Kafkas Üniv Fen Bil Enst Derg
3(1):49-58, 2010

Kapalı Düzgün Eğri Üzerinde Tanımlı Fonksiyonlara Yaklaşım

Nizami MUSTAFA[1], *Murat ÇAĞLAR[2]

[1] Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kars
[2] Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Erzurum

Makale Kodu (Article code): 10-10A

Özet: Bu çalışmada kompleks düzlemde kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara rasyonel polinomlarla yaklaşım problemi incelenmiştir. Çalışma, genelleştirilmiş Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonların rasyonel polinomlarla yaklaşımı üzerinedir.

Anahtar kelimeler: Rasyonel polinomlar, Genelleştirilmiş Hölder sınıfı, Yaklaşım.
Matematiğe ait konu sınıflandırılması: 30E10, 30E20, 41A20.

On The Approach of Function Defined on Smooth Closed

Abstract : The study aims to examine the approximation problem to functions which is defined on closed curve in complex domain by rational polynomials. The study is on the approximation of functions which provide generalized Hölder conditions by rational polynomials.

Keywords: Rational polynomials, Generalized Hölder class, Approximation.
Mathematical subject classification: 30E10, 30E20, 41A20.

***E-mail:** mcaglar25@gmail.com

Giriş

Matematiğin, fiziğin ve birçok nümerik problemlerin çözümünde yaklaşım teorisinin sonuçları sıklıkla kullanılmaktadır. Yaklaşım teorisinin temelini, fonksiyonlara yaklaşım oluşturmaktadır. Şimdiye kadar fonksiyonlara birçok yaklaşım yöntemleri çalışılmıştır (Alper 1955, Wang et al 1997). Fonksiyonların yaklaşım teorisi sonuçlarından yararlanarak matematik ve fiziğin birçok problemleri nümerik olarak çözülmektedir.

Bu çalışma, karmaşık düzlemde kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara rasyonel polinomlarla yaklaşım üzerinedir.

Çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ana sonuçları ispatlayabilmek için gerekli olan bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise ana sonuçlar verilmiştir.

Bulgular

$\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde γ kapalı düzgün basit Jordan eğrisi $t = t(s),\ 0 \le s \le \ell$ denklemi ile verilsin. Burada $\ell = mes\gamma$, γ eğrisinin uzunluğudur. γ^+ ve γ^- ile, sırasıyla, γ eğrisinin içini ve dışını gösterelim. 0rijinin γ^+ bölgesinde olduğunu kabul edeceğiz.

Biz bu çalışmada γ eğrisi üzerinde tanımlı fonksiyonlara

$$R_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \qquad (2.1)$$

şekilli rasyonel polinomlarla yaklaşım problemini ele alacağız.

$f : \gamma \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için süreklilik modülünü

$$\omega_{f,\gamma}(\delta) = \sup\left\{ |f(t_1) - f(t_2)|;\ s(t_1,t_2) \le \delta \right\},\quad 0 < \delta \le \ell/2$$

şekilde tanımlayalım.

$$\omega_\gamma(f,\delta) = \sup\left\{ |f(t_1) - f(t_2)|;\ |t_1 - t_2| \le \delta \right\},\quad 0 < \delta \le d$$

olsun. Burada, $s(t_1,t_2)$ $t_1,t_2 \in \gamma$ noktalarını birleştiren yaylardan kısa olanı ve $d = \sup\left\{ |\xi - \zeta|;\ \xi,\zeta \in \gamma \right\}$ γ eğrisinin çapıdır.

Düzgün eğriler için

$$c_1\omega_\gamma(f,\delta) \le \omega_{f,\gamma}(\delta) \le c_2\omega_\gamma(f,\delta),\quad 0 < \delta \le d \qquad (2.2)$$

olduğu açıktır.

Çalışmada $c_1, c_2, \ldots$ ile sabit sayılar gösterilecektir.

$A(\overline{\gamma^+})$ ile γ^+ bölgesinde tanımlı ve bu bölgede analitik ve kapanışında sürekli fonksiyonlar kümesini gösterelim. $A^r(\overline{\gamma^+})$ $(r \ge 0$ tamsayı$)$ ile r. mertebeden türevi $A(\overline{\gamma^+})$'dan olan fonksiyonlar kümesini göstereceğiz.

$$\gamma_0 = \{w \in \mathbb{C};\ |w| = 1\},$$

$$\gamma_0^+ = \{w \in \mathbb{C};\ |w| < 1\},\ \gamma_0^- = \{w \in \mathbb{C};\ |w| > 1\}$$

olsun. $w = \varphi(z)$ fonksiyonu γ^- bölgesini γ_0^- bölgesine konform dönüştüren ve

$$\varphi(\infty) = \infty, \qquad \varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \varphi(z)/z > 0$$

koşullarını sağlayan fonksiyon olsun.

$z = \psi(w)$ fonksiyonu ile $w = \varphi(z)$ fonksiyonunun tersini gösterelim. $\psi(w)$ fonksiyonu γ_0^- bölgesini γ^- bölgesine

$$\psi(\infty) = \infty,\ \psi'(\infty) = \lim_{w\to\infty} \psi(w)/w > 0$$

koşullarıyla dönüştüren konform dönüşümdür.

$w = \tilde{\varphi}(z)$ fonksiyonu γ^+ bölgesini γ_0^+ bölgesine $\tilde{\varphi}(0) = 0,\ \tilde{\varphi}'(0) > 0$ koşulları ile konform dönüştüren bir fonksiyon olsun. $\tilde{\gamma}_r$ $(0 < r \le 1)$ ile $w = \tilde{\varphi}(z)$ konform dönüşümü zamanı γ^+ bölgesinin iç seviye eğrisini gösterelim. $\tilde{\rho}_r(t)$, $t \in \gamma$ noktasından $\tilde{\gamma}_r$ seviye eğrisine uzaklık fonksiyonunu olsun.

$z = \tilde{\psi}(w)$ fonksiyonu ile $w = \tilde{\varphi}(z)$ fonksiyonunun tersini gösterelim.

Tanım 2.1: $\psi(w)$ ve $\tilde{\psi}(w)$ fonksiyonlarının türevleri $\overline{\gamma_0^-}$ ve $\overline{\gamma_0^+}$ bölgelerinde mevcut ve $w \in \gamma_0$ için

$$0 < c_3 \le |\psi'(w)| \le c_4,$$

$$0 < c_5 \le |\tilde{\psi}'(w)| \le c_6$$

sağlanıyorsa, γ^+ (D') tipinde bir bölgedir diyeceğiz (Dzyadik 1972).

Eğer, γ^+ (D') tipinde bölge ise bunu $\gamma^+ \in (D')$ veya $\gamma \in (D')$ şeklinde belirteceğiz.

Eğer, $\gamma \in (D')$ ise her $t \in \gamma$ için

$$\rho_{1+1/n}(t) \le \frac{c_7}{n}, \tag{2.3}$$

$$\rho_{1-1/n}(t) \le \frac{c_8}{n}. \tag{2.4}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Tanım 2.2 (Alper 1955)**:** γ^+ bölgesinin sınırı γ düzgün kapalı Jordan eğrisi, $\theta(s)$, γ eğrisine $t = t(s)$ noktasında teğetin reel eksenle oluşturduğu açı olsun. $\omega(x)$ bu açının süreklilik modülü olmak üzere,

$$\int_0 \frac{\omega(x)}{x} |\ln x|\, dx < +\infty$$

koşulu sağlanıyorsa, γ^+ bölgesi (J) koşulunu sağlıyor diyeceğiz.

$\gamma^+ \in (J)$ ise aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur (Alper 1955)

$$\left.\begin{aligned} 0 < m_1 &\le \left|\frac{\psi(w) - \psi(\tau)}{w - \tau}\right| \le \mathrm{M}_1, \\ 0 < m_2 &\le \left|\frac{\tilde{\psi}(w) - \tilde{\psi}(\tau)}{w - \tau}\right| \le \mathrm{M}_2. \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Burada $w,\tau \in \gamma_0$ ve $m_1, m_2, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ sabitlerdir. Ayrıca $\tilde{\psi}'(w)$ ve $\psi'(w)$ fonksiyonları, sırasıyla $\overline{\gamma_0^+}$ ve $\overline{\gamma_0^-}$ bölgelerinde sürekli ve sıfırdan farklıdır.

(2.5)'ten (J) koşulunu sağlayan bölgelerin (D') tipinde bölgeler olduğu anlaşılır.

$(0,a]$'da negatif olmayan, monoton artan ve $\lim_{\delta\to 0^+}\omega(\delta)=0$, $\omega(\delta)/\delta$ monoton azalan fonksiyonların kümesini $\Phi(0,a]$ ile göstereceğiz.

$$J_0 = \left\{ \omega \in \Phi(0,\ell/2];\ \int_0 \frac{\omega(x)}{x}dx < +\infty \right\}$$

alalım.

$\omega \in \Phi(0,\ell/2]$,

$$H_\omega(\gamma) = \{ f \in C(\gamma);\ H(f;\omega)\}$$
$$\equiv \sup\left\{ \frac{|f(t_1)-f(t_2)|}{\omega(|t_1-t_2|)};\ t_1,t_2 \in \gamma \right\} < +\infty$$

olsun. (Burada $C(\gamma)$, γ eğrisi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesidir).

$f \in H_\omega(\gamma)$ için normu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\|f\|_\omega = \|f\|_{C(\gamma)} + H(f;\omega).$$

Eğer, $f^{(r)} \in H_\omega(\gamma)$ ise $f(t), t\in\gamma$ fonksiyonu $W^r H_\omega(\gamma)$, $\omega \in \Phi(0,\ell/2]$ $(0 \le r$ tamsayıdır) sınıfındandır diyeceğiz. Burada $f^{(r)}$, f fonksiyonunun r. mertebeden türevidir.

$\omega \in J_0$ fonksiyonu için

$$Z(\omega;\delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(x)}{x}dx + \delta \int_\delta^{\ell/2} \frac{\omega(x)}{x^2}dx,$$

$0 < \delta \le \ell/2$

alalım.

$$\Phi H = \{ \omega \in \Phi(0,\ell/2]; Z(\omega;\delta)$$
$$= O(\omega(\delta)), 0<\delta\le \ell/2\}$$

olsun.

$f \in W^r H_\omega(\gamma),\ \omega \in \Phi(0,\ell/2]$ $(0 \le r$ tamsayıdır) için

$K_r^+(f;\omega) = H(f^{(r)};\omega)$,

$K_r^-(f;\omega) = H(f;\omega)$ eğer, $r=0$ ise ve

$K_r^-(f;\omega) = \sum_{j=1}^{r} \|f^{(j)}\|_\omega$ eğer, $r \ge 1$ ise

alacağız.

Tartışma

Çalışmanın bu kısmında elde edilen sonuçları vereceğiz. Öncelikle aşağıdaki yardımcı lemmayı verelim.

Lemma 3.1: γ karmaşık düzlemde kapalı düzgün bir Jordan eğrisi, $\omega \in J_0$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(0 \le r$ tamsayı) olsun. Bu durumda $P_n^-(\infty)=0$ koşulunu ve

$$\begin{aligned} &\left|F^+(t) - P_n^+(t)\right| \le c_9.K_r^+(f;\omega) \\ &\times[\rho_{1+1/n}(t)]^r Z(\omega;\rho_{1+1/n}(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\left|F^-(t)-P_n^-(t)\right| \le c_{10}.K_r^-(f;\omega) \times[\tilde{\rho}_{1-1/n}(t)]^r Z(\omega;\tilde{\rho}_{1-1/n}(t)) \quad (3.2)$$

değerlendirmelerini sağlayacak şekilde, sırasıyla, z ve z^{-1}'in n. dereceden $P_n^+(z)$ ve $P_n^-(z)$ polinomları vardır. Burada, $F^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}Sf(t)$'dir.

İspat: İspatı önce $r=0$ için verelim. $\omega\in J_0$, $f\in H_\omega(\gamma)$ fonksiyonu için

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma \quad (3.3)$$

Cauchy integralini ele alalım.

Aşağıdaki gibi fonksiyon tanımlayalım

$$G_1(z)=\begin{cases} F(z), & z\in\gamma^+ \text{ ise,}\\ \mathrm{F}^+(t), & z=t\in\gamma \text{ ise.}\end{cases}$$

$G_1\in A(\overline{\gamma}^+)$ olduğundan (çalışma (Alper 1956) Teorem 3'e göre) her $n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesidir) için n. dereceden $P_n^+(z)$ polinomu vardır ki her $t\in\gamma$ için

$$\left|G_1(t)-P_n^+(t)\right|\le c_{11}.\omega_{\overline{\gamma}^+}(G_1,\rho_{1+1/n}(t))$$

(3.4)

eşitsizliği doğrudur.

Burada, $\omega_{\overline{\gamma}^+}(G_1,\delta)$, G_1 fonksiyonunun $\overline{\gamma}^+$'da ki süreklilik modülüdür.

$$\omega_{\overline{\gamma}^+}(G_1,\delta)\le c_{12}.\omega_\gamma(G_1,\delta),\qquad 0<\delta\le d$$

olduğundan (Andrievskii ve İsrafilov 1980), (2.2) ve (3.4)'ten

$$\left|F^+(t)-P_n^+(t)\right|\le c_{13}.\omega_{F^+,\gamma}(\rho_{1+1/n}(t)) \quad (3.5)$$

elde ederiz.

$$\omega_{F^+,\gamma}(\delta)\le c_{14}.Z(\omega_{f,\gamma};\ \delta),\ \ 0<\delta\le\ell/2$$

olduğundan (Belıy 1977) (3.5)'den (3.1)'in doğruluğunu ($r=0$ için) elde ederiz.

(3.2)'nin doğruluğu benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi $1\le r$ tamsayı olsun.

$$F^{+(r)}(t)=\frac{1}{2}f^{(r)}(t)+\frac{1}{2}Sf^{(r)}(t),\ \ t\in\gamma$$

ve $f\in W^rH_\omega(\gamma)$ olduğundan $G_1\in A^r(\overline{\gamma}^+)$ (Dzyadik 1977) olacaktır.

Bu durumda (çalışma (Alper 1956)'daki Teorem 10'a göre) her $n\in\mathbb{N}$ için n. dereceden öyle $P_n^+(z)$ polinomu vardır ki her $t\in\gamma$ için aşağıdaki eşitsizlik doğru olacaktır

$$\left|F^+(t)-P_n^+(t)\right|\le c_{15}.[\rho_{1+1/n}(t)]^r \times\omega_{\overline{\gamma}^+}(G_1^{(r)},\rho_{1+1/n}(t)) \quad (3.6)$$

Burada, $w_{\overline{\gamma}^+}(G_1^{(r)},\delta)$, $\overline{\gamma}^+$ bölgesinde $G_1^{(r)}$ fonksiyonunun süreklilik modülüdür.

$$\omega_{\overline{\gamma}^+}(G_1^{(r)},\delta)\le c_{16}.\omega_\gamma(G_1^{(r)},\delta),\ \ 0<\delta\le d,$$

olduğundan (Andrievskii ve İsrafilov 1980) (2.2) eşitsizliğini dikkate alırsak (3.6)'dan

$$\begin{aligned}&\left|F^{+}(t)-P_n^{+}(t)\right| \le c_{17}.[\rho_{1+1/n}(t)]^r \\ &\times\omega_{F^{+(r)},\gamma}(\rho_{1+1/n}(t))\end{aligned} \qquad (3.7)$$

elde ederiz.

$$\omega_{F^{+(r)},\gamma}(\delta) \le c_{18}.Z(\omega_{f^{(r)},\gamma};\delta),$$

$$0<\delta \le \ell/2,$$

olduğundan (Belıy 1977) (3.7)'den (3.1) eşitsizliğinin doğruluğu çıkar.

(3.2)'nin ispatı (3.1)'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Bununla Lemma 3.1'in ispatı tamamdır.

Aşağıdaki lemma, Lemma 3.1'in ispatına benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 3.2: γ karmaşık düzlemde kapalı düzgün Jordan eğrisi, $\omega \in J_0$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(0 \le r$ tamsayı) olsun. Bu durumda $P_n^{-}(\infty)=0$ koşulunu ve

$$\begin{aligned}&\omega_{F^{+}-P_n^{+},\gamma}(\delta) \le c_{19}.\delta_n^r.K_r^{+}(f;\omega) \\ &\times[Z(\omega;\delta)+\delta\int_{\delta}^{\ell/2}\frac{Z(\omega;x)}{x^2}dx],\end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\begin{aligned}&\omega_{F^{-}-P_n^{-},\gamma}(\delta) \le c_{20}.\Delta_n^r.K_r^{-}(f;\omega) \\ &\times[Z(\omega;\delta)+\delta\int_{\delta}^{\ell/2}\frac{Z(\omega;x)}{x^2}dx]\end{aligned} \qquad (3.9)$$

değerlendirmelerini sağlayacak şekilde, sırasıyla, z ve z^{-1}'in n. dereceden $P_n^{+}(z)$ ve $P_n^{-}(z)$ polinomları vardır. Burada,

$$\delta_n = \max\left\{\rho_{1+1/n}(t), t\in\gamma\right\},$$

$$\Delta_n = \max\left\{\tilde{\rho}_{1-1/n}(t), t\in\gamma\right\} \text{ dır.}$$

Lemma 3.1 ve Lemma 3.2'den yararlanarak aşağıdaki teorem kolaylıkla ispatlanır.

Teorem 3.1: γ karmaşık düzlemde kapalı düzgün Jordan eğrisi, $\omega \in J_0$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(r \ge 0$ tamsayı) olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\left|f(t)-R_n(t)\right| \le c_{21}.K_r^{-}(f;\omega) \\ &\times[\rho_{1/n}^{*}(t)]^r Z(\omega;\rho_{1/n}^{*}(t)), \quad t\in\gamma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\omega_{f-R_n,\gamma}(\delta) \le c_{22}.K_r^{-}(f;\omega)\varepsilon_n^r \\ &\times[Z(\omega;\delta)+\delta\int_{\delta}^{\ell/2}\frac{Z(\omega;x)}{x^2}dx],\ 0<\delta\le\ell/2\end{aligned}$$

değerlendirmelerini sağlayacak, (2.1) şekilli bir $R_n(z)$ rasyonel polinomu vardır.Burada,

$$\rho_{1/n}^{*}(t) = \max\left\{\rho_{1+1/n}(t), \tilde{\rho}_{1-1/n}(t)\right\},$$

$\varepsilon_n = \max(\delta_n, \Delta_n)$'dir.

Sonuç 3.1: γ karmaşık düzlemde kapalı düzgün Jordan eğrisi, $\omega \in \Phi H$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(r \ge 0$ tamsayı) olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\left|f(t)-R_n(t)\right| \le c_{23}.K_r^{-}(f;\omega) \\ &\times[\rho_{1/n}^{*}(t)]^r\omega(\rho_{1/n}^{*}(t)),\end{aligned} \quad t\in\gamma,$$

$$\omega_{f-R_n,\gamma}(\delta) \le c_{24}.K_r^{-}(f;\omega)\varepsilon_n^r(\omega;\delta),$$

$$0<\delta\le\ell/2$$

değerlendirmelerini sağlayacak, (2.1) şekilli bir $R_n(z)$ rasyonel polinomu vardır.

Sonuç 3.2: $\gamma \in (D')$, $\omega \in \Phi H$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ ($r \geq 0$ tamsayı) olsun. Bu durumda

$$\left|f(t) - R_n(t)\right| \leq c_{25}.K_r^-(f;\omega)\omega(1/n)n^{-r},$$

$t \in \gamma$,

$$\omega_{f-R_n,\gamma}(\delta) \leq c_{26}.K_r^-(f;\omega)\omega(\delta)n^{-r},$$

$0 < \delta \leq \ell/2$

değerlendirmelerini sağlayacak, (2.1) şekilli bir $R_n(z)$ rasyonel polinomu vardır.

Lemma 3.3: $\gamma \in (D')$, $\omega \in \Phi H$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ ($r \geq 0$ tamsayı), $\omega_0 \in \Phi$ ve $\omega(\delta)/\omega_0(\delta)$ $(0, \ell/2]$ aralığında azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda $P_n^-(\infty) = 0$ koşulunu ve

$$\omega_{F^+-P_n^+,\gamma}(\delta) \leq c_{27}.K_r^+(f;\omega) \times \frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}\omega_0(\delta)n^{-r}, \quad 0 < \delta \leq \ell/2,$$

$$\omega_{F^--P_n^-,\gamma}(\delta) \leq c_{28}.K_r^-(f;\omega) \times \frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}\omega_0(\delta)n^{-r}, \tag{3.10}$$

$0 < \delta \leq \ell/2$ (3.11)

değerlendirmelerini sağlayacak şekilde, sırasıyla, z ve z^{-1}'in n. dereceden $P_n^+(z)$ ve $P_n^-(z)$ polinomları vardır.

İspat: $P_n^+(z)$ ve $P_n^-(z)$ olarak Lemma 3.1'de sözü geçen polinomları ele alalım. Önce (3.10) değerlendirmesini ispatlayalım ((3.11) benzer şekilde ispatlanır). Lemmanın varsayımlarından, Lemma 3.1 gereğince,

$$\left\|F^+ - P_n^+\right\|_{C(\gamma)} \leq c_{29}.K_r^+(f;\omega)\omega(1/n)n^{-r} \tag{3.12}$$

elde ederiz.

$t_1, t_2 \in \gamma$ olsun. **1.** $s(t_1,t_2) \geq 1/n$ ve **2.** $s(t_1,t_2) < 1/n$ durumlarını ele alalım.

Durum 1. (3.12) gereğince aşağıdaki değerlendirmeyi yazabiliriz

$$\left\|\left[F^+(t_2) - P_n^+(t_2)\right] - \left[F^+(t_1) - P_n^+(t_1)\right]\right\|$$
$$\leq 2c_{30}.K_r^+(f;\omega)\omega(1/n)n^{-r}$$
$$= 2c_{30}.K_r^+(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}\omega_0(1/n)n^{-r}$$
$$\leq 2c_{30}.K_r^+(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}\omega_0(s(t_1,t_2))n^{-r}.$$

Durum 2. Lemmanın varsayımlarından, Lemma 3.2 gereğince, elde ederiz

$$\omega_{F^+-P_n^+,\gamma}(s(t_1,t_2)) \leq c_{31}.K_r^+(f;\omega)$$
$$\times\omega(s(t_1,t_2))n^{-r} = c_{31}.K_r^+(f;\omega)\frac{\omega(s(t_1,t_2))}{\omega_0(s(t_1,t_2))}$$
$$\times\omega_0(s(t_1,t_2))n^{-r} \leq c_{31}.K_r^+(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}$$
$$\times\omega_0(s(t_1,t_2))n^{-r}.$$

Her iki durumu göz önünde bulundurursak aşağıdaki değerlendirme elde edilir

$$\omega_{F^+-P_n^+,\gamma}(\delta) \le c_{32}.K_r^+(f;\omega) \times \frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}\omega_0(\delta)n^{-r}, \qquad 0<\delta\le \ell/2$$

Bununla (3.10) eşitsizliğinin, dolayısıyla da Lemma 3.3'ün ispatı tamamdır.

Sonuç 3.4: $\gamma \in (D')$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(r \ge 0 \text{ tamsayı})$, $0<\beta\le\alpha<1$ olsun. Bu durumda $P_n^-(\infty)=0$ koşulunu ve

$$\omega_{F^+-P_n^+,\gamma}(\delta) \le c_{33}.K_r^+(f;\alpha)n^{\beta-\alpha-r}\delta^\beta,$$

$0<\delta\le \ell/2$,

$$\omega_{F^--P_n^-,\gamma}(\delta) \le c_{34}.K_r^+(f;\alpha)n^{\beta-\alpha-r}\delta^\beta,$$

$0<\delta\le \ell/2$

değerlendirmelerini sağlayacak şekilde, sırasıyla, z ve z^{-1}'in n. dereceden $P_n^+(z)$ ve $P_n^-(z)$ polinomları vardır.

Lemma 3.1 ve Lemma 3.3'den aşağıdaki teorem açıktır.

Teorem 3.2: $\gamma \in (D')$, $\omega \in \Phi H$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(r \ge 0 \text{ tamsayı})$, $\omega_0 \in \Phi$ ve $\omega(\delta)/\omega_0(\delta)$ $(0,\ell/2]$ aralığında azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda $P_n^-(\infty)=0$ koşulunu ve

$$\left\|F^+ - P_n^+\right\|_{\omega_0} \le c_{35}.K_r^+(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}n^{-r},$$

$$\left\|F^- - P_n^-\right\|_{\omega_0} \le c_{36}.K_r^-(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}n^{-r}$$

değerlendirmelerini sağlayacak şekilde, sırasıyla, z ve z^{-1}'in n. dereceden $P_n^+(z)$ ve $P_n^-(z)$ polinomları vardır.

Teorem 3.1 ve Lemma 3.3'den aşağıdaki teoremin doğruluğu açıktır.

Teorem 3.3: $\gamma \in (D')$, $\omega \in \Phi H$, $f \in W^r H_\omega(\gamma)$ $(r \ge 0 \text{ tamsayı})$, $\omega_0 \in \Phi$ ve $\omega(\delta)/\omega_0(\delta)$ $(0,\ell/2]$ aralığında azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left\|f - R_n\right\|_{\omega_0} \le c_{37}.K_r^-(f;\omega)\frac{\omega(1/n)}{\omega_0(1/n)}n^{-r}$$

değerlendirmesi gerçekleşecek şekilde (2.1) şekilli bir $R_n(z)$ rasyonel polinomu vardır.

Sonuç 3.6: $\gamma \in (D')$, $f \in W^r H_\alpha(\gamma)$ $(r \ge 0 \text{ tamsayı})$, $0<\beta\le\alpha<1$ olsun. Bu durumda

$$\left\|f - R_n\right\|_{\beta} \le c_{38}.K_r^-(f;\alpha)n^{\beta-\alpha-r}$$

değerlendirmesi gerçekleşecek şekilde (2.1) şekilli bir $R_n(z)$ rasyonel polinomu vardır.

Kaynaklar

Alper SYA 1955. Kapalı bölgede kompleks değişkenli fonksiyonlara düzgün yaklaşım üzerine. İzv. AN SSSR, Mat. No 6: 423–444.

Alper SYA 1956. Kompleks düzlemde Lagrange enterpolasyon polinomunun yakınsaklığı üzerine. UMN. Cilt XI, 5(7): 44–50.

Andrievskii VV ve İsrafilov DM 1980. Kvazikonform eğrilerde tanımlı fonksiyonlara rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım. İzv. ABA Azerb. SSR, Fizik-Teknik ve Matematik, Cilt 1, No 4: 21–26.

Belıy Vİ 1977. Konform dönüşümler ve analitik fonksiyonların kvazikonform sınırlı bölgede yaklaşımı. Mat. Sb, Cilt 102(144), No 3: 331–361.

Cherednichenko VG 2002. Rational interpolation: analytical solution. *Sib. Math. J.* 43(1): 151–155.

Cherednichenko VG 2006. Rational approximation and analytical continuation from a finite number of points. *J. Inv. III-Posed Problems* 14(7): 643–649.

Cherednichenko VG 2008. Approximation by rational functions. Applicable Analysis Vol. 87, Nos. 10–11: 1289–1293.

Cody WJ, Meinardus G and Varga RS 1969. Chebyshev rational approximation to e^x in $[0,+\infty)$ and applications to heat conduction problems. Approximation Theory, 2: pp. 50–65.

Davis PJ 1975. Interpolation and Approximation. Dover, New York.

Dzyadik VK 1972. Düzgün ve parçalı düzgün eğri ile sınırlanan bölgelerde tanımlı Cauchy integrallarının ve genelleştirilmiş Hölder sınıfından olan fonksiyonların yaklaşımına genelleştirilmiş Faber polinomlarının uygulaması üzerine. UMD, Cild 24, No1: 3-19 (Rusça).

Dzyadik VK 1977. Fonksiyonlara polinomlarla yaklaşıma giriş, Moskova, Nauka.

Erdos P and Reddy AR 1975. Rational approximation on the positive real axis. *Proc. London Math. Soc*, 31:439–456.

Erdos P and Reddy AR 1976. Rational approximation. *Advances in Mathematics*, 21:78–109.

Gakov FD 1977. Sınır Problemleri, Moskowa, Nouka, pp. 640.

Ivanov VV ve Zadiraka VK 1966. Yaklaşım teorisinin bazı yeni sonuçları. Nümerik Mat. İzd. Kiyev Üniv. Cilt 2: 3–3.

Lu Chien Ke 1982. Error analysis for interpolating complex cubic splines with deficiency 2. *J.Approx. Theory*, 36, 3:183–196.

Magnaradze LG 1947. Plemelj-Privalov teoreminin bir genellemesi. Gürcistan SSR BA Bildirileri, c.8 No 8: pp. 509–516.

Mamedkhanov DJİ 1985. Kompleks düzlemde yaklaşım ve Cauchy çekirdekli singüler operatörler, Doktora Tezi, Tiflis.

Mustafayev NM 1985. Düzgün kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara yaklaşım. Genç Bilim Adamlarının VI. Matematik ve Mekanik Konferansı, pp. 171–174.

Reddy AR 1976. A contribution to rational approximation. London Math. Soc, 14: pp. 441–444.

Tamrazov PM 1975. Polinomiyal yaklaşım ve düzgünlük. Kiyev, Nauka.

Walsh JL 1961. Kompleks düzlemde enterpolasyon ve yaklaşım. Moskova.

Walsh JL 1952. Degree of approximation to functions on a Jordan curve, *Transactions of the AMS*, 73: 447–458.

Wang GJ, Sederberg TW and Chen F 1997. On the Convergence of polynomial approximation. *Journal of approximation theory*, 89: 267–288.