

## Ortotrop Tabaka ile İzotrop Yarım Düzlem Arasındaki Sürekli Temas Probleminin Analitik Olarak İncelenmesi

Erdal ÖNER<sup>1\*</sup>, Mine Gül OKTAY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bayburt, Türkiye

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author  
E-mail: eoner@bayburt.edu.tr

*Araştırma Makalesi/Research Article*  
*Geliş Tarihi/Received: 10.09.2023*  
*Kabul Tarihi/Accepted: 15.10.2023*

### ÖZ

Hesaplamalı temas mekaniği, makine ve inşaat mühendisliği gibi alanların yanı sıra tıbbi uygulamalarda da büyük önem taşımaktadır. Mekaniğin bu dalı, iki cismin etkileşimine yanıt olarak temas alanı, basınç, deformasyon ve gerilmelere sayısal çözümler arar. Temas mekaniği konusu, son yıllarda mekanik ve uygulamalı matematik bilimlerinde yeni ve ilginç alanların gelişmesine önemli derecede katkı sağlamıştır. Bu çalışmada izotrop yarım düzlem üzerine oturan ortotrop tabakanın sürekli temasına ilişkin problem analitik yöntemle incelenmiştir. Çözümde sadece ortotrop tabakanın kütle kuvveti hesaba katılmıştır. Ortotrop tabaka rijit düz profile sahip bir panç vasıtasıyla yüklenmiştir. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu varsayılmıştır. Ortotrop tabaka ve izotrop yarım düzlem için yer değiştirme ve gerilme ifadelerinin elde edilmesinde elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılmıştır. Çalışma sonucunda çeşitli boyutsuz parametrelere ve ortotrop malzeme türlerine bağlı olarak panç altındaki temas gerilmesi, ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasında ilk ayrılmaya neden olan kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığı boyutsuz olarak elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ortotrop tabaka, Temas gerilmesi, İntegral denklem, Kritik ayrılma yükü, Kritik ayrılma uzaklığı

## Analytical Investigation of Continuous Contact Problem Between Orthotropic Layer and Isotropic Half-Plane

### ABSTRACT

Computational contact mechanics is of great importance in mechanical and civil engineering fields, as well as in medical applications. This branch of mechanics seeks numerical solutions to contact area, pressure, deformation, and stresses in response to the interaction of two bodies. The subject of contact mechanics has contributed significantly to the development of new and interesting fields in mechanics and applied mathematical sciences in recent years. In this study, the problem of continuous contact of the orthotropic layer resting on the isotropic half-plane is analyzed by analytical method. Only the body force of the orthotropic layer is taken into account in the solution. The orthotropic layer was loaded by a punch with a rigid flat profile. All surfaces are assumed to be frictionless. The theory of elasticity and integral transformation techniques are used to obtain the displacement and stress expressions for the orthotropic layer and the isotropic half-plane. As a result of the study, depending on various dimensionless parameters and orthotropic material types, the contact stress under the punch, the critical separation load causing the initial separation between the orthotropic layer and the isotropic half-plane, and the critical separation distance were obtained as dimensionless.

**Keywords:** Orthotropic layer, Contact stress, Integral equation, Critical separation load, Critical separation distance

### Cite as;

Öner, E., Oktay, M.G. (2023). Ortotrop Tabaka ile İzotrop Yarım Düzlem Arasındaki Sürekli Temas Probleminin Analitik Olarak İncelenmesi, *Recep Tayyip Erdogan University Journal of Science and Engineering*, 4(2), 154-171. Doi: 10.53501/rteufemud.1358045

## 1. Giriş

Temas mekaniği çalışmaları triboloji alanında büyük öneme sahiptir ve çeşitli endüstriler için bileşenlerin tasarımında etkisi vardır. Bunun yanısıra temas içeren sınır değer problemleri makine mühendisliğinde, çevre ve tıbbi uygulamalar endüstrisinde de çok önemlidir. Temas problemleri inşaat mühendisliği alanında yapı birleşiminin hesaplanması, karayolları, havaalanı pistleri, demiryolları, yapı ve zemin arasındaki etkileşim ve deprem sönüm sistemlerinin tasarımı, çelik bağlantı detayı hesabı, sürtünmeye dayalı sönüm sistemlerinin tasarımında uygulanmaktadır.

Tabakalı ortamlardaki temas mekaniği çalışmaları, hem deneysel tekniklerdeki hem de teorik modellerdeki ilerlemelerle birlikte yıllar içinde önemli ölçüde gelişmiştir. Geçmişte, tabakalı ortamlardaki temas mekaniği genellikle başlangıçta homojen, izotrop malzemeler için geliştirilen klasik Hertz temas teorisine dayanıyordu (Shibuya vd., 1974; Gladwell, 1976; Dempsey vd., 1990; Birinci, 1994, 1998; Zharii, 1995; Kahya, 1997; Özşahin, 2000; Woźniak vd., 2002; Çakıroğlu, 2011; Öner ve Birinci, 2014).

Daha sonra fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FGM) temas mekaniğinde kullanılmaya başlanmıştır. FGM'ler, hacimleri boyunca bileşim, mikro yapı veya özelliklerde kademeli bir değişiklik sergileyen mühendislik malzemeleridir. Bu kademeli yapı, FGM'lerin temas problemleri de dâhil olmak üzere çeşitli mühendislik problemlerine özel çözümler sunmasına olanak tanıdığından araştırmacılar tarafından odak noktası olmuştur (Guler ve Erdogan, 2004; El-Borgi vd., 2006; Ke ve Wang, 2007; Adıyaman vd., 2016, 2017; Öner vd., 2017; Yaylacı vd., 2020, 2021a, 2021b; Attia ve El-Shafei, 2020; Öner ve Birinci, 2020, Toktaş ve Dag, 2022; Wang vd., 2023).

Sonlu elemanlar analizi, bilgisayarların ve sayısal tekniklerin ortaya çıkmasından sonra temas mekaniği alanında yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Araştırmacılar, sonlu elemanlar analizini kullanarak tabakalı ortamda karmaşık

geometrileri ve doğrusal olmayan davranışları tanımlayabilmişlerdir ve bu da onu temas problemlerinin anlaşılmasında yararlı bir araç haline getirmiştir (Öner vd., 2014, 2015, 2022; Yaylacı vd., 2014; Uzun Yaylacı vd., 2022; Birinci vd., 2015; Adıyaman vd., 2023).

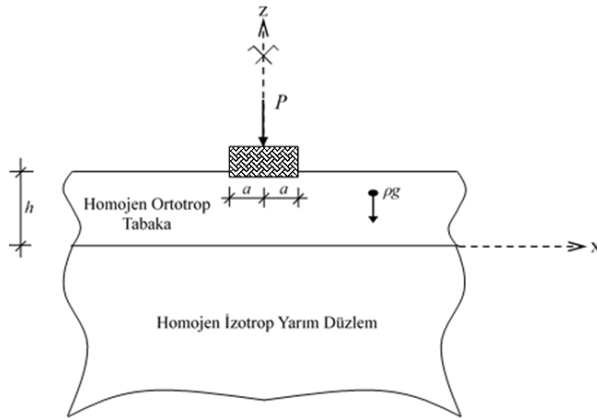
Son yıllarda tabakalı ortamlarda temas mekaniği çalışmalarında malzemenin anizotropik olduğunu hesaba katan modeller oluşturmak için çaba sarf edilmiştir. Batra ve Jiang (2008) rijit panç ile anizotrop lineer elastik tabakanın temas probleminin analitik çözümünü araştırmışlardır. Güler (2014) ortotrop bir ortam için iki boyutlu kayan sürtünmeli temas probleminin kapalı form çözümünü incelemiştir. Kucuksucu vd., (2015) derecelendirilmiş ortotrop yarım düzlemin kayan sürtünmeli temas mekaniği çalışmasını gerçekleştirmiştir. Yılmaz vd. (2019) düzlem kayan sürtünmeli temas mekaniği problemine ortotrop malzeme gradasyonunun etkisini araştırmışlardır. Çömez ve Güler (2020) izotrop yarım düzleme bağlı ortotrop bir tabaka üzerinde kayan hareketli rijit silindirik bir pançın temas problemi üzerine bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Öner (2021a, 2021b, 2021c) çalışmalarında ortotrop tabaka içeren temas mekaniği problemlerini elastisite teorisini kullanarak ele almıştır. Çömez (2022) tarafından yapılan çalışmada rijit temele yapışık olan fonksiyonel derecelendirilmiş monoklinik tabaka ile tekil normal ve teğetsel kuvvetlere maruz rijit panç arasındaki sürtünmeli hareketli temas problemi lineer elastisite teorisine göre çözülmüştür. Karabulut ve Çömez (2023) homojen izotrop tabakaya oturan ve rijit panç ile bastırılan fonksiyonel derecelendirilmiş ortotrop tabakanın sürekli ve süreksiz temas problemlerini analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir.

Sonuç olarak, tabakalı ortamlardaki temas mekaniği araştırmaları, basit Hertz modellerinden, modern malzemelerin çok tabakalı, anizotropik ve homojen olmayan özelliklerini hesaba katan daha karmaşık tekniklere doğru ilerlemiştir. Literatür incelendiğinde tabakalı ortamlarda temas

mekaniği alanında yapılan çalışmalarda izotrop olmayan tabaka içeren ve kütle kuvvetinin etkisini dikkate alan çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmektedir. Bu nedenle literatürde daha önce çalışılmamış olan izotrop yarım düzleme oturan ve rijit düz bir panç vasıtasıyla yüklenen ortotrop tabakanın sürekli temas probleminin çözümü ortotrop tabakanın kütle kuvveti hesaba katılarak gerçekleştirilmiştir.

## 2. Problemin Tanımı ve Formülasyonu

İzotrop yarım düzleme oturan ortotrop tabakanın sürekli temas probleminin geometrisi Şekil 1'de verilmiştir. Tabaka düz yüzeyli panç aracılığıyla tekil normal kuvvete maruzdur. Temas yüzeylerinde sadece basınç gerilmelerinin aktarılabilirdiği kabul edilmiştir. Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlemin homojen oldukları ve temas yüzeylerinde sürtünmenin olmadığı kabulleri yapılmıştır. Çözümde ortotrop tabakanın kütle kuvveti dikkate alınırken izotrop yarım düzlemdeki ihmal edilmiştir. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır.



**Şekil 1.** Sürekli temas probleminin geometrisi  
**Figure 1.** Geometry of the continuous contact problem

Birbirine dik 3 düzleme göre simetrisi olan malzemelere ortotropik malzeme adı verilir. Ortotrop tabaka için düzlem halde kütle kuvvetlerinin mevcut olmaması durumunda denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \sigma_{1xh}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{1xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1zh}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinde geçen 1 ve h alt indisleri sırası ile ortotrop tabakayı ve ortotrop tabakanın kütle kuvvetinin hesaba katılmaması durumunu göstermektedir. Düzlem şekil değiştirme halinde yer değiştirme bileşenleri  $u_{1h} = u_{1h}(x, z)$ ,  $v_{1h} = 0$ ,  $w_{1h} = w_{1h}(x, z)$  şeklinde tanımlı olduğundan  $\varepsilon_{1yh} = \gamma_{1xyh} = \gamma_{1yzh} = 0$  elde edilir. Bu durumda şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki hale indirgenirler:

$$\varepsilon_{1xh} = \frac{\partial u_{1h}(x, z)}{\partial x} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{1zh} = \frac{\partial w_{1h}(x, z)}{\partial z} \quad (4)$$

$$\gamma_{1xzh} = \frac{\partial u_{1h}(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial w_{1h}(x, z)}{\partial x} \quad (5)$$

Burada  $u$  ve  $w$  sırasıyla  $x$  ve  $z$  eksenleri doğrultularındaki yer değiştirme alanlarını göstermektedirler. Ortotrop tabaka için Hooke kanunu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{1xh}(x, z) = C_{11}\varepsilon_{1xh} + C_{13}\varepsilon_{1zh} \quad (6)$$

$$\sigma_{1zh}(x, z) = C_{13}\varepsilon_{1xh} + C_{33}\varepsilon_{1zh} \quad (7)$$

$$\tau_{1xzh}(x, z) = C_{55}\gamma_{1xzh} \quad (8)$$

(6-8) ifadelerinde geçen  $C_{11}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$  ve  $C_{55}$  elastik rijitlik sabitleridir ve aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$C_{11} = \frac{(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})E_x}{\Delta} \quad (9a)$$

$$C_{13} = \frac{(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy})E_x}{\Delta} \quad (9b)$$

$$C_{33} = \frac{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})E_z}{\Delta} \quad (9c)$$

$$C_{55} = \mu_{xz} \quad (9d)$$

$$\Delta = 1 - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - 2\nu_{yx}\nu_{xz}\nu_{zy} \quad (9e)$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (9f)$$

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad (9g)$$

$$\frac{v_{yx}}{E_y} = \frac{v_{xy}}{E_x} \quad (9h)$$

(3-5) ifadeleri (6-8) denklemlerinde yerlerine yazıldıktan sonra elde edilen ifadeler (1) ve (2) denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$C_{11} \frac{\partial^2 u_{1h}(x,z)}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_{1h}(x,z)}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 w_{1h}(x,z)}{\partial x \partial z} = 0 \quad (10a)$$

$$C_{55} \frac{\partial^2 w_{1h}(x,z)}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w_{1h}(x,z)}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 u_{1h}(x,z)}{\partial x \partial z} = 0 \quad (10b)$$

Navier denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturup, problemin çözümünü zorlaştırması nedeniyle adi diferansiyel denkleme dönüştürülmelidir.  $u_{1h}(x,z)$  ve  $w_{1h}(x,z)$  yer değiştirmeleri aşağıdaki gibi tarif edilebilirler.

$$u_{1h}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_{1h}(\alpha,z) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (11)$$

$$w_{1h}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_{1h}(\alpha,z) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (12)$$

Burada  $\alpha$  dönüşüm değişkenidir. (11-12) Fourier sinüs ve kosinüs dönüşüm ifadeleri (10) denklemlerinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklemler elde edilir:

$$-C_{11}\alpha\phi_{1h}(\alpha,z) + C_{55} \frac{d^2\phi_{1h}(\alpha,z)}{dz^2} - \alpha(C_{13} + C_{55}) \frac{d\psi_{1h}(\alpha,z)}{dz} = 0 \quad (13)$$

$$-C_{55}\alpha\psi_{1h}(\alpha,z) + C_{33} \frac{d^2\psi_{1h}(\alpha,z)}{dz^2} + \alpha(C_{13} + C_{55}) \frac{d\phi_{1h}(\alpha,z)}{dz} = 0 \quad (14)$$

(13-14)'te verilen adi diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle aşağıdaki karakteristik denklem elde edilebilir.

$$C_{11}C_{55} + (2C_{13}C_{55} + C_{13}^2 - C_{11}C_{33})\eta^2 + (C_{33}C_{55})\eta^4 = 0 \quad (15)$$

Karakteristik denklemin kökleri  $\eta_i (i=1, \dots, 4)$  aşağıdaki gibidir:

$$\eta_{1,2} = \frac{\sqrt{-\Gamma_2 \mp \sqrt{\Gamma_2^2 - 4\Gamma_1\Gamma_3}}}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\eta_{3,4} = -\frac{\sqrt{-\Gamma_2 \mp \sqrt{\Gamma_2^2 - 4\Gamma_1\Gamma_3}}}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

(16-17)'de geçen  $\Gamma_i (i=1, \dots, 3)$  ifadeleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$\Gamma_1 = C_{11}C_{55} \quad (18)$$

$$\Gamma_2 = 2C_{13}C_{55} + C_{13}^2 - C_{11}C_{33} \quad (19)$$

$$\Gamma_3 = C_{33}C_{55} \quad (20)$$

Karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak (13-14) denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\phi_{1h}(\alpha,z) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\eta_i \alpha z} \quad (21)$$

$$\psi_{1h}(\alpha,z) = \sum_{i=1}^4 A_i \bar{\psi}_i e^{\eta_i \alpha z} \quad (22)$$

Burada  $A_i$  katsayıları problemin sürekli temasına ilişkin sınır şartları kullanılarak bulunacaktır.  $\bar{\psi}_i$  ise aşağıda tanımlanmıştır:

$$\bar{\psi}_i = \frac{\eta_i (C_{13}^2 - C_{11}C_{33} + 2C_{13}C_{55} + C_{55}^2 + C_{33}C_{55}\eta_i^2)}{C_{55}(C_{13} + C_{55})}, (i=1, \dots, 4) \quad (23)$$

(21-22) denklemleri (6-8) denklemlerinde yerlerine yazılırsa ortotrop tabaka için kütle kuvvetinin bulunmaması durumunda gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_{1,xh}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \sum_{i=1}^4 A_i (C_{11} + C_{13}\bar{\psi}_i \eta_i) e^{\eta_i \alpha z} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (24)$$

$$\sigma_{1,zh}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \sum_{i=1}^4 A_i (C_{13} + C_{33}\bar{\psi}_i \eta_i) e^{\eta_i \alpha z} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (25)$$

$$\tau_{1,xzh}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \sum_{i=1}^4 A_i C_{55} (\eta_i - \bar{\psi}_i) e^{\eta_i \alpha z} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (26)$$

Ortotrop tabakanın kütle kuvvetleri  $F_x = 0$  ve  $F_z = \rho g$  olması durumunda Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_{11} \frac{\partial^2 u_{1p}}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_{1p}}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 w_{1p}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (27)$$

$$C_{55} \frac{\partial^2 w_{1p}}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w_{1p}}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 u_{1p}}{\partial x \partial z} = \rho g \quad (28)$$

Burada  $\rho$  ortotrop tabakanın yoğunluğunu,  $g$  yerçekimi ivmesini ve  $p$  alt indisi kütle kuvvetli hale ilişkin çözümü göstermektedir. Birim ağırlığı  $\rho g$ , yüksekliği  $h$  olan ve rijit veya elastik düz bir yüzeye oturan ortotrop tabaka için özel çözümün elde edilmesinde yer değiştirmelerin  $u_{1p} = u_{1p}(x)$  ve  $w_{1p} = w_{1p}(z)$  şeklinde olduğu kabul edilmiştir (Civelek ve Erdoğan, 1975). Bu durumda Navier denklemleri aşağıdaki hale indirgenirler:

$$C_{11} \frac{\partial^2 u_{1p}(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (29)$$

$$C_{33} \frac{\partial^2 w_{1p}(z)}{\partial z^2} = \rho g \quad (30)$$

(29-30) ifadelerinin integrasyonu sonucunda yer değiştirmeler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$u_{1p}(x) = T_1 x + T_2 \quad (31)$$

$$w_{1p}(z) = \frac{\rho g}{2C_{33}} z^2 + T_3 z + T_4 \quad (32)$$

(32)'de geçen  $T_4$  sabiti rijit ötelenmeye karşılık gelen terim olup ihmal edilebilir (Gecit, 1981; Birinci ve Erdöl, 2003; Kahya, 2003). (31-32)'de verilen yer değiştirme fonksiyonları (6-8) gerilme ifadelerinde yerlerine yazılırsa gerilmeler aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$\sigma_{1xp}(z) = C_{11} T_1 + C_{13} \left( \frac{\rho g z}{C_{33}} + T_3 \right) \quad (33)$$

$$\sigma_{1zp}(z) = C_{13} T_1 + C_{33} T_3 + \rho g z \quad (34)$$

$$\tau_{1xzp} = 0 \quad (35)$$

(31-34)'de geçen  $T_1, T_2, T_3$  ifadeleri ise aşağıdaki sınır şartlarından belirlenecektir.

$$u_{1p}(0) = 0 \quad (36)$$

$$\sigma_{1zp}(z) = \int_z^h -\rho g dz \quad (37)$$

$$\int_0^h \sigma_{1xp} dz = 0 \quad (38)$$

(36-38) sınır şartları kullanılarak  $T_1, T_2$  ve  $T_3$  aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$T_1 = -\frac{gh\rho C_{13}}{2(C_{13}^2 - C_{11}C_{33})} \quad (39)$$

$$T_2 = 0 \quad (40)$$

$$T_3 = -\frac{gh\rho(-C_{13}^2 + 2C_{11}C_{33})}{2C_{33}(-C_{13}^2 + C_{11}C_{33})} \quad (41)$$

$T_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) ifadeleri (31-35) denklemlerinde yerlerine yazılırsa ortotrop tabaka için kütle kuvvetli hale ilişkin yer değiştirme ve gerilmelerin özel çözümleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$u_{1p}(x) = -\frac{gh\rho C_{13}}{2(C_{13}^2 - C_{11}C_{33})} x \quad (42)$$

$$w_{1p}(z) = \frac{gz\rho((h-z)C_{13}^2 + (-2h+z)C_{11}C_{33})}{2C_{33}(-C_{13}^2 + C_{11}C_{33})} \quad (43)$$

$$\sigma_{1xp}(z) = -\frac{g(h-2z)\rho C_{13}}{2C_{33}} \quad (44)$$

$$\sigma_{1zp}(z) = -\rho g(h-z) \quad (45)$$

$$\tau_{1xzp} = 0 \quad (46)$$

Böylelikle ortotrop tabaka için yer değiştirme ve gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi kütle kuvvetinin hesaba katılmaması ve sadece kütle kuvvetinin hesaba katılması durumlarının toplamı şeklinde elde edilmiş olur:

$$u_1(x, z) = u_{1h}(x, z) + u_{1p}(x) \quad (47)$$

$$w_1(x, z) = w_{1h}(x, z) + w_{1p}(z) \quad (48)$$

$$\sigma_{1x}(x, z) = \sigma_{1xh}(x, z) + \sigma_{1xp}(z) \quad (49)$$

$$\sigma_{1z}(x,z)=\sigma_{1zh}(x,z)+\sigma_{1zp}(z) \quad (50)$$

$$\tau_{1xz}(x,z)=\tau_{1xz}h(x,z) \quad (51)$$

İzotrop yarım düzlem için  $\lambda_2$  ve  $\mu_2$  Lamé sabitlerini,  $u_2(x,z)$  ve  $w_2(x,z)$  sırası ile  $x$  ve  $z$  doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini göstermek üzere Navier denklemleri kütle kuvvetlerinin olmaması durumu için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_2(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial w_2(x,z)}{\partial z} \right) + \mu_2 \left( \frac{\partial^2 u_2(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2(x,z)}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (52)$$

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial w_2(x,z)}{\partial z} \right) + \mu_2 \left( \frac{\partial^2 u_2(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2(x,z)}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (53)$$

(52-53) ifadelerinde geçen 2 alt indisi izotrop yarım düzlemi temsil etmektedir. Ayrıca,

$$\lambda_2 = \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \quad (54)$$

$$\mu_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \quad (55)$$

olarak tanımlanmaktadır. (54-55) ifadelerinde geçen  $E_2$  ve  $\nu_2$  sırasıyla izotrop yarım düzlemin Elastisite Modülü ve Poisson oranıdır. İzotrop yarım düzlem için (52-53) denklemlerinin çözümünde ortotrop tabakanın çözümünde uygulanan benzer adımlar gerçekleştirilmiş ve yer değiştirmeler ile gerilmelerin  $z \rightarrow -\infty$  için sıfır olması ancak  $e^{-\alpha z}$ 'nin katsayılarının sıfır olması ile mümkün olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Sonuç olarak izotrop yarım düzlem için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$u_2(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (B_1 + B_2 z) e^{\alpha z} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (56)$$

$$w_2(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\alpha} - z \right) B_2 \right] e^{\alpha z} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (57)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \alpha (B_1 + B_2 z) + \left( \frac{3-\kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\alpha z} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (58)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2z}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\alpha (B_1 + B_2 z) + \left( \frac{1+\kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\alpha z} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (59)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xz}(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \alpha (B_1 + B_2 z) + \left( \frac{1-\kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\alpha z} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (60)$$

(57-60) denklemlerinde geçen  $\kappa_2$  izotrop yarım düzlem için Kolosov sabitidir ve düzlem şekil değiştirme hali için  $\kappa_2 = 3 - 4\nu_2$  olarak tanımlanmaktadır.

Şekil 1'de geometrisi verilen sürekli temas problemi için sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tau_{1xz}(x,h)=0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (61)$$

$$\sigma_{1z}(x,h) = \begin{cases} -p(x) & ; \quad (0 \leq x < a) \\ 0 & ; \quad (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (62)$$

$$\tau_{1xz}(x,0)=0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (63)$$

$$\tau_{2xz}(x,0)=0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (64)$$

$$\sigma_{1z}(x,0) = \sigma_{2z}(x,0) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [w_1(x,0) - w_2(x,0)] = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (66)$$

(62) denklemindeki  $p(x)$  düz panç altındaki bilinmeyen temas gerilmesi,  $a$  ise yarı panç uzunluğudur. Yer değiştirme ve gerilme ifadelerinde ortaya çıkan  $A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ),  $B_j$  ( $j=1, 2$ ) katsayılarının tayini için (61-66) sınır şartlarının kullanılması ile altı lineer cebirsel denklem ortaya çıkmaktadır. Bu cebirsel denklemler çözülerek katsayılar temas gerilmesi  $p(x)$ 'e bağlı olarak elde edilmiştir (Oktay, 2023). Panç altındaki temas gerilmesinin hesaplanabilmesi için gerekli integral denklem aşağıdaki sınır şartından faydalanılarak elde edilir:

$$\frac{\partial w_1(x,h)}{\partial x} = 0, \quad -a < x < a \quad (67)$$

$A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) katsayıları (67) sınır şartında yerlerine yazılarak aşağıdaki integral denklem elde edilmiştir:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) \left[ \frac{1}{t-x} + Y(x,t) \right] dt = 0 \quad (68)$$

Burada

$$Y(x,t)=\int_0^{\infty} \frac{Y_{11}(\alpha)-\mathcal{G}}{\mathcal{G}} \sin \alpha(t-x) d\alpha \quad (69)$$

$$Y_{11}(\alpha)=-\alpha \sum_{i=1}^4 A_i \bar{\mathcal{U}}_i e^{\eta_i \alpha h} \quad (70)$$

$$\mathcal{G}=\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Y_{11}(\alpha) \quad (71)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca denge şartından

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \quad (72)$$

olduğu açıktır.

Dış yükün değeri, kritik yük değeri olan  $P_{cr}$  değerini aştığında izotrop yarım düzlem ile ortotrop tabaka arasında ayrılma gerçekleşir. Sürekli temas probleminin çözümü ancak dış yük henüz belirlenmemiş olan  $P_{cr}$ 'den küçükse geçerlidir. Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığının belirlenmesi için öncelikle  $\sigma_{1z}(x,0)$  temas gerilmesinin hesaplanması gerekmektedir. Kritik yük değeri için ara yüzeydeki bir  $x_{cr}$  noktasında  $\sigma_{1z}(x_{cr},0)=0$  olacaktır. Daha önce belirlenen  $A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) katsayıları (50) denkleminde yerlerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlemin ara yüzeyindeki temas gerilmesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{1z}(x,0)=\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) Z(x,t) dt - \rho gh \quad (73)$$

Burada ilk terim dış yükten kaynaklanan etkiyi ikinci terim ise ortotrop tabakanın kütle kuvvetinden dolayı gelen etkiyi göstermektedir. (73) ifadesinde geçen  $Z(x,t)$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$Z(x,t)=\int_0^{\infty} Z_1(\alpha) \cos[\alpha(t-x)] d\alpha \quad (74)$$

Burada

$$Z_1(\alpha)=\alpha \sum_{i=1}^4 A_i (C_{13}+C_{33} \bar{\mathcal{U}}_i \eta_i) \quad (75)$$

şeklinde tanımlıdır. (76)'da verilen boyutsuz büyüklükler tanımlanırsa,

$$x=ar, \quad t=as, \quad \varpi(s)=\frac{p(as)}{E_x} \quad (76)$$

integral denklem, denge şartı ve ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlemin ara yüzeyi boyunca temas gerilmesi aşağıdaki biçimde elde edilirler:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varpi(s) \left[ \frac{1}{s-r} + \frac{a}{h} Y(r,s) \right] ds = 0 \quad (77)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 \varpi(s) ds = \frac{(P/h)}{E_x} \quad (78)$$

$$\frac{\sigma_{1z}(x,0)}{E_x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varpi(s) \frac{a}{h} Z_1(x,s) ds - \frac{\rho gh}{E_x} \quad (79)$$

Temas sınırlarında keskin kenarlar olduğundan dolayı temas gerilmeleri singulariteye sahiptir. Bu durumda integral denklemin indisi "+1" dir (Erdoğan ve Gupta, 1972). (77) nolu integral denklemin çözümü aşağıdaki gibi aranabilir:

$$\varpi(s)=\Phi(s)/\sqrt{(1-s^2)} \quad (80)$$

Gauss-Chebyshev formülleri uygulanarak integral denklem, denge şartı ve ara yüzey temas gerilmesi aşağıdaki gibi eşdeğer cebirsel denklem sistemine dönüştürülürler.

$$\sum_{k=1}^n W_k \left[ \frac{1}{s_k-r_i} + \frac{a}{h} Y(r_i,s_k) \right] \Phi(s_k) = 0, \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (81)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{k=1}^n W_k \Phi(s_k) = \frac{P/h}{E_x \pi} \quad (82)$$

$$\frac{\sigma_{1z}(x,0)}{E_x} = \frac{a}{h} \sum_{k=1}^n W_k Z_1(r_i,s_k) \Phi(s_k) - \frac{\rho gh}{E_x} \quad (83)$$

Burada

$$W_1=W_n=\frac{1}{2(n-1)}, \quad W_k=\frac{1}{n-1}, \quad (k=2, \dots, n-1) \quad (84-85)$$

$$s_k=\cos\left(\frac{k-1}{n-1}\pi\right), \quad (k=1, \dots, n) \quad (86)$$

$$r_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n-2}\pi\right), \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (87)$$

olarak tanımlanmaktadır.

(81) ve (82) ifadelerinden  $n$  bilinmeyenli  $n$  tane denklem ortaya çıkmaktadır. Bu denklem takımının çözülmesi suretiyle panç altındaki temas gerilmeleri hesaplanabilir. Çözümün aynı zamanda ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilmesinin her yerde basınç olmasını da sağlaması gerekmektedir. Dolayısıyla aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$$\text{Max}\left[\frac{\sigma_{1z}(x,0)}{E_x}\right] \leq 0 \quad (88)$$

(88) numaralı koşul karşılanırsa sürekli temas durumu sağlanır. Koşul (88)'i karşılayan her yükün kritik olmadığı açıktır. Eğer ara yüzeydeki temas gerilmesi belirli bir noktada ( $x=x_{cr}/h$ ) sıfıra eşitse yani  $\frac{\sigma_{1z}(x_{cr}/h,0)}{E_x} = 0$  ifadesine karşılık gelen yük, kritik ayrılma yükü  $\lambda_{cr} = P_{cr} / (E_x h)$  olarak adlandırılır. Burada  $x_{cr}/h$  ise kritik ayrılma uzaklığıdır. Kritik yük değerini (kritik ayrılma yükü) bulmak için bir iterasyon yöntemi uygulanmalıdır. Bunun için öncelikle kritik yük değeri ( $P_{cr}/(E_x h)$ ) tahmin edilir. Daha sonra (81) ve (82) denklemlerinden  $\Phi(s_k)$  değerleri hesaplanır. Elde edilen  $\Phi(s_k)$  değerleri (88) nolu şartta ve  $\frac{\sigma_{1z}(x_{cr}/h,0)}{E_x} = 0$  şartında yerlerine yazılarak bu şartların sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. İterasyonlara istenilen hassasiyet değerine ulaşıncaya kadar devam edilir. Bu çalışmada hassasiyet değeri  $10^{-7}$  olarak alınmıştır.

### 3. Bulgular ve Tartışma

Rijit düz bir panç vasıtasıyla üst yüzeyinden bastırılan ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki sürekli temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Ortotrop tabaka için kullanılan malzemelerin mekanik özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Şekil 2-5'te boyutsuzlaştırılmış panç uzunluğu, dış yük, izotrop yarım düzlemin elastisite modülü ve ortotrop malzeme türü gibi parametrelere bağlı olarak panç altındaki temas gerilme dağılımları sunulmuştur. Şekiller incelendiğinde görülmektedir ki söz konusu gerilmeler pançın kenarlarında sonsuza gitmektedir. Problemin formülasyonundaki integral denklem incelendiğinde panç kenarlarının gerilmeler için singüler noktalar olduğu görülmekte ve panç kenarlarında gerilmelerin sonsuza gitmesi beklenen bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Şekil 2'de farklı panç uzunluklarının panç altındaki temas gerilme dağılımlarına etkisi görülmektedir. Panç uzunluğunun artması yükün daha geniş bir alana yayılmasına neden olmaktadır. Bu nedenle panç uzunluğundaki artış panç altında oluşan temas gerilmelerinin azalması sonucunu doğurmaktadır.

Şekil 3'te dış yükün değişiminin panç altındaki temas gerilme dağılımlarına etkisi görülmektedir. Şekilden de kolaylıkla anlaşılacağı gibi dış yükün artması panç altındaki temas gerilmelerinin büyümesine neden olmaktadır.

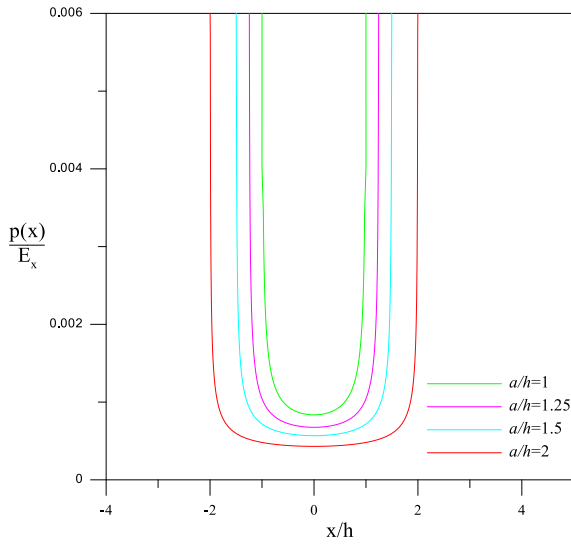
Şekil 4'te izotrop yarım düzlemin elastisite modülünün çeşitli boyutsuz değerleri için panç altındaki temas gerilmelerindeki değişimler görülmektedir. Şekil incelendiğinde  $E_z/E_x$  değeri arttıkça yani izotrop yarım düzlemin rijitliği arttıkça panç altındaki temas gerilmelerinin simetri ekseninde aldığı değer arttığı görülmektedir. Simetri eksenindeki en büyük temas gerilmesi yarım düzlemin rijit temel gibi davranması durumunda ortaya çıkmaktadır.

Şekil 5'te tabaka için kullanılan farklı ortotrop malzeme türlerine bağlı olarak panç altındaki temas gerilme dağılımları verilmektedir. Kullanılan ortotrop malzeme türlerine ilişkin mekanik özellikler incelendiğinde yükleme doğrultusunda en büyük rijitliğe sahip malzemenin B/Al olduğu görülmektedir (Tablo 1). Panç altındaki temas gerilmelerinin en küçük değeri bu malzeme kullanılması durumunda ortaya çıkmaktadır.



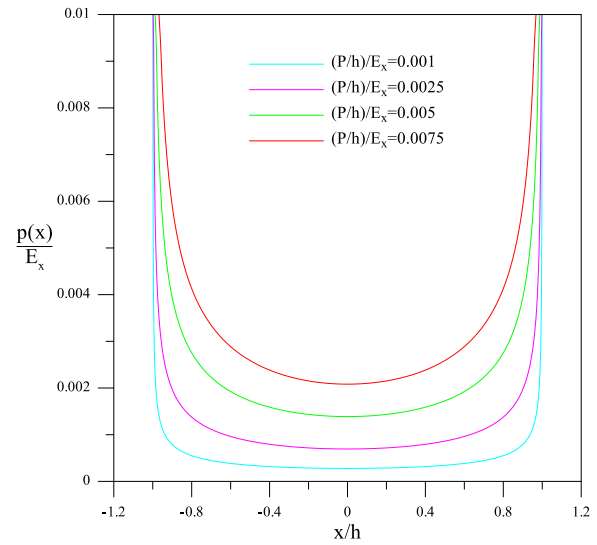
**Tablo 1.** Ortotrop tabaka için kullanılan malzemelerin mekanik özellikleri (Binienda ve Pindera, 1994)  
**Table 1.** Mechanical properties of materials used for the orthotropic layer (Binienda and Pindera, 1994)

Mekanik Özellikler	grafit/epoksi (graphite/epoxy) (Gr/Ep P75/934)	grafit/epoksi (graphite/epoxy) (Gr/Ep T300/934)	cam/epoksi (glass/epoxy) (Gl/Ep)	grafit/alüminyum (graphite/aluminum) (Gr/Al)	bor/alüminyum (boron/aluminum) (B/Al)
$E_x$ (GPa)	243,0	144,8	42,7	402,6	227,5
$E_y$ (GPa)	7,2	10,3	11,7	24,1	137,9
$E_z$ (GPa)	7,2	10,3	11,7	24,1	137,9
$\nu_{xy}$	0,33	0,30	0,27	0,29	0,24
$\nu_{xz}$	0,33	0,30	0,27	0,29	0,24
$\nu_{yz}$	0,49	0,50	0,55	0,45	0,40
$\mu_{xy}$ (GPa)	3,929	5,515	8,238	16,75	55,152
$\mu_{xz}$ (GPa)	3,929	5,515	8,238	16,75	55,152
$\mu_{yz}$ (GPa)	2,406	3,447	3,778	8,34	49,244



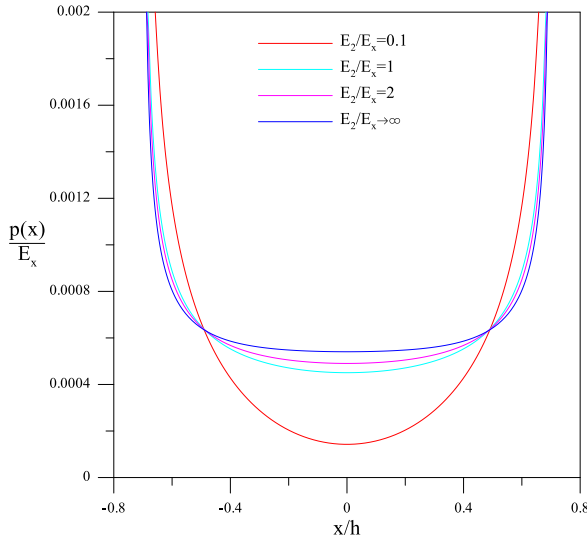
**Şekil 2.** Panç altındaki temas gerilme dağılımına panç uzunluğunun etkisi ((P/h)/E<sub>x</sub>=0,0025,  $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ , Gr/Ep (T300/934))

**Figure 2.** Effect of punch length on contact stress distribution under punch ((P/h)/E<sub>x</sub>=0,0025,  $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ , Gr/Ep (T300/934))



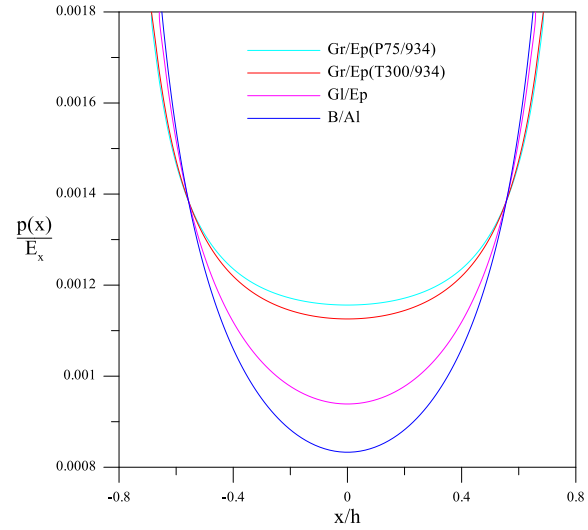
**Şekil 3.** Panç altındaki temas gerilme dağılımına dış yükün etkisi ( $a/h=1$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ , Gr/Al)

**Figure 3.** Effect of external load on the contact stress distribution under the punch ( $a/h=1$ ,  $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ , Gr/Al)



**Şekil 4.** Panç altındaki temas gerilme dağılımına izotrop yarım düzlemin elastisite modülünün etkisi ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,7$ ,  $(P/h)/E_x=0,001$ ,  $B/Al$ )

**Figure 4.** The effect of the modulus of elasticity of the isotropic half-plane on the contact stress distribution under the punch ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,7$ ,  $(P/h)/E_x=0,001$ ,  $B/Al$ )



**Şekil 5.** Panç altındaki temas gerilme dağılımına ortotrop malzeme türünün etkisi ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,8$ ,  $(P/h)/E_x=0,0025$ ,  $E_z/E_x=0,5$ )

**Figure 5.** The effect of orthotropic material type on the contact stress distribution under the punch ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,8$ ,  $(P/h)/E_x=0,0025$ ,  $E_z/E_x=0,5$ )

Tablo 2’de çeşitli kütle kuvveti ve panç uzunluğu değerleri için izotrop yarım düzlem ile ortotrop tabaka arasındaki kritik ayrılma uzaklığı ve kritik ayrılma yükünün değişimi görülmektedir. Tablodan da görülebileceği gibi, panç uzunluğu büyüdükçe kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığı değerleri artmaktadır. Bu da panç uzunluğundaki büyümenin ilk ayrılmayı daha zor hale getirdiği ve ilk ayrılmanın yükün tatbik noktasından daha uzak bir yerde meydana geleceği sonuçlarını ortaya koymaktadır. Tablo

2’nin ortaya çıkardığı diğer bir sonuç ise ortotrop tabakanın kütle kuvvetindeki artışın ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükünü artırmasıdır. Yani ortotrop tabakanın ağırlaşması yarım düzlemden ayrılmasını zorlaştırmaktadır. Ortotrop tabakanın kütle kuvvetindeki değişim ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma uzaklığında herhangi bir değişime neden olmamaktadır.

**Tablo 2.** Çeşitli panç uzunluğu ve kütle kuvveti değerleri için izotrop yarım düzlem ile ortotrop tabaka arasındaki ilk ayrılmayı oluşturan kritik ayrılma yükünün ve kritik ayrılma uzaklığının değişimi ( $Gl/Ep$ ,  $\mu_2=10$ ,  $\kappa_2=2$ )

**Table 2.** Variation of the critical separation distance and critical separation load which creates the initial separation between the isotropic half-plane and the orthotropic layer for various punch length and body force values ( $Gl/Ep$ ,  $\mu_2=10$ ,  $\kappa_2=2$ )

$\rho gh/E_x$ ↓	$a/h$							
	0,4		1		1,5		2	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
$2 \times 10^{-5}$	0,004341	3,60	0,005472	4,02	0,006817	4,50	0,008226	5,01
$10^{-5}$	0,002170	3,60	0,002736	4,02	0,003408	4,50	0,004113	5,01
$4 \times 10^{-6}$	0,000868	3,60	0,001094	4,02	0,001363	4,50	0,001645	5,01
$10^{-7}$	0,000021	3,60	0,000027	4,02	0,000034	4,50	0,000041	5,01

Tablo 3'te farklı ortotrop malzeme türleri ve çeşitli  $E_2/E_x$  değerleri için ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığının değişimi görülmektedir. Tablo incelendiğinde ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasında ilk ayrılmayı meydana getirecek kritik yükün ve bu ayrılmanın meydana geldiği uzaklığın en büyük

değeri Gr/Ep(P75/934) malzemesi kullanılması durumunda ortaya çıkmaktadır. Tablodan çıkarılabilecek diğer bir sonuç ise izotrop yarım düzlemin rijitliği arttıkça ortotrop tabakayı yarım düzlemden ayıracak kritik yükün azaldığıdır. Ayrıca yarım düzlemin rijitliğinin artması, kritik ayrılmanın meydana geldiği noktanın simetri eksenine yaklaşmasına neden olmaktadır.

**Tablo 3.** Çeşitli  $E_2/E_x$  değerleri ve ortotrop malzeme türleri için izotrop yarım düzlem ile ortotrop tabaka arasındaki ilk ayrılmayı oluşturan kritik ayrılma yükünün ve kritik ayrılma uzaklığının değişimi ( $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $a/h=0,7$ ,  $\kappa_2=2$ )

**Table 3.** Variation of the critical separation distance and critical separation load which creates the initial separation between the isotropic half-plane and the orthotropic layer for various  $E_2/E_x$  values and orthotropic material types ( $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $a/h=0,7$ ,  $\kappa_2=2$ )

Malzeme Türü ↓	$E_2/E_x$					
	0,1		1		10	
	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
Gr/Ep(P75/934)	0,003350	8,81	0,001057	3,90	0,000653	3,49
Gr/Ep(T300/934)	0,001102	7,27	0,000610	3,70	0,000344	3,14
Gl/Ep	0,000322	6,21	0,000196	3,31	0,000106	2,63
B/Al	0,000310	6,20	0,000184	3,30	0,000101	2,38

Tablo 4-6'da bu çalışmanın sonuçları ile literatürdeki bazı çalışmaların sonuçlarının karşılaştırılması sunulmuştur. Literatürden seçilen çalışmalar ele alınan bu çalışmanın çeşitli özel halleridir. Yapılan karşılaştırma sonucunda sonuçların birbirleriyle uyumluluğu incelenmiştir.

Tablo 4'te bu çalışmada elde edilen kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığı sonuçları, Çakıroğlu (1979) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Çakıroğlu (1979)'nun çalışması bu çalışmanın özel bir halidir ve Çakıroğlu (1979) çalışmasında düz bir paç vasıtasıyla yüklenen ve izotrop yarım düzleme oturan homojen izotrop tabakanın temas problemini ele almıştır. Bu çalışmanın söz konusu çalışmayla karşılaştırılması (89-93) ifadelerinde verilen malzeme özellikleri

seçilmek suretiyle ortotrop malzeme özelliklerinin izotrop karşılıklarına indirgenmesiyle gerçekleştirilmiştir. Tablo 4 incelendiğinde bu çalışmanın sonuçlarının Çakıroğlu (1979) tarafından yapılan çalışmanın sonuçlarıyla oldukça uyumlu olduğu ve sonuçlar arasındaki en büyük farkın % 0,098912 olduğu görülmektedir.

$$C_{11}=C_{33}=\frac{(1+\kappa_1)\mu_1}{\kappa_1-1} \quad (89)$$

$$C_{13}=\frac{(3-\kappa_1)\mu_1}{\kappa_1-1} \quad (90)$$

$$C_{55}=\mu_1 \quad (91)$$

$$\mu_1=\frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \quad (92)$$

$$\kappa_1=3-4\nu_1 \quad (93)$$

**Tablo 4.** İncelenen problemin çeşitli özel hallerine ilişkin kritik ayrılma yükü ve uzaklığı değerlerinin literatür ile karşılaştırılması**Table 4.** Comparison of critical separation load and distance values for various special cases of the investigated problem with the literature

$a/h$	$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2} = 0,5$					
	Bu Çalışma		Çakıroğlu (1979)		Fark (%)	
↓	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0,5	120,408	2,584	120,396	2,584	0,009967	0,000000
1	168,045	3,029	168,017	3,029	0,016665	0,000000
2	273,502	4,040	273,489	4,044	0,004753	0,098912
4	438,974	6,059	438,900	6,060	0,016860	0,016502

Tablo 5'te bu çalışmanın sonuçları, bu çalışmanın çeşitli özel halleri olan Civelek ve Erdoğan (1976) ve Civelek vd. (1978) çalışmalarının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Civelek ve Erdoğan (1976) çalışmalarında tekil yükü bastırılan ve rijit temele oturan homojen izotrop tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Bu çalışmayı Civelek ve Erdoğan (1976) tarafından yapılan çalışmayla karşılaştırmak için panç uzunluğu çok küçük ( $a/h \rightarrow 0$ ), izotrop yarım düzlemin rijitliği ise çok büyük ( $E_2 \rightarrow \infty$ ) seçilmiştir. Ayrıca ortotrop tabakayı izotrop tabakaya dönüştürmek için ise (89-93)'de verilen

malzeme özellikleri kullanılmıştır. Civelek vd. (1978) çalışmalarında rijit düz profilli bir pançla bastırılan ve rijit temele oturan homojen izotrop tabakanın temas problemini incelemişlerdir. Bu çalışmayı Civelek vd. (1978) tarafından yapılan çalışma ile karşılaştırmak için ise (89-93) ifadelerindeki malzeme özellikleri kullanılmış ve izotrop yarım düzlemin rijitliği çok büyük ( $E_2 \rightarrow \infty$ ) alınmıştır. Tablo incelendiğinde bu çalışmanın sonuçlarının söz konusu çalışmaların sonuçlarıyla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük fark ise %2.040816'dır

**Tablo 5.** İncelenen problemin çeşitli özel hallerine ilişkin kritik ayrılma yükü ve uzaklığı değerlerinin literatür ile karşılaştırılması**Table 5.** Comparison of critical separation load and distance values for various special cases of the investigated problem with the literature

$a/h$	$\mu_2 \rightarrow \infty$					
	Bu Çalışma		Civelek vd. (1978)		Fark (%)	
↓	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0,5	58,88	2,00	58,88	1,96	0,000000	2,040816
1	92,40	2,46	92,40	2,42	0,000000	1,652892
2	169,59	3,46	169,57	3,42	0,011794	1,116959

$a/h$	$\mu_2 \rightarrow \infty$					
	Bu Çalışma		Civelek ve Erdoğan (1976)		Fark (%)	
↓	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
$\rightarrow 0$	44,13990	1,77054	44,13924	1,77055	0,001495	0,000565

Tablo 6'da bu çalışmada elde edilen kritik ayrılma yükü ve uzaklığı değerleri Geçit (1980) tarafından yapılan çalışma sonuçları ile karşılaştırılarak

verilmiştir. Geçit (1980) tarafından yapılan çalışma bu çalışmanın özel bir halidir ve söz konusu çalışmada tekil yük aracılığıyla yüklenmiş

ve izotrop yarım düzleme oturan homojen izotrop tabakanın temas problemi incelenmiştir. Bu çalışmayla söz konusu çalışmayı karşılaştırabilmek için panç uzunluğu çok küçük seçilmiş ( $a/h \rightarrow 0$ ) ve (89-93) ifadeleri kullanılarak ortotrop tabaka izotrop tabakaya

dönüştürülmüştür. Tablo incelendiğinde görülmektedir ki bu çalışmanın sonuçları Geçit (1980) tarafından yapılan çalışmanın sonuçlarına oldukça yakındır ve iki çalışma arasındaki en büyük fark %2.375044'tür.

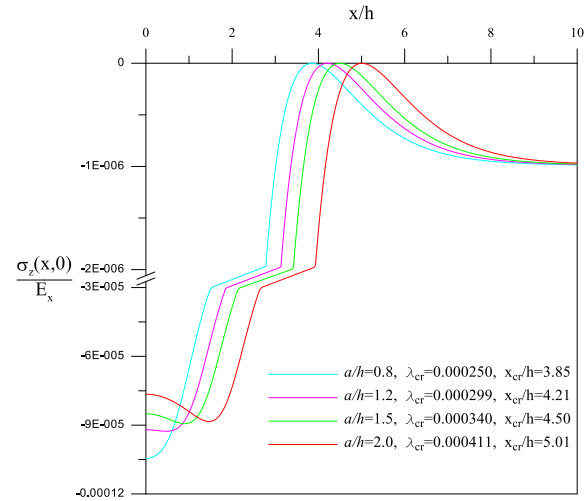
**Tablo 6.** İncelenen problemin çeşitli özel hallerine ilişkin kritik ayrılma yükü ve uzaklığı değerlerinin literatür ile karşılaştırılması

**Table 6.** Comparison of critical separation load and distance values for various special cases of the investigated problem with the literature

$\frac{(1+\kappa_2)\mu_1}{(1+\kappa_1)\mu_2}$	$a/h \rightarrow 0$					
	Bu Çalışma		Geçit (1980)		Fark (%)	
↓	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$	$\lambda_{cr}$	$x_{cr}/h$
0,1	55,08	1,89	56,42	1,86	2,375044	1,612903
1	139,01	2,90	140,39	2,94	0,982976	1,360544
10	249,94	5,96	250,67	5,87	0,291219	1,533220

Şekil 6-9'da panç uzunluğunun, ortotrop tabakanın kütle kuvvetinin, izotrop yarım düzlemin elastisite modülünün çeşitli boyutsuz değerleri için ve farklı ortotrop malzemeler için ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme dağılımları verilmiştir. Şekiller incelendiğinde dış yükün etkisinin daha etkili olduğu temas bölgesinde ( $x < x_{cr}$ ) arayüzdeki temas gerilmeleri simetri düzleminde veya düz pançın kenarında en büyük değerini almaktadır. Bu noktalar gerilmelerin pik noktalarını oluşturmaktadır. Dış yükün etkisinin ortadan kalktığı temas alanında ( $x > x_{cr}$ ) ise sadece kütle kuvvetlerinin etkisi görülmektedir. Bu kısımdaki gerilme değerleri kütle kuvvetlerine karşılık gelmektedir.

Şekil 6'da boyutsuzlaştırılmış farklı panç uzunlukları için ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları, kritik ayrılma yükü ve uzaklığı görülmektedir. Şekilden de anlaşılacağı üzere panç uzunluğu arttıkça ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükü ve kritik ayrılma uzaklığı artmaktadır. Yani daha büyük panç uzunluğu ortotrop tabakayı yarım düzlemden ayırmak için gerekli olan kritik yükü artırmaktadır. Ayrıca panç uzunluğundaki artış kritik ayrılmanın meydana geleceği noktanın simetri ekseninden uzaklaşmasına neden olmaktadır



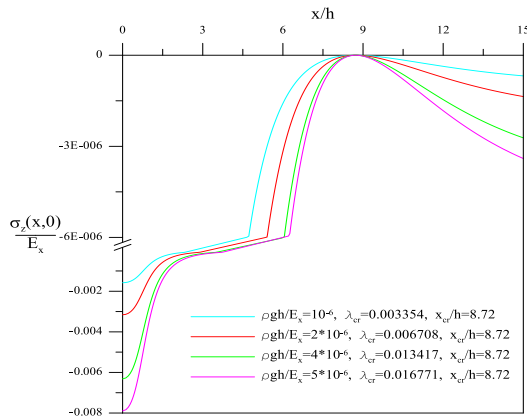
**Şekil 6.** Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışının, kritik ayrılma yükünün ve uzaklığının panç uzunluğuna bağlı olarak değişimi ( $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ ,  $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $GI/Ep$ )

**Figure 6.** Variation of the contact stress distribution, critical separation load and distance between the orthotropic layer and the isotropic half-plane depending on the punch length ( $\kappa_2=2$ ,  $\mu_2=10$ ,  $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $GI/Ep$ )

Şekil 7'de ortotrop tabakanın boyutsuzlaştırılmış çeşitli kütle kuvveti değerleri için ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasında oluşan temas gerilme yayılışları, kritik ayrılma yükü ve uzaklığı verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi ortotrop tabakanın kütle kuvveti arttıkça ortotrop

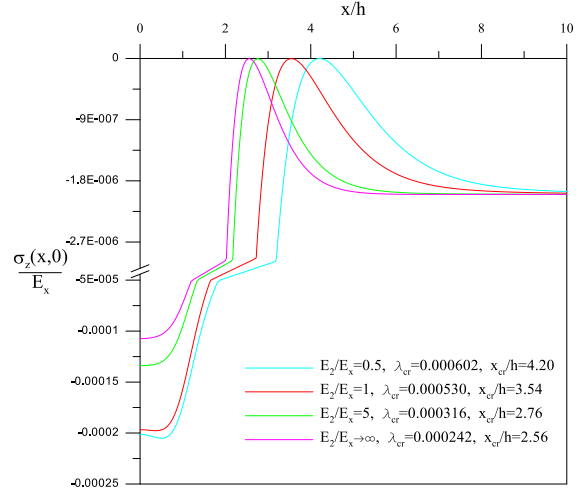
tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükü artmaktadır ve dolayısıyla ayrılma daha zor gerçekleşmektedir. Kritik ayrılma uzaklığı ise kütle kuvvetinin değişiminden etkilenmemektedir.

Şekil 8’de izotrop yarım düzlemin boyutsuzlaştırılmış elastisite modülüne bağlı olarak, ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasında oluşan temas gerilme yayılışları, kritik ayrılma yükü ve uzaklığı verilmektedir. Söz konusu elastisite modülü değeri arttıkça izotrop yarım düzlem daha rijit hale gelmektedir. İzotrop yarım düzlemin giderek rijitleşmesi ortotrop tabakayı yarım düzlemden ayırmak için gerekli olan kritik yükü azaltmaktadır. En küçük kritik ayrılma yükü değeri izotrop yarım düzlemin rijit temel gibi davranması durumunda ortaya çıkmaktadır. İzotrop yarım düzlemin rijitliğinin artması kritik ayrılmanın meydana geldiği noktanın simetri eksenine yaklaşmasına neden olmaktadır.



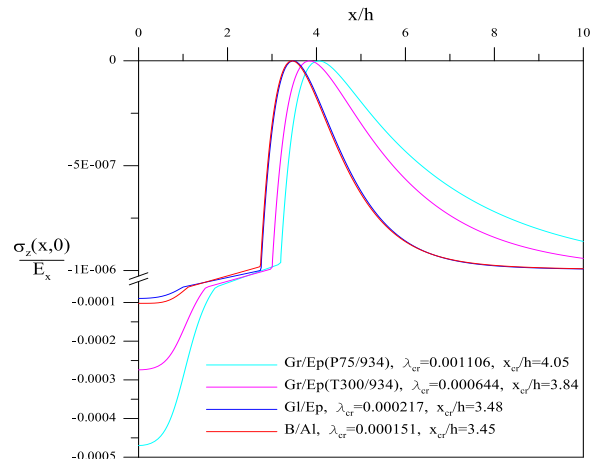
Şekil 7. Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışının, kritik ayrılma yükünün ve uzaklığının ortotrop tabakanın boyutsuzlaştırılmış kütle kuvvetine bağlı olarak değişimi ( $\kappa_2=2$ ,  $Gr/Ep$  (P75/934),  $a/h=0,6$ ,  $\mu_2=10$ )

Figure 7. Variation of the contact stress distribution, critical separation load and distance between the orthotropic layer and the isotropic half-plane depending on the nondimensionalized body force of the orthotropic layer. ( $\kappa_2=2$ ,  $Gr/Ep$  (P75/934),  $a/h=0,6$ ,  $\mu_2=10$ )



Şekil 8. Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışının, kritik ayrılma yükünün ve uzaklığının izotrop yarım düzlemin boyutsuzlaştırılmış elastisite modülüne bağlı olarak değişimi ( $\kappa_2=2$ ,  $\rho gh/E_x=2x10^{-6}$ ,  $a/h=1$ ,  $\mu_2=10$ ,  $B/Al$ )

Figure 8. Variation of the contact stress distribution, critical separation load and distance between the orthotropic layer and the isotropic half-plane depending on the nondimensionalized modulus of elasticity of the isotropic half-plane ( $\kappa_2=2$ ,  $\rho gh/E_x=2x10^{-6}$ ,  $a/h=1$ ,  $\mu_2=10$ ,  $B/Al$ )



Şekil 9. Ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışının, kritik ayrılma yükünün ve uzaklığının ortotrop malzeme türüne bağlı olarak değişimi ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,9$ ,  $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $E_2/E_x=1$ )

Figure 9. Variation of contact stress distribution, critical separation load and distance between orthotropic layer and isotropic half-plane depending on orthotropic material type ( $\kappa_2=2$ ,  $a/h=0,9$ ,  $\rho gh/E_x=10^{-6}$ ,  $E_2/E_x=1$ )

Şekil 9’da farklı ortotrop malzemeler için ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki temas

gerilme yayılışının, kritik ayrılma yükünün ve uzaklığının değişimleri verilmiştir. Şekil incelendiğinde en büyük kritik ayrılma yükü ve uzaklığının Gr/Ep (P75/934) malzemesi kullanılması durumunda ortaya çıktığı görülmektedir.

#### 4. Sonuçlar

Bu çalışmada, düz profilli rijit bir panç vasıtasıyla yüklenen ve izotrop yarım düzleme oturan ortotrop tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Probleme tüm yüzeyler sürtünmesiz kabul edilmiş ve ortotrop tabakanın kütle kuvveti dikkate alınırken izotrop yarım düzlemin kütle kuvveti hesaba katılmamıştır. Bu çalışmadan çıkarılan sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Panç uzunluğunun artmasıyla birlikte panç altında oluşan temas gerilmeleri azalmaktadır.
- Dış yükün büyümesi panç altındaki temas gerilmelerinin artmasına sebep olmaktadır.
- Panç altındaki temas gerilmelerinin en küçük değeri B/Al ortotrop malzemesi kullanılması durumunda ortaya çıkmaktadır.
- İzotrop yarım düzlemin rijitliği arttıkça panç altında oluşan temas gerilmelerinin simetri ekseninde oluşan değeri de artmaktadır.
- İlk ayrılmayı meydana getirecek kritik yükün ve kritik ayrılma uzaklığının en büyük değeri Gr/Ep (P75/934) malzemesi kullanıldığında ortaya çıkmaktadır.
- Panç uzunluğu arttıkça ortotrop tabaka ile izotrop yarım düzlem arasındaki kritik ayrılma yükü ve uzaklığı da artmaktadır.
- Ortotrop tabakanın kütle kuvveti arttığında kritik ayrılma yükü artarken kritik ayrılma uzaklığı değeri değişmemektedir.
- İzotrop yarım düzlemin elastisite modülü arttıkça rijitliği artmakta bunun sonucu olarak da kritik ayrılma yükü ve uzaklığı azalmaktadır.
- Bu çalışmanın sonuçları ile literatürde yer alan bu çalışmanın çeşitli özel hallerine ilişkin sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçların

birbiriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

#### Yazar Katkısı

**E. Öner:** Araştırma, Biçimsel Analiz, Metodoloji, Yazma, İnceleme ve Düzenleme

**M. G. Oktay:** Araştırma, Metodoloji, İnceleme ve Düzenleme

#### Kaynaklar

- Adiyaman, G., Birinci, A., Oner, E., Yaylaci, M. (2016). A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes. *Acta Mechanica*, 227(6), 1753-1766. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1580-y>
- Adiyaman, G., Oner, E., Birinci, A. (2017). Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer resting on a rigid foundation. *Acta Mechanica*, 228(9), 3003-3017. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1871-y>
- Adiyaman, G., Oner, E., Yaylaci, M., Birinci, A. (2023). A study on the contact problem of a layer consisting of functionally graded material (FGM) in the presence of body force. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 18(1), 125-141. <https://doi.org/10.2140/jomms.2023.18.125>
- Atia, M. A., El-Shafei, A. G. (2020). Investigation of multibody receding frictional indentation problems of unbonded elastic functionally graded layers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 184, 105838. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105838>
- Batra, R. C., Jiang, W. (2008). Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 45(22-23), 5814-5830. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.016>
- Binienda, W. K., Pindera, M. (1994). Frictionless contact of layered metal-matrix and polymer-matrix composite half planes. *Composites Science and Technology*, 50(1), 119-128. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(94\)90131-7](https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90131-7)
- Birinci, A. (1994). Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Birinci, A. (1998). Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.

- Birinci, A., Adiyaman, G., Yaylaci, M., Oner, E. (2015). Analysis of continuous and discontinuous cases of a contact problem using analytical method and FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(9), 1771-1789. <https://doi.org/10.1590/1679-78251574>
- Birinci, A., Erdol, R. (2003). A frictionless contact problem for two elastic layers supported by a winkler foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, 15(3), 331-344.
- Civelek, M. B., Erdoğan, F. (1975). The frictionless contact problem for an elastic layer under gravity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 42(1), 136-140. <https://doi.org/10.1115/1.3423504>
- Civelek, M. B., Erdoğan, F. (1976). Interface separation in a frictionless contact problem for an elastic layer. *Journal of Applied Mechanics*, 43, 175-177. <https://doi.org/10.1115/1.3423775>
- Civelek, M. B., Erdoğan, F., Cakiroglu, A. O. (1978). Interface separation for an elastic layer loaded by a rigid stamp. *International Journal of Engineering Science*, 16(9), 669-679. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(78\)90044-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(78)90044-7)
- Comez, I. (2021). Frictional moving contact problem between a conducting rigid cylindrical punch and a functionally graded piezoelectric layered half plane. *Meccanica*, 56, 3039-3058. <https://doi.org/10.1007/s11012-021-01407-2>
- Comez, İ. (2022). Frictional moving contact problem between a functionally graded monoclinic layer and a rigid punch of an arbitrary profile. *Acta Mechanica*, 233(4), 1435-1453. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03178-7>
- Comez, I., Guler, M. A. (2020). On the contact problem of a moving rigid cylindrical punch sliding over an orthotropic layer bonded to an isotropic half plane. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 25(10), 1924-1942. <https://doi.org/10.1177/1081286520915272>
- Çakiroğlu, A. O. (1979). Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Çakiroğlu, E. (2011). İki Elastik Çeyrek Düzleme Oturan ve Rijit Bir Panç ile Bastırılan Elastik Tabaka Probleminin Çözümü ve Yapay Sinir Ağı Uygulaması, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L., Li, H. (1990). plane contact of an elastic layer supported by a winkler foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 57(4), 974-980. <https://doi.org/10.1115/1.2897670>
- El-Borgi, S., Abdelmoul, R., Keer, L. (2006). A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4), 658-674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.017>
- Erdoğan, F., Gupta G. D. (1972). On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 29, 525-534. <https://doi.org/10.1090/qam/408277>
- Gecit, M. R. (1980). A tensionless contact without friction between an elastic layer and an elastic foundation. *International Journal of Solids and Structures*, 16(5), 387-396. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(80\)90037-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(80)90037-2)
- Gecit, M. R. (1981). Axisymmetric contact problem for an elastic layer and an elastic foundation. *International Journal of Solids and Structures*, 19(6), 747-755. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(81\)90108-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(81)90108-7)
- Gladwell, G. M. L. (1976). On some unbonded contact problems in plane elasticity theory. *Journal of Applied Mechanics*, 43(2), 263-267. <https://doi.org/10.1115/1.3423821>
- Guler, M. A. (2014). Closed-form solution of the two-dimensional sliding frictional contact problem for an orthotropic medium. *International Journal of Mechanical Sciences*, 87, 72-88. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.033>
- Guler, M. A., Erdogan, F. (2004). Contact mechanics of graded coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14), 3865-3889. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.025>
- Kahya, V. (1997). Üst Tarafından Rijit Olarak Tutulmuş Elastik Bir Tabaka ile Rijit Bir Blok Arasındaki Sürtünmesiz Değme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Kahya, V. (2003). İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Karabulut, P. M., Çomez, İ. (2023). Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded orthotropic layer indented by a rigid cylindrical punch: Analytical and finite element approaches. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, e202200427. <https://doi.org/10.1002/zamm.202200427>
- Ke, L., Wang, Y. (2007). Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(1), 171-188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>



- Kochetkov, I. D., Rogacheva, N. N. (2005). Contact interaction of a piezoelectric actuator and elastic half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(5), 792-804. <https://doi.org/10.1016/j.japmathmech.2005.09.014>
- Kucuksucu, A., Guler, M. A., Avci, A. (2015). Mechanics of sliding frictional contact for a graded orthotropic half-plane. *Acta Mechanica*, 226, 3333-3374. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1374-7>
- Li, X., Wang, M. (2006). Hertzian contact of anisotropic piezoelectric bodies. *Journal of Elasticity*, 84, 153-166. <https://doi.org/10.1007/s10659-006-9061-5>
- Oktay, M.G. (2023). İzotrop Yarım Düzleme Oturan Ortotrop Tabakanın Sürekli Temas Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Bayburt Üniversitesi, Türkiye.
- Oner, E. (2021a). Computational contact mechanics for a medium consisting of functionally graded material coating and orthotropic substrate. *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, 4(4), 249-266. <https://doi.org/10.31462/jseam.2021.04249266>
- Oner, E. (2021b). Two-dimensional frictionless contact analysis of an orthotropic layer under gravity. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 16(4), 573-594. <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.573>
- Oner, E. (2021c). Frictionless contact mechanics of an orthotropic coating/isotropic substrate system. *Computers and Concrete*, 28(2), 209-220. <https://doi.org/10.12989/cac.2021.28.2.209>
- Oner, E., Adiyaman, G., Birinci, A. (2017). Continuous contact problem of a functionally graded layer resting on an elastic half-plane. *Archives of Mechanics*, 69(1), 53-73.
- Oner, E., Birinci, A. (2014). Continuous contact problem for two elastic layers resting on an elastic half infinite plane. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 9(1), 105-119. <https://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.105>
- Oner, E., Birinci, A. (2020). Investigation of the solution for discontinuous contact problem between a functionally graded (fg) layer and homogeneous half-space. *Archive of Applied Mechanics*, 90(12), 2799-2819. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01750-y>
- Oner, E., Sengul Sabano, B., Uzun Yaylaci, E., Adiyaman, G., Yaylaci, M., Birinci, A. (2022). On the plane receding contact between two functionally graded layers using computational, finite element and artificial neural network methods. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 102(2). <https://doi.org/10.1002/zamm.202100287>
- Oner, E., Yaylaci, M., Birinci, A. (2014). Solution of a receding contact problem using an analytical method and a finite element method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 9(3), 333-345. <https://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.333>
- Oner, E., Yaylaci, M., Birinci, A. (2015). Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from fem. *Structural Engineering and Mechanics*, 54(4), 607-622. <https://doi.org/10.12989/sem.2015.54.4.607>
- Özşahin, T.Ş. (2000). Rijit İki Düz Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Türkiye.
- Shibuya, T., Koizumi, T., Nakahara, I. (1974). An elastic contact problem for a half-space indented by a flat annular rigid stamp. *International Journal of Engineering Science*, 12(9), 759-771. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(74\)90056-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90056-1)
- Singh, B. M., Rokne, J., Dhaliwal, R. S. (2007). The study of dynamic behavior of functionally graded piezoelectric materials and an application to a contact problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 65(1), 155-162. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-07-01029-0>
- Sui, Y., Wang, W., Zhang, H., Liang, H. (2023). 3D frictional contact of graded magneto-electro-elastic film-substrate system under electromagnetic fields. *International Journal of Solids and Structures*, 269, 112217. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112217>
- Toktas, S. E., Dag, S. (2022). Multi-layer model for moving contact problems of functionally graded coatings with general variations in physical properties. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part L-Journal of Materials-Design and Applications*, 236(10), 1967-1980. <https://doi.org/10.1177/14644207221092119>
- Uzun Yaylaci, E., Oner, E., Yaylaci, M., Ozdemir, M. E., Abushattal, A., Birinci, A. (2022). Application of artificial neural networks in the analysis of the continuous contact problem. *Structural Engineering and Mechanics*, 84(1), 35-48. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.84.1.035>
- Wang, C., Yan, J., Cao, R. (2023). On the receding contact plane problem for bi-fgm-layers indented by a flat indenter. *Structural Engineering and Mechanics*, 85(5), 621-633. <https://doi.org/10.12989/sem.2023.85.5.621>

- Woźniak, M., Hummel, A., Pauk, V. J. (2002). Axisymmetric contact problems for an elastic layer resting on a rigid base with a winkler type excavation. *International Journal of Solids and Structures*, 39(15), 4117-4131. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00229-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00229-9)
- Yaylaci, M., Adiyaman, G., Oner, E., Birinci, A. (2020). Examination of analytical and finite element solutions regarding contact of a functionally graded layer. *Structural Engineering and Mechanics*, 76(3), 325-336. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.76.3.325>
- Yaylaci, M., Adiyaman, G., Oner, E., Birinci, A. (2021a). Investigation of continuous and discontinuous contact cases in the contact mechanics of graded materials using analytical method and fem. *Computers and Concrete*, 27(3), 199-210. <https://doi.org/10.12989/cac.2021.27.3.199>
- Yaylaci, M., Eyuboglu, A., Adiyaman, G., Uzun Yaylaci, E., Oner, E., Birinci, A. (2021b). Assessment of different solution methods for receding contact problems in functionally graded layered mediums. *Mechanics of Materials*, 154. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103730>
- Yaylaci, M., Oner, E., Birinci, A. (2014). Comparison between analytical and ansys calculations for a receding contact problem. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(9), 4014070. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.000078](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.000078)
- Yilmaz, K. B., Comez, I., Guler, M. A., Yildirim, B. (2019). The effect of orthotropic material gradation on the plane sliding frictional contact mechanics problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 54(4), 254-275. <https://doi.org/10.1177/0309324719859110>
- Zharii, O. Y. (1995). Adhesive contact between the surface wave and a rigid strip. *Journal of Applied Mechanics*, 62(2), 368-372. <https://doi.org/10.1115/1.2895940>