30, Eş. 31 ile hesaplanmıştır [29]. Hesaplanan yük dağılımı ile dikdörtgen temas bandının yarı genişliği,

$$b_{H_{surface(i,j)}} = \sqrt{8 \rho_r(i) \frac{F_{Y_{surface(i,j)}}}{\pi E_R}} \quad (30)$$

Hesaplanan yük dağılımı ile temas basıncı,

$$\sigma_{H(i,j)} = \frac{2 \cdot F_{Y_{surface(i,j)}}}{b_{H_{surface(i,j)}} \cdot \pi} \quad (31)$$

2.4. Sistem deformasyonu etkileri ile dişli çifti rijitliğinin hesaplanması (Gear mesh stiffness calculation with system deformation effects)

Dişli genişliği birkaç dilim halinde ayrıştırılıp birbirine bağlanmıştır. Düzgün olmayan yükleme, her dilimin farklı şekilde deforme olmasına neden olmaktadır. Her bir dilimin yer değiştirmesini belirlemek için dilimler arasındaki kaplin rijitliği dikkate alınmıştır. Dişli genişliği boyunca dilimlerin esnekliği yığın

parametre modellenmesi ile elde edilmiştir. Dinamik analizde kullanılmak üzere sistem deformasyonlarına göre değişen dişli çifti rijitliğinin hesabı bu bölümde verilmektedir.

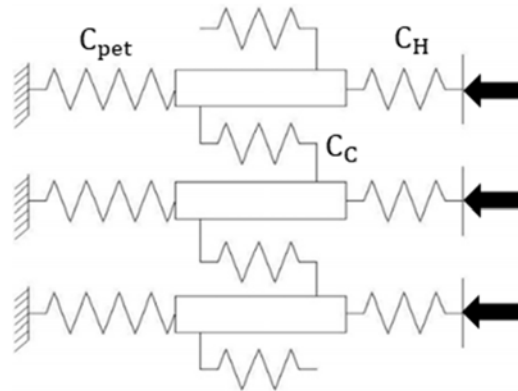
Hertz deformasyonu, dikdörtgen temas bandının güncellenmiş yarı genişliği kullanılarak Eş. 32 ile yeniden hesaplanmaktadır.

$$C_H = \frac{1}{\pi} \left[\left| \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \ln \left(\frac{b_{H_{surface(i,j)}}^2}{4 \cdot t_1^2} \right) + \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{E_1} \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \ln \left(\frac{b_{H_{surface(i,j)}}^2}{4 \cdot t_2^2} \right) + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{E_2} \right| \right] \quad (32)$$

Hertz deformasyonu dışında eğilme, kesme, aksel basma ve temel esnekliği seri bağlantı olarak alınmıştır. Bu yayların karşılığı C_{pet} olarak adlandırılır ve Eş. 33 ile verildiği gibi pinyon ile dişli için hesaplanması gerekmektedir.

$$C_{pet1,2(i)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_{D1,2}} + \frac{1}{k_{S1,2}} + \frac{1}{k_{a1,2}} + \frac{1}{k_{f1,2}} \right)} \quad (33)$$

C_{pet} yükten bağımsızdır, yalnızca Hertz deformasyonu yüke bağlıdır. Bu nedenle, C_{pet} dişli genişliği boyunca değişmez. Buna karşılık, Hertz deformasyonu dişli genişliği ve profil yuvarlanma açısı boyunca değişmektedir. Başka bir yay etkisi, Şekil 9 ile gösterildiği gibi bitişik dilimler arasında göreceli harekete direnç yayı C_{pet} ile orantılı olan C_c kaplin rijitliğidir. Literatürde C_c rijitliği üzerine bazı çalışmalar bulunmaktadır [23, 30].



Şekil 9. Dişlideki dilim yayların şematik gösterimi (Schematic representation of slice springs at gear)

$$C_{C1,2} = 0,04 \cdot C_{pet,1,2} \cdot NS_{1,2}^2 \quad (34)$$

Bir önceki çalışmaya benzer şekilde, Börner [30] bağıl hareket direnç yayını Eş. 35 ile açıklamıştır. Eş. 34 ve Eş. 35 eşitliklerinden elde edilen bu hesaplama yöntemlerinin sonuçları yaklaşık %99 benzerlik gösteren yakın değerler vermektedir. Bu çalışmada bağlantı rijitliği hesabı için

Börner yaklaşımı seçilmiştir.

$$C_{C1,2} = 2,75 \left(\frac{m_n}{b_s} \right)^2 \frac{k_i + k_{i+1}}{2} \quad (35)$$

Burada NS dilim sayısını, b_s dilim genişliğini, m_n normal modülü, k_i dilim rijitliğini ve k_{i+1} komşu dilim rijitliğini temsil etmektedir. k_i ve k_{i+1} diş yüzeyine bombeleme modifikasyonu uygulanmışsa aynı değerlerdir. İlk ve son dilim tek C_c 'den oluşur ve diğerleri komşu dilimlerinden dolayı çift C_c kaplin rijitliğine sahiptir.

Pinyon ve dişlinin ilk ve son dilim rijitliği Eş. 36 ile verilmiştir.

$$C_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_{pet,1,2}} + \frac{1}{C_{H,1,2}}} + C_{C1,2} \quad (36)$$

Pinyon ve dişlinin orta dilimlerinin rijitliği Eş. 37 ile belirtilmiştir.

$$C_{1,2(i)} = \frac{1}{\frac{1}{C_{pet,1,2(i)}} + \frac{1}{C_{H,1,2(i)}}} + 2 \cdot C_{C1,2(i)} \quad (37)$$

Dişli genişliği ve yuvarlanma açısı yönü boyunca her bir temas noktası için global dişli çifti rijitlik matrisi Eş. 38 ile gösterilmiştir.

$$K_{global,1,2(i,j)} = \begin{pmatrix} C_{1,2(i)} & -C_c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -C_c & C_{1,2(2)} & -C_c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -C_c & C_{1,2(3)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_c & C_{1,2NS(i-1)} & -C_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_c & C_{1,2NS(i)} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Eş. 39 kullanılarak her bir dilimdeki birim yüke karşılık gelen yer değiştirme bulunabilir.

$$C_{global,1,2(i,j)} = K_{global,1,2(i,j)}^{-1} \cdot F_{Y_{surface(i,j)}} \quad (39)$$

Eş. 40 ile her bir dilimin dişli çifti rijitliğini bulmak için dağıtılmış yük her bir birim yükteki yer değiştirmeye bölünmelidir.

$$k_{slice,1,2(i,j)} = \frac{F_{Y_{surface(i,j)}}}{C_{global,1,2(i,j)}} \quad (40)$$

Daha sonra, dişli genişliği boyunca dişli çifti rijitliği elde etmek için Eş. 41'de verildiği gibi her bir dilim rijitliği ilgili yuvarlanma açısında toplanmalıdır.

$$k_{new,1,2(i)} = \sum_1^{NS1} k_{slice,1,2(i,j)} \quad (41)$$

Tek diş çiftinin güncellenmiş rijitliği Eş 42 ile belirtilmiştir.

$$K_{1,2(i)} = \frac{1}{\frac{1}{k_{new1(i)}} + \frac{1}{k_{new2(i)}}} \quad (42)$$

Dişli çifti rijitliği Eş. 43'te verilmiştir.

$$K_{eq(i)} = K_{1(i)} + K_{2(i)} \quad (43)$$

3. Nümerik Analiz (Numerical Analysis)

Bu çalışmada MATLAB® kullanılarak dişli temas kuvveti dağıtım algoritması oluşturulmuş ve Simulink® ortamında sistem dinamik hareketi modellenmiştir. Bölüm 3.2, 3.3 ve 3.4'teki temas kuvveti ve basınç modelleri, sonlu elemanlar analizi ve yayınlanmış çalışma [2] ile doğrulanmıştır. Bölüm 3.5'te hesaplanan DTE sonuçlarını karşılaştırmak için DTE'nin deneysel verileri kullanılmıştır. Bu analizler şaft üzerinde simetrik ve asimetrik konumlu dişliler için şaft sehimi etkisini elde etmek için yapılmıştır.

Tepe boşaltması ve bombeleme olan dişli çifti sistemine farklı tork değerleri uygulanmıştır. Yüklü temas bölgesi, daha yüksek tork altında dişlide diş yüzeyinin daha geniş bir alanına uzanmaktadır. Verilen örnekler için kısmi temas kaybı meydana gelmektedir. Bunun nedeni; yük deformasyonları, temas bozulmaları veya modifikasyonlarının boşluğunu aşamamaktadır.

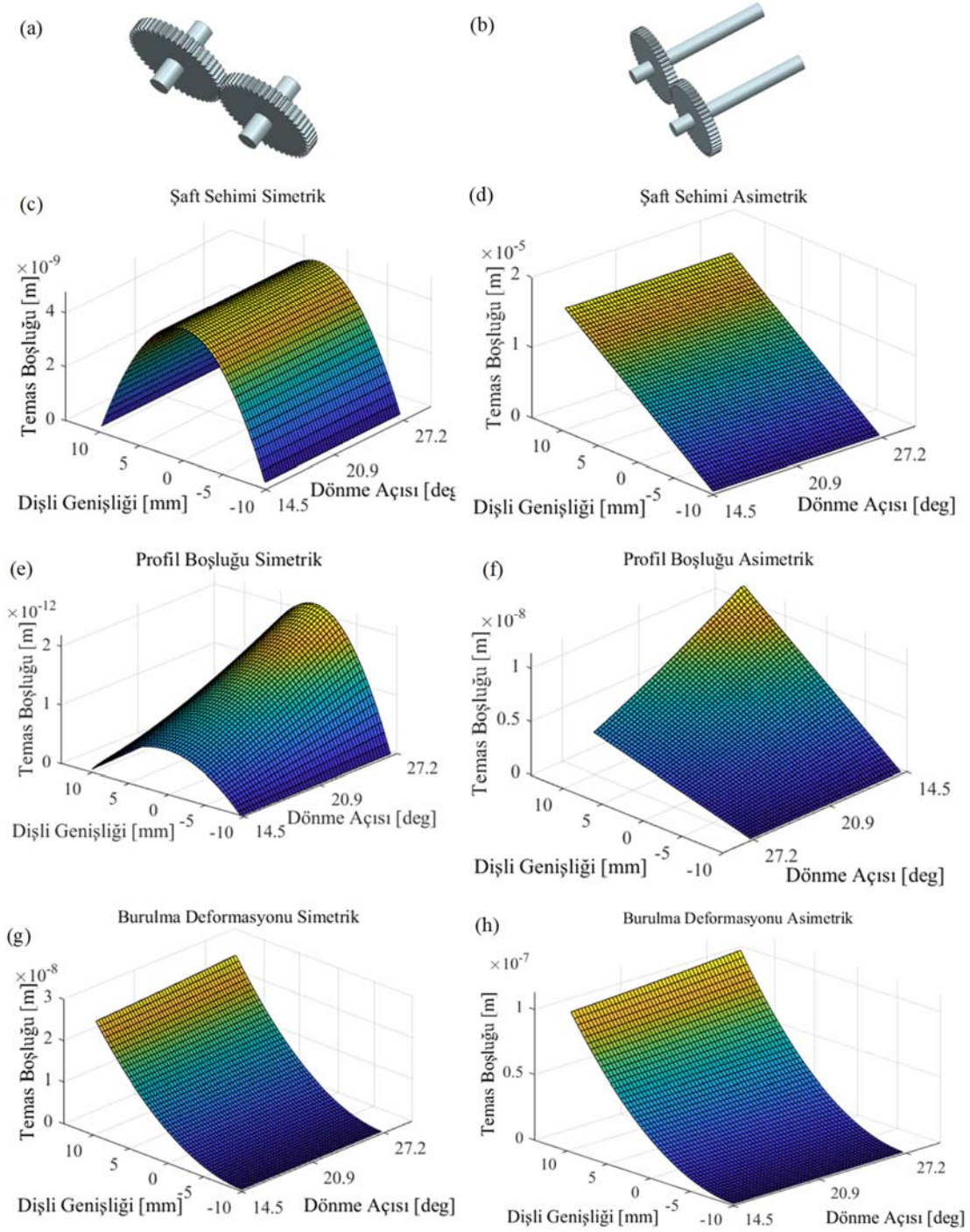
Önerilen algoritmayı doğrulamak ve hesaplanan sonuçlarla karşılaştırmak üzere Ref [2]'den iki vaka çalışması seçilmiştir. Ref [2]'de kullanılan dişli parametreleri kullanılmıştır. Kübik yük fonksiyonundan dolayı geçişlerde sadece tepe oluşumlarında az bir fark bulunmaktadır.

3.1. Sistem deformasyonlarının temas sürekliliğine etkileri (The effects of system deformation on contact continuity)

Dişli temasına etkisini göstermek için şaft sehimi, burulma deformasyonu ve profil boşluğu analitik olarak tanımlanmıştır. Normal kuvvet, şaftın kavrama doğrusu yönünde deforme olmasına neden olur. Bölüm 2.3'te bahsedildiği gibi, yük dağılımıyla birlikte değişen şaft sehim miktarı bir yineleme süreci gerektirmektedir. Profil boşluğu da doğrudan şaft sehim değerine bağlıdır. Ayrıca, tork dişli gövdesinde deformasyona neden olmaktadır. Uniform olmayan kuvvet dağılımı nedeniyle kısmi temas kaybıyla burulma deformasyonu artmaktadır.

Diş teması üzerinde şaft sehim etkisini elde etmek için iki durum incelenmiştir. Dişli çifti, Durum 1 için yatak merkezlerine 50 mm eşit uzaklıkta konumlandırılmıştır. Durum 2, sol yatak merkezine 50 mm ve sağ yatak merkezine 320 mm uzaklıkta asimetrik olarak yerleştirilmiş dişli için verilmiştir.

Sonuçlar Şekil 10 ile verilen temastan ayırma bileşenleri için 85 Nm giriş torkunda Durum-1 (a) ve Durum-2 (b) olmak üzere iki şaft uzunluğu için verilmiştir. Dişli simetrik olarak konumlandırıldığında, diş teması üzerinde şaft sehim deformasyon etkisi çok düşük seviyededir. Diş üzerindeki bağıl şaft sehimi, dişli genişliğinin ortasında en fazla değere ulaşmaktadır. Dişli dönüşü sırasında normal kuvvetin sabit olduğu düşünüldüğünde, sehim yuvarlanma açısı ile değişmez. Asimetrik konumlandırma için, sehim miktarı, Şekil 10c, Şekil 10d'de verildiği gibi, şaftın en çok deforme olan tarafında dişli genişliği boyunca artar. Profil açıklığı Şekil 10e, Şekil 10f'de görüldüğü gibi dişli genişliği yönünde şaft sehimine paralel olarak değişmektedir. Evolvent profilin şekli nedeniyle yuvarlanma açısı ile beraber dişli dış yarıçapındaki tepe noktasına gelmektedir. Gövdenin burulma deformasyonu, dağıtılan yük ile dişli genişliği yönünde artmakta, yuvarlanma açısı yönünde de hafifçe artmaktadır. Şekil 10g, Şekil 10h'de dişin deforme olmuş tarafında yük yoğunluğunun daha yüksek olması nedeniyle kısmi temas kaybı ile gövdenin burulma deformasyonu artmıştır.



Şekil 10. (a) Simetrik konumlandırılmış durum (b) Asimetrik konumlandırılmış durum (c) Simetrik için şaft sehimi deformasyonu (d) Asimetrik için şaft sehimi deformasyonu (e) Simetrik için profil boşluğu (f) Asimetrik için profil boşluğu (g) Simetrik için dişli gövdesi burulma deformasyonu (h) Asimetrik için dişli gövdesi burulma deformasyonu ((a)Case 1. (b) Case 2. (c) Shaft bending deformation for Case 1. (d) Shaft bending deformation for Case 2. (e) Profile gap for Case 1. (f) Profile gap for Case 2. (g) Torsional deformation of gear body for Case 1. (h) Torsional deformation of gear body for Case 2.)

3.2. 340 Nm giriş torku ile simetrik konumlandırılmış dişli çiftinde temas durumu (Contact status symmetrically positioned gear pair with 340 Nm input torque)

Şekil 11 ile grafiklerde her bir dönme açısında dişli genişliğindeki yükün dağılımı gösterilmiştir. 14.5 [rad] tek diş temas bölgesi ile başlayıp 20.9 [rad] civarında dönme esnasında tek diş bölgesine

tekebul etmektedir. İzleyen dönme açılarındaki 27.2 [rad]'a doğru tekrar tek diş bölgesine geçiş yapmaktadır. Dişli çiftinin, yatak merkezlerine 50 mm eşit uzaklıkta şaftın ortasında konumlandırıldığı varsayılmıştır. Tablo 1 ile verilen dişli parametrelerine Ref [2] ile aynı şekilde 5 μ m bombeleme ve 10 μ m tepe boşaltması ile 340 Nm giriş torku uygulanmıştır. Temas bölgesi, diş yüzeyi üzerinde dişli genişliği yönünde uzanmaktadır. Ancak, bombeleme nedeniyle SAP (start of

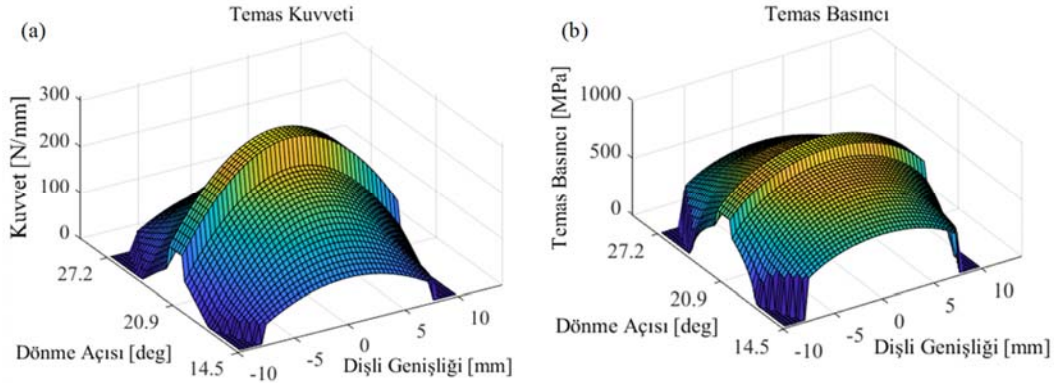
active profile – temasın başladığı nokta) ve EAP (end of active profile – temasın bittiği nokta) yuvarlanma açısında bir miktar kısmi temas kaybı alanı vardır. Tepe boşaltma miktarı, tek ve çift diş bölgeleri arasında düzgün bir geçiş sağlamak için yetersiz kalmaktadır. Bu bölgede düzgün bir geçiş isteniyorsa, verilen giriş yüküne göre daha yüksek bir tepe boşaltması değerinin gerekli olduğu anlamına gelmektedir.

3.3. 85 Nm giriş torku ile asimetrik konumlandırılmış dişli çiftinde temas durumu (Contact status for asymmetrically positioned gear pair with 85 Nm input torque)

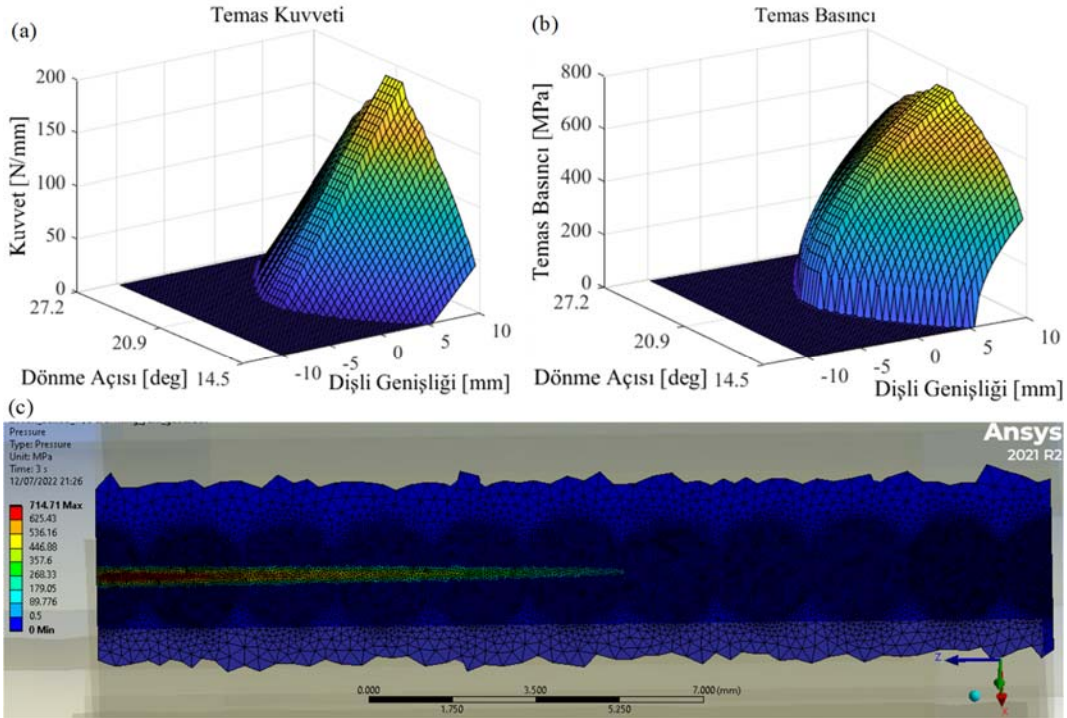
Dişli çifti yatak merkezine 50 mm sola ve 320 mm sağa olacak şekilde yerleştirilmiştir. Tablo 1 dişli parametrelerine Ref [2]'ye benzer 85 Nm tork ve 5 μ m tepe boşaltması uygulanmıştır. Şaft uzunluğu ve şaft

üzerindeki dişli konumu, minimum sehim değeri ile maksimum arasındaki fark olan dişli genişliği boyunca 13 μ m sehim deformasyonu sağlayacak şekilde düzenlenmiştir. Buradaki amaç, paylaşılan hesaplama algoritmasını doğrulamak için Ref [2] ile aynı deformasyon değerini kullanmaktır. Yük, Şekil 12 ile verilen şaftın daha az sehim olan tarafında baskın olarak dağıtılmaktadır. Bu nedenle, dişlinin daha fazla deforme olmuş tarafı, dişli genişliğinin yaklaşık yarısı kadar temas kaybı göstermiştir. Tepe boşaltması, yuvarlanma açısı yönünde dişler arasında düzgün kuvvet geçişi sağlamaktadır.

Hesaplanan temas basıncı sonuçları, sonlu elemanlar analizi ile doğrulanmıştır. Sonlu elemanlar analizi dişli çiftinin dönme esnasında yükün tek diş bölgesine geldiği dönme açısı için yapılmıştır. Sonuçlar arasında kıyaslama yaparken analitik olarak bulunan Şekil 12b ile



Şekil 11. Simetrik konumlandırma ile 340 [Nm] giriş torku için temas dağılımı karşılaştırması (a) Hesaplanan temas kuvveti dağılımı. (b) Hesaplanmış temas basıncı dağılımı (Contact pattern comparison for 340 Nm input torque with symmetric positioning (a) Calculated contact force pattern. (b) Calculated contact pressure pattern)



Şekil 12. Asimetrik konumlandırma ile 85 [Nm] giriş torku için temas dağılımı karşılaştırması (a) Hesaplanan temas kuvveti dağılımı. (b) Hesaplanmış temas basıncı dağılımı. (c) Sonlu elemanlar sonucu (Contact pattern comparison for 85 Nm input torque with asymmetric positioning (a) Calculated contact force pattern. (b) Calculated contact pressure pattern. (c) Finite element result)

verilen 20.9 [rad]'daki dönme açısı dikkate alınması gerekir. Sonlu eleman modelinin sınır koşulları daha önceki çalışmamız Ref [33] ile verilmiştir. Model sınır şartlarında şaftın uç noktalarında radyal hareket sınırlanmıştır. Yük transferini simüle edebilmek için döndürülen şaftın bir ucu dönme yönünde tutulmuştur. Modelin yakınsayabilmesi için her bir şaftın bir ucundan eksenel yönden de hareket kısıtlanmıştır. Sonlu elemanlar analizinin hesaplama algoritması ve analitik yaklaşım, sonuçlar arasında temas alanı farkına neden olarak gösterilebilir.

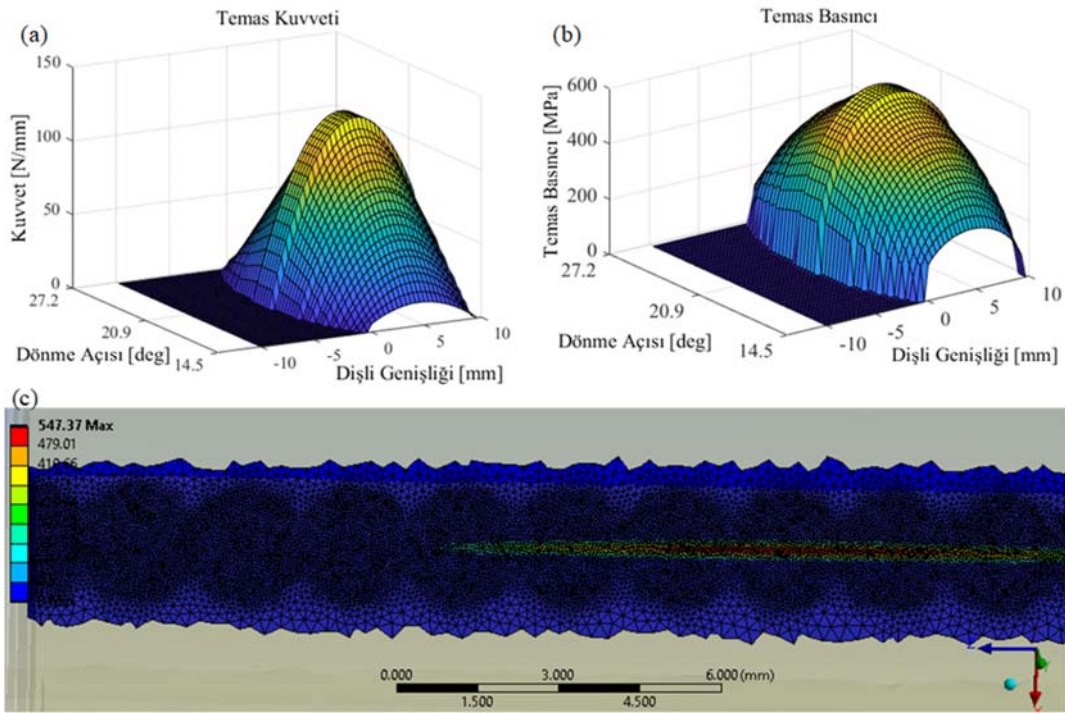
3.4. 85 Nm giriş torku ile asimetrik konumlandırılmış ve bombeleme uygulanmış dişli çiftinde temas durumu (Contact status for asymmetrically positioned gear pair with 85 Nm input torque applying crowning)

5 μm bombeleme modifikasyonu, Şekil 12 ile verilen aynı dişli tasarım parametrelerine uygulanmıştır. Maksimum temas kuvveti,

dişli genişliğinin orta kısmına kayarak değeri azalmıştır. Temas alanı diş yüzeyinin daha geniş bir bölümüne uzanmaktadır. Bu modifikasyon tipi dişin temas durumunu kısmen iyileştirmiştir. Bununla birlikte, diş yüzeyinde halen kısmi temas kaybı bulunmaktadır. Temas durumunu geliştirmek için bombeleme miktarının artırılması veya diş yüzeyi üzerine eğim modifikasyonu verilebilir. Temas basıncı hesaplaması, Şekil 13c'deki sonlu eleman sonuçlarıyla eşleşmektedir.

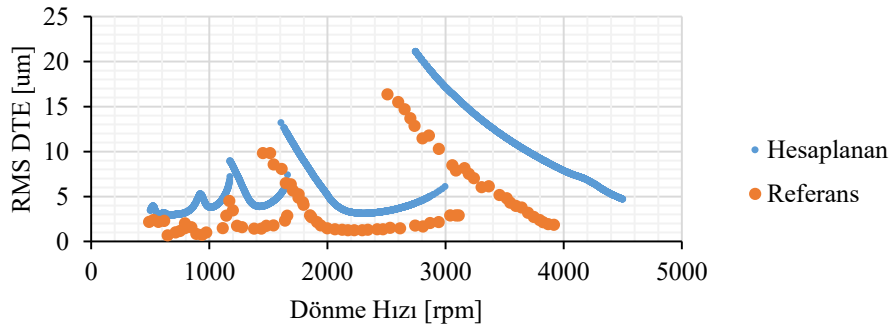
3.5. Sistem dinamik cevabı (System dynamic response)

Literatürde iyi bilinen bir çalışmadan [21] elde edilen dinamik iletim hatasının deneysel verileri, Şekil 14 ile önerilen modelin dinamik yanıtını doğrulamak için kullanılmıştır. Bir dişli çiftinin hızlandırılması ve yavaşlatılması esnasında göstermiş olduğu sistemin dinamik cevap karakteristiğini göstermektedir. Test düzeneği tipi, düz dişlilerin dinamik iletim hatasını ölçmek için mekanik kapalı çevrim



Şekil 13. Tepe boşaltması ve diş bombeliği ile asimetrik konumlama halinde temas dağılımı karşılaştırması (a) Hesaplanan temas kuvveti dağılımı. (b) Hesaplanmış temas basıncı dağılımı (c) Sonlu elemanlar sonucu

(Contact pattern comparison for 85 Nm input torque with asymmetric positioning applying crowning (a) Calculated contact force pattern. (b) Calculated contact pressure pattern (c) Finite element result)



Şekil 14. Referans test düzeneğinde DTE sonuçları [21] ile 200 Nm giriş torkunda hesaplanan DTE sonuçları
(Comparison between measured DTE values of spur gear pair from the test performed [21] and dynamic transmission error calculation result.)

test sistemidir. Giriş hızı, dişli sisteminin rezonans hızına yaklaştığında, dişlinin dönmesi sırasında göreceli dinamik yer değiştirilmenin getirdiği diş çifti ayrılmaları ve atlama fenomenine neden olmaktadır.

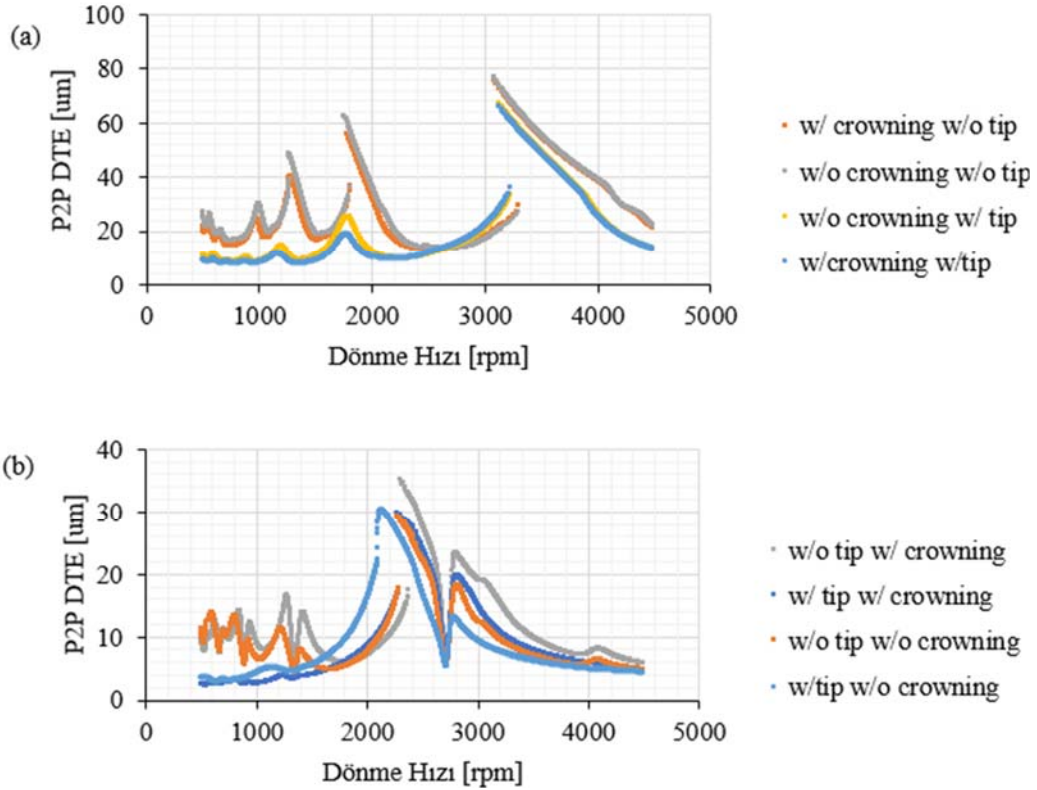
Deneysel sonuçları ile simülasyon arasında, özellikle Şekil 14 ile gösterilen harmoniklerin frekans aralığının ve dinamik iletim hatası sonuçları modelinin birbiriyle eşleştiği görülebilir. Yüksüz statik iletim hatasını simüle etmek için 3 sinüs dalgası kullanılmıştır. Yüksüz statik iletim hatasının girdi olarak ne alındığından Ref [21]'de net bir şekilde bahsedilmemektedir. DTE'nin genlikleri, yüksüz statik iletim hatasıyla belirtilir ve daha büyük üretim hatalarıyla daha yüksek değerlere sıçramaktadır. Burada kullanılan üretim hatasını azaltarak daha yakın sonuçlar elde etmek mümkün olabilmektedir.

DTE simülasyonları, Ref [2]'de verilen parametreler kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Şekil 12 ve Şekil 13 ile verilen her bir çalışma için bombeleme ve tepe boşaltması kombinasyonları sırasıyla Şekil 15 ile gösterilmiştir. Burada "w/" ile, "w/o" olmadan anlamına gelmektedir. Tepe boşaltması, alt harmonik tepe noktalarını ortadan kaldırır ve DTE genliklerini azaltmaktadır. Bu sayede sistem daha kararlı hale gelmektedir. Diş bombeliği, geçiş frekanslarını biraz üst değerlere kaydırarak sistem dinamiklerini olumlu yönde etkilemektedir.

DTE üzerindeki diş bombeliği etkisi, sistemdeki yüke bağlıdır. Kısmi temas kaybına paralel olarak DTE üzerindeki bombeleme etkisi yük artışı ile azalmaktadır. Ancak bombeleme, diş yüzeyi üzerindeki temas alanının genişletilmesini sağlamak ve DTE genlikleri artmaktadır. Bu nedenle, Şekil 15 ile görüldüğü gibi sistemin dinamik tepkisi üzerinde olumsuz etkileri bulunmaktadır.

4. Simgeler (Symbols)

E	: elastik modülü
r	: temel daire yarıçapı
G	: kayma modülü
z	: diş sayısı
ν	: Poisson oranı
S	: eğrilik yarıçapı
β	: yük açısı
y_p	: yük uygulama noktası için diş yüksekliği
W	: yük
y	: kesit diş yüksekliği
m	: modül
\overline{Sf}_{20}	: diş dibindeki diş kalınlığı
P	: güç
$t_{1,2}$: kavrama hattı boyunca diş kalınlığı
α	: basınç açısı
K	: rijitlik
J	: kütle atalet momenti
x_t	: statik iletim hatası
J_p	: polar atalet momenti
g	: yer değiştirme fonksiyonu
L_1	: dişli genişliği
p	: dinamik yer değiştirme
L_2	: tork iletim hattında dişliden yatağa olan mesafe
b	: yarı diş boşluğu
C_c	: kaplin rijitliği
e	: yüksüz statik iletim hatası
C_{pet}	: kök rijitliği
NS	: dilim sayısı



Şekil 15. DTE hesaplama sonuçları (a) Simetrik konumlandırma ile 340 [Nm] giriş torku için DTE sonuçları (b) Asimetrik konumlandırma ile 85 [Nm] giriş torku için DTE sonuçları (DTE calculation results (a) DTE results for 340 Nm input torque with symmetric positioning. (b) DTE results for 85 Nm input torque with asymmetric positioning)

C_H	: Hertz basıncından kaynaklanan rijitlik
%R	: kuvvet oranı
$C_{\gamma\beta}$: temas rijitliği
s. d.	: serbestlik derecesi
x_1	: dişli genişliğindeki son temas noktası
δ_f	: diş dibi esnekliği
F_1	: normal kuvvetin uniform olmayan kısmı
AW	: merkezler arası mesafe
F_2	: normal kuvvetin uniform kısmı
STE	: statik iletim hatası
σ	: temas basıncı
DTE	: dinamik iletim hatası
δ_b	: eğilme esnekliği
SAP	: aktif temasın başlangıcı
δ_a	: eksenel basma esnekliği
LPSTC	: en düşük tek diş temas noktası
δ_s	: kayma esnekliği
HPSTC	: en yüksek tek diş temas noktası
δ_h	: Hertz basıncı esnekliği
NTV	: doğrusal olmayan zamanla değişken
EAP	: aktif temasın bitişi
NTI	: doğrusal olmayan zamanla değişmeyen

4.1. İndisler (Indices)

1	: pinyon
Sin	: giriş şaftı
2	: döndürülen şaft
Sout	: çıkış şaftı

5. Sonuçlar (Conclusions)

Sistem deformasyon bileşenleri ile dişli çifti üzerinde yük dağılımı sürekliliğini göstermek için yağın parametre modelini kullanarak yüklü diş temas analizi için birleştirilmiş bir analitik model önerilmiştir. Şaft sehimi, sehim sonrası oluşan profil boşluğu ve dişli gövdesinin burulma deformasyonu, dişli temasının bozulmasını etkileyen ana elemanlar olarak kabul edilmiştir. Burulma deformasyonunu ve dişli profili boşluğunu tam analitik yaklaşımla dikkate alan doğrusal olmayan model, mevcut literatürden farklı olarak temas halindeki parabolik yük dağılımını dikkate alacak şekilde önerilmiştir. Helisel dişli çifti yan yana belirli bir açıyla dizilmiş küçük düz dişli dilimleri olarak düşünülebilir. Bu çalışmada düz dişliler için geliştirilen model, dişli geometrisinin helisel dişli için uyarlanmasıyla tüm silindirik dişli çiftlerinde kullanılabilir. Sonuçlardan bazıları aşağıdaki gibidir,

- Dişli merkezinden her bir yatak merkezine olan yanal mesafelerin oranı ne kadar artarsa, şaft deformasyon miktarı kademeli olarak artma eğilimi göstermektedir.
- Kısmi temas kaybı, dişli gövdesinin burulma deformasyonunun artmasına neden olmaktadır. Bunun nedeni, dağıtılan kuvvetin dişlinin daha az deforme olmuş tarafında birikmesi ve dişli gövdesindeki burulma deformasyonunu artırmasıdır. Dişli gövdesinin burulma deformasyonu, temas durumunu iyileştirebilecek veya bozabilecek şekilde şaft üzerindeki dişli konumuna bağlıdır. Dişli, transfer yolunda şaftın çıkış tarafında bulunuyorsa, bu genel olarak temas durumunu iyileştirmektedir.
- Dişli dış çapında, dişlinin şeklinden dolayı kök çapından daha yüksek bir profil boşluğu vardır. Profil boşluğu, şaft eğilmesi ile dişli genişliği boyunca benzer özellikler göstermektedir. Çok sınırlı etki olduğundan göz ardı edilebilir.
- Diş bombeliği, yükün üniform olmayan bir şekilde dağıldığı durumlarda, yükün diş yüzeyinde daha geniş bir alana dağılmasını sağlamaktadır. Duruma bağlı olarak temas durumunun iyileştirilmesine katkıda bulunmaktadır.

- Dişli dinamiği modeli, dişlilerin dönme ve öteleme hareketleri ile şaft dönme hareketi dikkate alınarak oluşturulmaktadır. Dinamik yanıtın tepe noktaları, doğrusal olmayan zamanla değişen modellerle türüyle, uniform yüklenme koşullarına göre daha düşük frekanslarda elde edilmektedir.

Kaynaklar (References)

1. Conry T.F., Seireg A., Mathematical programming technique for evaluation of load distribution and optimal modification for gear systems, *Journal of Engineering for Industry*, 95 (4), 1115–1122, 1973.
2. Eritenel T., Parker R.G., An investigation of tooth mesh nonlinearity and partial contact loss in gear pairs using a lumped-parameter model, *Mech. Mach. Theory*, 56, 28–51, 2012.
3. Wink C.H., Serpa A.L., Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth, *Mech. Mach. Theory*, 43 (1), 80–94, 2008.
4. Zhang Y., Fang Z., Analysis of transmission errors under load of helical gears with modified tooth surfaces, *J. Mech. Des. Trans. ASME*, 119 (1), 120–126, 1997.
5. Zhang J.J., Esat I.I., Shi, Y.H., Load analysis with varying mesh stiffness, *Comput. Struct.* 70 (3), 273–280, 1999.
6. Zhou C., Chen C., Gui L., Fan Z., A nonlinear multi-point meshing model of spur gears for determining the face load factor, *Mech. Mach. Theory*, 126, 210–224, 2018.
7. Yuan B., Chang S., Liu G., Chang L., Liu L., Quasi-static analysis based on generalized loaded static transmission error and dynamic investigation of wide-faced cylindrical geared rotor systems, *Mech. Mach. Theory*, 134, 74–94, 2019.
8. Peng Y., Zhao N., Qiu P., Zhang M., Li W., Zhou, R., An efficient model of load distribution for helical gears with modification and misalignment, *Mech. Mach. Theory*, 121, 151–168, 2018.
9. Yuan B., Liu G., Yue Y., Liu L., Shen Y., A novel tooth surface modification methodology for wide-faced double-helical gear pairs, *Mech. Mach. Theory*, 160, 74–94, 2021.
10. Dai X., Cooley C.G., Parker R.G., An Efficient Hybrid Analytical-Computational Method for Nonlinear Vibration of Spur Gear Pairs, *J. Vib. Acoust. Trans. ASME*, 141 (1), 2019.
11. Yuan B., Chang L., Liu G., Chang S., Liu L., Shen Y., An efficient three-dimensional dynamic contact model for cylindrical gear pairs with distributed tooth flank errors, *Mech. Mach. Theory*, 152, 103930 2020.
12. Wang Q., Xu K., Huai T., Ma H., Wang K., A mesh stiffness method using slice coupling for spur gear pairs with misalignment and lead crown relief, *Applied Mathematical Modelling*, 90, 845–861, 2021.
13. Han, G., Yuan, B., Qiao, G., Tooth surface modification for helical gear pairs considering mesh misalignment tolerance, 2021, 2021.
14. Wang Q., Ma H., Kong X., Zhang Y., A distributed dynamic mesh model of a helical gear pair with tooth profile errors, *Journal of Central South University*, 25 (2), 287–303, 2018.
15. Ma H., Yang J., Song R., Zhang S., Wen B., Effects of tip relief on vibration responses of a geared rotor system, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228 (7), 1132–1154, 2014.
16. Kahraman A., Sing R., Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system, *J. Sound Vib.*, 146 (1), 135–156, 1991.
17. Kim W., Yoo H.H., Chung, J., Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation, *J. Sound Vib.*, 329 (21), 4409–4421, 2010.
18. Sun Y., Ma H., Huangfu Y., Chen K., Che L.Y., Wen, B., A revised time-varying mesh stiffness model of spur gear pairs with tooth modifications, *Mech. Mach. Theory*, 129, 261–278, 2018.
19. Liu H., Zhang C., Xiang C.L., Wang C., Tooth profile modification based on lateral-torsional-rocking coupled nonlinear dynamic model of gear system, *Mech. Mach. Theory*, 105, 606–619, 2016.
20. Kahraman A., Blankenship G.W., Effect of involute tip relief on dynamic response of spur gear pairs, *J. Mech. Des. Trans. ASME*, 121 (2), 313–315, 1999.

21. Kang M.R., Kahraman A., Measurement of vibratory motions of gears supported by compliant shafts, *Mech. Syst. Signal Process.*, 29, 391–403, 1999.
22. Hotait M.A., Kahraman A., Experiments on the relationship between the dynamic transmission error and the dynamic stress factor of spur gear pairs, *Mech. Mach. Theory*, 70, 116–128, 2013.
23. Tang X., Zou L., Yang W., Huang Y., Wang H., Novel mathematical modelling methods of comprehensive mesh stiffness for spur and helical gears, *Applied Mathematical Modelling*, 72, 524–540, 2018.
24. Xie S., Du Q., Hu Y., Nonlinear dynamic modeling and analysis of spur gears considering dynamic contact state under misalignment errors, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 152, 104401, 2023.
25. Bonori G., Pellicano F., Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors, *J. Sound Vib.*, 306 (1–2), 271–283, 2007.
26. Ghosh S.S., Chakraborty G., On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs, *Mech. Mach. Theory*, 105, 2016.
27. Doğan O., Yılmaz T.G., Karpat F., Stress analysis of involute spur gears with different parameters by finite element and graphical method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 33 (4), 1493-1504, 2018.
28. Petersen, D.: *Auswirkung der Lastverteilung auf die Zahnfußtragfähigkeit von hochüberdeckenden Stirnradpaarungen*, Fakultät Maschinenbau TU Braunschweig, 1989.
29. Standard AGMA 908-B89, American Gear Manufacturer Association, 2020.
30. Borner J., Kurz N., Joachim F., Effective Analysis of Gears with the Program LVR, International conference, Gears Conference Paper, VDI report of 1665, 721-736, 2002.
31. Al-Shyyab A., Kahraman A., Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: Sub-harmonic motions, *J. Sound Vib.*, 279 (1–2), 417–451, 2005.
32. Blankenship G.W., Kahraman A., Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity, *J. Sound Vib.*, 185 (5), 743–765, 1995.
33. Civan S.E., Demir C., Load Distribution and Dynamic Response in Torque Split Applications, *Machines*, 10 (12), 1218, 2022.