



POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)

URL: <http://dergipark.org.tr/politeknik>



Kremayer tipi takımla imal edilen evolvent dişli çarkların genelleştirilmiş matematik modeli

A generalised mathematical model of involute gears generated by rack type cutters

Yazar(lar) (Author(s)): Mahmut Cüneyt FETVACI¹, Berat Gürcan ŞENTÜRK²

ORCID¹: 0000-0002-1622-1583

ORCID²: 0000-0002-7325-0559

To cite to this article: Fetvacı M.C., Şentürk B.G., “Kremayer tipi takımla imal edilen evolvent dişli çarkların genelleştirilmiş matematik modeli”, *Journal of Polytechnic*, *(*) : *, (*).

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz: Fetvacı M.C., Şentürk B.G., “Kremayer tipi takımla imal edilen evolvent dişli çarkların genelleştirilmiş matematik modeli”, *Politeknik Dergisi*, *(*) : *, (*).

Erişim linki (To link to this article): <http://dergipark.org.tr/politeknik/archive>

DOI: 10.2339/politeknik.1364954

Kremayer Tipi Takımla İmal Edilen Evolvent Dişli Çarkların Genelleştirilmiş Matematik Modeli

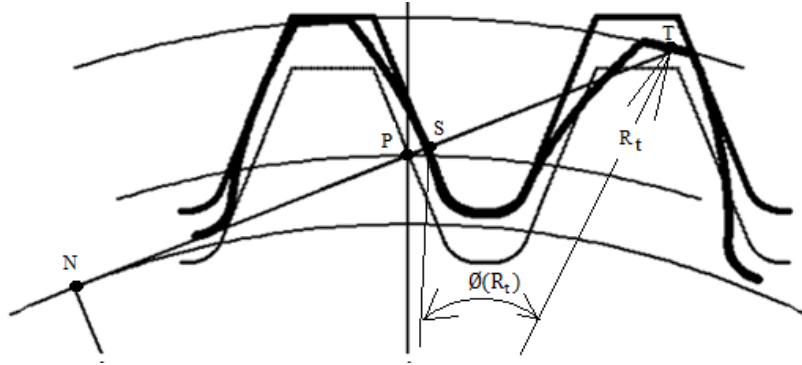
A Generalised Mathematical Model of Involute Gears Generated by Rack Type Cutters

Önemli noktalar (Highlights)

- ❖ Konikvari dişliler / Beveloid gears
- ❖ Genişletilmiş matematik model / Extended mathematical model
- ❖ Altan kesme analizi / Undercutting analysis

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışmada kremayer takımın vektör gösteriminden hareketle konikvari dişli çarkların matematik modeli geliştirilmiştir. Kremayer-çark mekanizmasının kavrama doğrusundaki temas noktasının açısal yerdeğiştirmesi esas alınarak evolvent profilin dişbaşı dairesini kesim noktasını tayin eden genelleştirilmiş ifade sunulmaktadır. / In this study a mathematical model of beveloid gears is developed based on the vector representation of the rack cutter. Based on the angular displacement of contact point on the line of action of the rack-gear mechanism, a generalized expression for determining the boundary point between involute profile and tip circle is proposed.



Şekil. Kremayer takım ile imal edilen profil kaydırmalı dişlinin kavrama doğrusu / **Figure.** Line of action of the rack cutter and generating gear with addendum modification

Amaç (Aim)

Bu çalışmanın amacı helisel evolvent dişlilerin matematik modelini helisel konikvari dişlilere genişletmektir. / The aim of this study is to extend a mathematical model of helical involute gears to helical beveloid gears.

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Kesici takımın vektörel gösteriminden hareketle, koordinat dönüşümü, diferansiyel geometri ve dişli teorisi uygulanarak imal edilen dişli çark yüzeyleri elde edilmiştir. / Based on the vector representation of the generating cutter, coordinate transformations, differential geometry and gear theory are applied to obtain the generated gear teeth surfaces.

Özgünlük (Originality)

Genişletilen matematik model için evolvent parametresinin üst limitini tayin eden bir analitik ifade türetilmiştir. / Based on the extended mathematical model, an analytical equation that determines the limit of involute parameter is proposed.

Sonuç (Conclusion)

Modellerdeki geometrik farklılık kök denklemlerinden kaynaklanmaktadır. / The geometric difference in the models is due to the root fillet equations.

Etik Standartların Beyanı (Declaration of Ethical Standards)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The author(s) of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Kremayer Tipi Takımla İmal Edilen Evolvent Dişli Çarkların Genelleştirilmiş Matematik Modeli

Araştırma Makalesi / Research Article

Mahmut Cüneyt FETVACI¹, Berat Gürcan ŞENTÜRK²

¹İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34320, İstanbul, Türkiye

²Doğuş Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34775, İstanbul, Türkiye

(Geliş/Received : 22.09.2023 ; Kabul/Accepted : 10.12.2023 ; Erken Görünüm/Early View : 27.02.2024)

ÖZ

Bu çalışmada, kesici takımın vektör ifadesinden hareketle konikvari evolvent dişlilerin matematiksel modeli geliştirilmiştir. İmal edilen yüzeyleri elde etmek için koordinat dönüşümleri, diferansiyel geometri ve dişli teorisi uygulanmıştır. Ayrıca, evolvent tasarım parametresinin sınırları da incelenmiştir. Kremayer-pinyon mekanizmasının kavrama doğrusu üzerindeki temas noktasının açılmalık yer değiştirmesine bağlı olarak, evolvent profil ile diş başı dairesi arasındaki sınır noktalarını belirlemek için genelleştirilmiş bir ifade önerilmiştir. Tasarım parametrelerinin imal edilen dişli geometrisi üzerindeki etkisini araştırmak için sayısal örnekler hazırlanmıştır. Sunulan modelin doğruluğu ve geçerliliği için literatürdeki bir konikvari evolvent dişli modeli ile karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca, düz ve helisel konikvari dişlilerin çeşitli kesitlerinde alttan kesme ve diş üstü sivrilik oluşumları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konikvari dişliler, kremayer takım, alttan kesme analizi, profil kaydırma.

A Generalised Mathematical Model of Involute Gears Generated by Rack Type Cutters

ABSTRACT

In this study, a mathematical model of involute beveloid gears is developed based on the vector expression of the cutting tool. Coordinate transformations, differential geometry and gear theory were applied to obtain the fabricated surfaces. In addition, the ranges of the helical design parameter are also examined. Depending on the angular displacement of the contact point on the line of action of the rack gear mechanism, a generalized expression is proposed to determine the boundary point between the involute profile and the tip circle. Numerical examples were prepared to investigate the effect of design parameters on the manufactured gear geometry. For the accuracy and validity of the presented model, a comparison was made with a beveloid gear model in the literature. In addition, the undercut and the zero top land formations were investigated in various sections of spur and helical beveloid gears.

Keywords: Beveloid gears, rack cutter, undercutting analysis, addendum modification

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Evolvent dişli çarklar kavrama eğrisinin bir doğru olması ve imalat kolaylığı nedeniyle en çok kullanılan dişlilerdendir. Evolvent dişlilerin referans profili trapez şeklinde kremayer olduğu için kesici takımlarında tasarımı kolaydır. Yuvarlanma yöntemiyle dişli imalatında; kremayer dişli tipi kesici takım (MAAG yöntemi), pinyon dişli tipi kesici takım (FELLOWS yöntemi) veya azdırma tipi kesici takım kullanılabilir. Yuvarlanma yönteminde profil kaydırma işlemi kolaylıkla yapılmaktadır. Dişli çark mekanizmalarına profil kaydırma, eksenler arası mesafeyi değiştirmek, alttan kesmeyi önlemek ve dişlilerin mukavemetini arttırmak için uygulanır. Geleneksel profil kaydırmada kaydırma miktarı diş genişliği boyunca aynı olarak verilmektedir. Ham dişli

konik olarak işlenip tezgaha bağlanarak takıma veya tablaya uygun hareket sağlanarak genişlik boyunca geometrinin değiştiği dişli çarklar imal edilebilir. Bu tip düzenleme dişli çarkta genişlik boyunca doğrusal değişen profil kaydırma (kendinden profil kaydırmalı) oluşturmaktadır. Böylece helis açısının yanısıra koni açısı da tasarım parametresi olduğundan evolvent dişlilerin genelleştirilmiş matematik modeli söz konusudur. Geometrideki koniklik nedeniyle geleneksel konik dişlilerden (bevel gears) ayırt etmek üzere bu dişliler konikvari (koniğe benzer, beveloid) dişliler olarak adlandırılır. Alternatif olarak konik evolvent (conical involute) dişliler olarak da bilinirler [1-4].

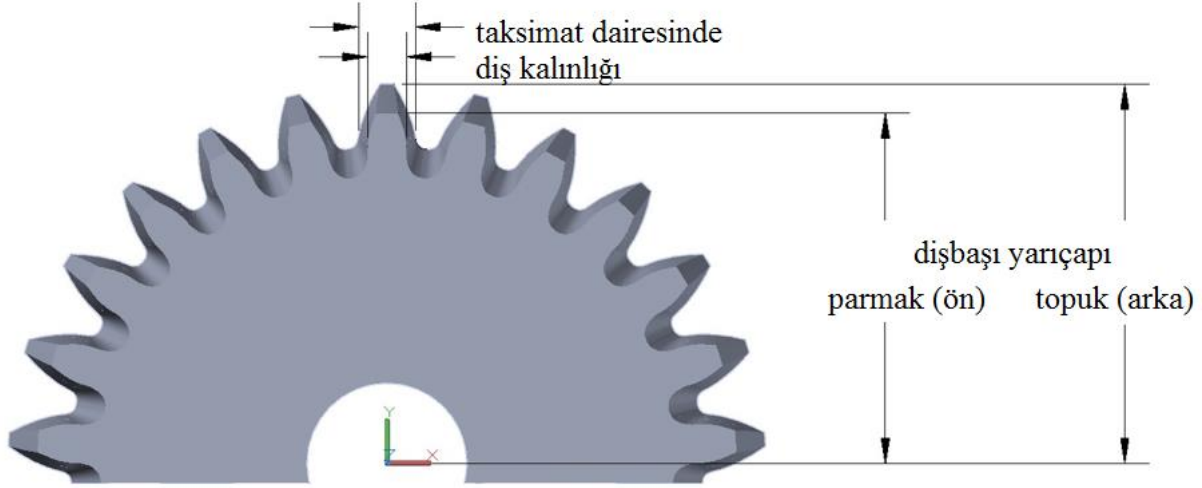
Konikvari dişliler çeşitli eksen durumlarında güç ve hareket ileten konik formda evolvent dişli çarklardır. Aykırı ve kesişen millerdeki uygulamalarda montaj hatalarına duyarlı olan bu mekanizmalar paralel

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

e-posta : bsenturk@dogus.edu.tr

millerde ise yan boşluksuz iletim sağlarlar. Konikvari dişli çarklar bu özellikleri nedeniyle taşıt tekniğinde, gemi makinelerinde ve robotikte yaygın olarak kullanılmaktadır [4]. Konikvari dişli çarklarda geometri diş genişliği boyunca değişmektedir. Şekil 1'de

görüldüğü üzere ön taraftan arka tarafa doğru doğrusal değişen profil kaydırma olduğundan diş başı, diş dibi yarıçapları ve profildeki diş kalınlıkları değişmektedir. Ayak geometrisine benzetilerek ön taraf parmak ve arka taraf topuk olarak adlandırılır [1].



Şekil 1. Konikvari dişli katı modeli (Solid model of a beveloid gear)

Evolvent profilli konik dişli çarkların modellenmesi ve imalatı ile ilgili ilk çalışmalardan biri Mitome tarafından yapılmıştır [5]. Literatürde konikvari dişli çarkların imalat prensibi, matematik modellenmesi ve analizi (statik ve dinamik) konularında da çok sayıda makale mevcuttur. Liu ve Tsay kremayer-tipi takımla konikvari dişli çarkların matematik modellenmesini sunmuştur [1]. Çalışmada alın kesitte alttan kesme analizi de yapılmıştır. Brauer, Liu ve Tsay'in çalışmasından hareketle konvansiyonel profil kaydırmayı da göz önüne alan konikvari dişli matematik modelini sunmuş ve sonlu elemanlar modelini elde etmiştir [2, 3]. Brauer, ayrıca takım yüzey parametrelerin değişim aralıklarının analitik tayinini de incelemiştir. Sun ve arkadaşları konikvari pinyon-çark mekanizmasının matematik modelini sunmuşlar ve ayrıca temas kuvvetinin büyüklük ve dağılımını hesaplamak için bir yaklaşım geliştirmişlerdir [6, 7]. Şentürk ve Fetvacı konikvari dişli çarkların modellerini elde etmişler ve çeşitli tasarım parametrelerin temas gerilmelerinin üzerindeki etkilerini incelemişlerdir [8]. Yazar ve Özdemir, kremayer takım geometrisinden hareketle kutupsal denklemlerden ve kompleks sayılardan faydalanarak eliptik dişli çark geometrisini CAD ortamında elde etmiş ve eliptik dişli çarkların imalatını tel erozyon tezgahında gerçekleştirmişlerdir [9]. Literatürdeki mevcut matematik modellerden hareketle Şentürk konikvari dişli çarkların 3-B modelini oluşturup Eriyik Yığıma Modelleme yöntemi ile imalatını gerçekleştirmiştir [10].

Gerek pinyon-tipi ve gerekse kremayer-tipi takımların ve imal edilen dişli çarkların modellenmesinde vektör metodu tercih edilmektedir [11]. Metodun üstünlüğü, çeşitli fonksiyonel ve kök düzeltmelerinin matematik modele kolaylıkla uygulanabilmesidir. Bu metotta önce takım yüzeyinin matematik modeli normal kesitte vektör

formda ifade edilir ve gerekirse heliselliği ve/veya konikliği sağlayan dönüşümler matris formda uygulanarak dişli çarkı şekillendirecek kesitte takım geometrisi elde edilir. Takım-Taslak koordinat dönüşümü uygulanarak takım geometrisi dişli çarkın koordinat sisteminde ifade edilir. Yuvarlanma parametresi hesaplanıp dönüşüm denkleminde yerine konularak imal edilen dişli çark geometrisi oluşturulur.

Kremayer-tipi takımla çeşitli tipten dişliler imal edilebilmektedir. Standart takımla evolvent profili düz veya helisel dişlilerin yanı sıra eliptik dişli çarkların da imalatı yapılmaktadır. Chang ve diğ., kremayer takımla imal edilen eliptik düz dişlilerin matematik modelini sunmuşlardır [12]. Son yıllarda yüksek performans için yapılan yenilikçi tasarımlarda takım geometrisi değiştirilmektedir. Yang, sağ ve sol profil açılarının farklı olduğu asimetric evolvent helisel dişli çarkların matematik modellenmesini ele almıştır [13]. Diğer bir yenilikçi tasarımda kremayer takımın yükseklikleri değiştirilmiş, diş taksimatı aynı kalmakla birlikte diş kalınlığı arttırılmıştır [14]. Bir diğer düzeltme dişli çarkların temas karakteristiğini iyileştiren parabolik düzeltmedir. Yang ve Pai, simetrik dişli ve parabolik düzeltmeli helisel dişlilerin matematik modelini sunmuşlardır [15]. Cheng ve Huang, asimetric dişli ve parabolik düzeltmeli helisel dişlilerin matematik modelini sunmuşlardır [16]. Çalışmada dişlilere ayrıca genişlik boyunca fiçi formu verecek şekilde düzeltme uygulanmaktadır. Ni ve diğ., parabolik düzeltmeli konikvari dişlilerin matematik modellenmesini ele almışlardır [17].

Uygulama olarak konikvari dişli çarkların çakışık eksenlerde temas analizleri sıkça incelenen bir konudur. Gaoxiang ve diğ. tarafından yapılan çalışmada, çakışık eksenlerde geometrik dizayn parametrelerinin ve

eksende sapmaların, temas elipslerine etkileri incelenmiştir [18]. Cao ve diğ., temas durumlarının iyileştirilmesi amacıyla ilgili geometrik parametreleri belirleyen bir optimizasyon modeli sunmuştur [19]. Taksimat konisi tasarımı çakışan eksenlerde çalışan dişli çiftleri için önemli bir husustur. Taksimat konisi tasarım teorisi, Zhu ve diğ. tarafından incelenerek, çakışan eksenlerde düşük shaft açılarında çalışma durumunda, aksel sapmaların etkileri analiz edilmiştir [20]. Taksimat konisi tasarım yaklaşımı Song ve diğ. tarafından da kullanılmış, tork, helis açısı ve aksel sapmaların çalışma şartlarına etkileri incelenmiştir [21].

Çakışan eksenlerin yanı sıra konikvari dişliler paralel eksenlerde de çalışabilmektedirler. Paralel eksenlerde çalışan konikvari dişlilerin, yük taşıma kapasitelerini hesaplayan metotlar Brecher ve diğ. tarafından sunulmuştur. Sunulan metotların doğrulanması amacıyla yorulma testleri yürütülmüştür [22]. Song ve diğ. paralel eksenlerde kavrama rijitliğini (mesh stiffness) potansiyel enerji metoduyla hesaplayan bir metot sunmuşlardır [23]. Sun ve diğ. tarafından yapılan çalışmada ise, konikvari dişliler için bir yüzey modelleme yöntemi sunulmuş ve geometrik dizayn parametrelerinin paralel eksenlerde temas durumlarına etkisi aksel sapma olan ve olmayan dişli çiftleri için test edilmiştir [24].

Konikvari evolvent dişliler uygulamada, yat şanzımanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu konuda Song ve diğ. tarafından yapılan çalışmada konikvari dişlilerin dinamik modeli oluşturulmuş ve gerçek çalışma şartlarına uygun bir test düzeneği kurulmuştur. Deneylemlerden elde edilen veriler teorik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır [25]. Zhu ve diğ. tarafından yapılmış çalışmada yat şanzımanlarında çalışan eksenlerde çalışma durumlarında konikvari dişlilerin temas analizleri yapılarak, temas hatalarına sebep olabilecek durumlar incelenmiş ve sonuçlar deneysel veriler ile doğrulanmıştır [26].

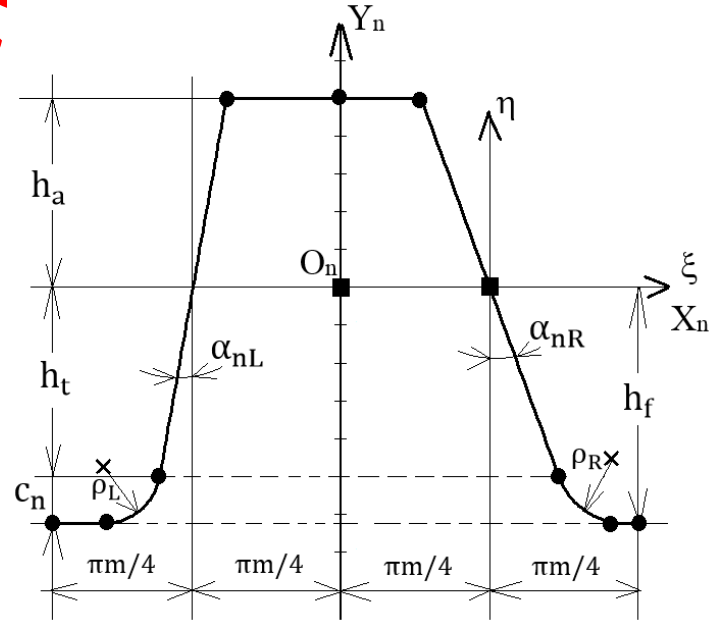
İçbükey ve dışbükey konikvari dişlilerin modellenmesi ve çalışma koşullarının simülasyonu sıkça araştırılan bir çalışma konusudur. İçbükey konikvari dişli çarkların matematik modeli, Liu ve Tsay tarafından verilmiş, temas analizleri yapılmıştır [27]. Komatsubara ve diğ. yat şanzımanlarında kullanılmak üzere içbükey konikvari dişlilerin modellemesini yapmışlardır [28]. Daha sonra, Liu ve diğ. tarafından içbükey konikvari dişlilerin çakışan eksenlerde getirme analizleri yapılmıştır [29, 30]. İçbükey ve dışbükey konikvari dişlilerin aykırı eksenlerde eksen kaçıklıkları olması durumunda analizleri Liu S. ve diğ. tarafından yapılmış bir araştırmadır [31].

Sunulan bu çalışmada literatürde mevcut alın dişli çarklar için geliştirilen bir matematik model, uygun

düzenlemelerle konikvari dişli çarklara genişletilmiştir. Düz ve helisel konikvari dişli için gerekli dönüşümler uygulanmıştır. Efektif evolvent parametresini veren ifade konikvari dişlide herhangi bir kesitte geçerli olacak şekilde genişletilmiştir. Geliştirilen matematik modelin doğruluk ve geçerliliği için literatürdeki konikvari dişli modeli ile karşılaştırılmıştır. Sayısal örnekler ile karşılaştırma yapılmış ve tolerans dahilindeki farklılıklar belirtilmiştir.

2. MATEMATİK MODEL (MATHEMATICAL MODEL)

Batista'nın çalışmasında normal kesitte kremayer takımın vektörel ifadesi yerel bir eksen takımı kullanılarak Eş. 1'de ifade edilmiştir [32]. Takım yüzeyinin ξ eğrisel parametresi evolvent bölgede $-h_a \cdot \tan\alpha_n \leq \xi \leq h_t \cdot \tan\alpha_n$, yuvarlatılmış uçta $-h_t \cdot \tan\alpha_n \leq \xi \leq \xi_0$ ve tavanda $\xi_0 \leq \xi \leq 0,25 \cdot m_n \cdot \pi$ aralıklarında değişmektedir. Şekil 2'de normal kesitte kremayer takım profili gösterilmektedir. $S(\xi, \eta, \zeta)$ yerel eksen takımı kremayer takımın taksimat hattının sağ profili kestiği noktada konumlandırılır. Burada avantaj konum vektörünün yatay bileşenin bütün bölgelerde sadece ξ parametresi ile ifade edilmesidir. Normal kesitte modül m_n , kavrama açısı α_n , baş yüksekliği h_a , baş derinliği h_t , taban derinliği h_f ve baş boşluğu c_n sembolleriyle gösterilmektedir. Takım uç yuvarlatma yarıçapı ρ sembolüyle gösterilir ve $\rho = c_n / (1 - \sin(\alpha_n))$ ifadesiyle hesaplanır.



Şekil 2. Kremayer takımın normal kesiti (The normal section of the rack cutter)

$$\eta = \begin{cases} -\frac{\xi}{\tan(\alpha_n)} & -h_a \cdot \tan\alpha_n \leq \xi \leq h_t \cdot \tan\alpha_n \\ \eta_0 - \sqrt{\rho^2 - (\xi_0 - \xi)^2} & h_t \cdot \tan\alpha_n \leq \xi \leq \xi_0 \\ -h_f & \xi_0 \leq \xi \leq \frac{\pi \cdot m_n}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Asimetrik diş profilini de dikkate alarak $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ global kartezyen koordinat sisteminde takımın konum vektörü aşağıdaki denklemlerde ifade edilebilir. Alt-üst indisler “R” ve “L” parametrenin veya konumun sağ veya sol profillere ait olduğunu gösterir. İmal edilen dişlinin evolvent yanaklarını şekillendiren bölgelerin yer vektörleri Eş. 2 ve Eş. 3’de verilmektedir.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} \xi_R + 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ -\xi_R / \tan(\alpha_{nR}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -\xi_L - 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ -\xi_L / \tan(\alpha_{nL}) \end{cases} \quad (3)$$

İmal edilen çarkın dış kökünü şekillendiren bölgelerin konum vektörleri Eş. 4 ve Eş. 5’de verilmektedir. (ξ_0, η_0) takımın yuvarlatılmış ucunun eğrilik merkezinin koordinatlarıdır.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} \xi_R + 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ \eta_{0R} - \sqrt{\rho_R^2 - (\xi_{0R} - \xi_R)^2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -\xi_L - 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ \eta_{0L} - \sqrt{\rho_L^2 - (\xi_{0L} - \xi_L)^2} \end{cases} \quad (5)$$

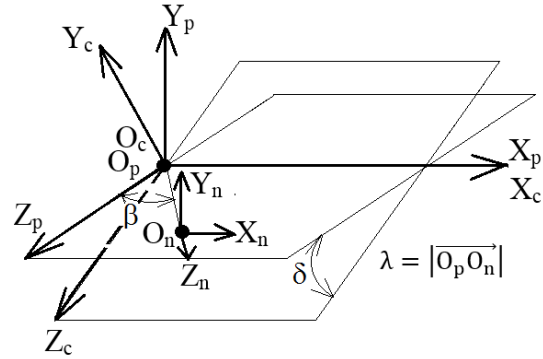
İmal edilen çarkın tabanını şekillendiren bölgelerin konum vektörleri Eş. 6 ve Eş. 7’de verilmektedir.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} \xi_R + 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ -h_f \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -\xi_L - 0,25 \cdot m_n \cdot \pi \\ -h_f \end{cases} \quad (7)$$

Konikvari dişliler, diş genişliği boyunca profil kaydırılmış alın dişli çarklardır. Böylece silindirik geometri konik geometriye dönüşmüş olur. Silindirik helisel dişli imalatında takımın normal kesiti vida hareketi (dönme+öteleme) yapmaktadır. İlave olarak takım taksimat doğrusu etrafında δ açısı kadar dönmekte böylece helisel konikvari dişli elde edilmektedir. Helis açısı sıfırda düz konikvari dişli elde edilir. Bu ardışık dönüşümler neticesinde takım ve taslak eksenleri aynı kesite konumlandırılır. Dönüşüm matrisleri seçilen koordinat sistemine göre tesis edilir. Uygulamada hesaplama kolaylığı açısından koordinat sistemleri sağ el kuralına uymaktadır. Gösterim kolaylığı açısından ise literatürde genelde sağ el kuralına uyan dönmüş eksen takımları kullanılır. Helisel geometriyi sağlayan dönüşüm matrisi Eş. 8’de verilmiştir. Konik şekillendirmeyi sağlayan dönüşüm matrisi Eş. 9’da verilmiştir. Bu dönüşümler normal kesite uygulanarak takımın konum vektörü Eş. 10’da ifade edilmiştir. Şekil 3’de koordinat dönüşümleri gösterilmiştir. Takımın

normal kesiti $X_p Z_p$ düzlemine bağlıdır. $X_c Z_c$ düzlemi taslağa teğettir.



Şekil 3. Koordinat sistemleri arasındaki ilişki (Relation among coordinate systems)

$$[M_{pn}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & \lambda \cdot \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & \lambda \cdot \cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[M_{cp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R_c = [M_{cp}][M_{pn}]R_n \quad (10)$$

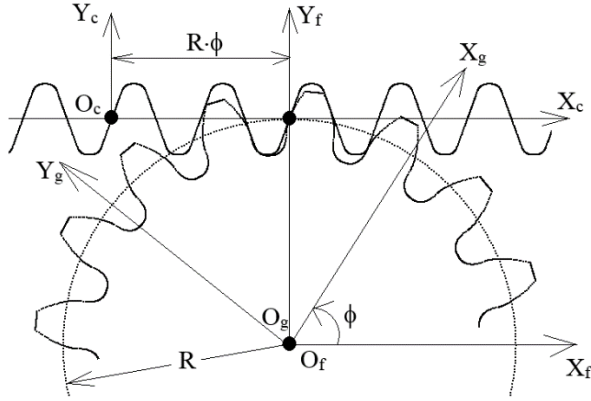
Açık formda takım yüzeyinin koordinatları aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} x_c &= x_n \cdot \cos(\beta) + \lambda \cdot \sin(\beta) \\ y_c &= -x_n \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\beta) + y_n \cdot \cos(\delta) + \lambda \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\beta) \\ z_c &= -x_n \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\beta) - y_n \cdot \sin(\delta) + \lambda \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\beta) \end{aligned} \quad (11)$$

Eş. 11’in üçüncü satırı $z_c = w$ için düzenlenirse $\lambda = (w + x_n \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\beta) + y_n \cdot \sin(\delta)) / (\cos(\delta) \cdot \cos(\beta))$ olarak hesaplanır ve ilk iki satırda yerine konulursa takım yüzeyinin dönme düzleminde (alın kesitte) matematik modeli elde edilir.

Yuvarlanma metodu ile imalatla kesici takım ile dişli taslağı senkronize hareket eder. Şekil 4’de koordinat sistemleri gösterilmektedir. $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ koordinat sistemi taslağa bağlıdır ve hareketsizdir. $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ dişli taslağa bağlı ve $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ takıma bağlı hareketli koordinat sistemleridir. Takım $R \cdot \emptyset$ kadar öteleme hareketi yaparken taslak \emptyset açısı kadar dönmektedir. Takım-Taslak koordinat bağı kullanılarak, takım yüzeyi

imal edilecek dişli çarkın koordinat sisteminde Eş. 12 ile ifade edilir. Bu denklemin Eş. 13’de gösterildiği üzere türevleri alınır ve sonuç düzenlenirse Eş. 14 elde edilir. Böylece \emptyset yuvarlanma parametresi ile ξ eğrisel parametre arasında bağ kurulur. Eş. 14, Eş. 12’de yerine konularak imal edilen dişli geometrisi elde edilir.



Şekil 4. Kesici takım ve üretilen dişli arasındaki koordinat ilişkisi (Coordinate relationship between the rack cutter and generated gear)

$$\begin{aligned} x_g &= (R + e + y_c) \cdot \sin(\emptyset) - (R \cdot \emptyset - x_c) \cdot \cos(\emptyset) \\ y_g &= (R + e + y_c) \cdot \cos(\emptyset) + (R \cdot \emptyset - x_c) \cdot \sin(\emptyset) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \emptyset} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \emptyset} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad (13)$$

$$\emptyset(\xi) = \frac{1}{R} \cdot \left[x_c + (e + y_c) \cdot \left(\frac{dy_c}{d\xi} \right) \right] \quad (14)$$

Bu ifadelerde helis açısı β , koni açısı δ , alın kesitte profil kaydırma miktarı e ve imal edilen dişli çarkın taksimat yarıçapı R sembolleriyle gösterilmektedir. Normal kesitte verilmesi gereken profil kaydırma miktarı $e_n = e \cdot \cos(\delta)$ dir [2].

3. KONİKVARİ DİŞLİLERDE ALTTAN KESMENİN ÖNLENMESİ (PREVENTING UNDERCUT IN BEVELOID GEARS)

Konikvari dişli çarklarda diş genişliği boyunca doğrusal olarak değişen profil kaydırma nedeniyle topuk tarafında sivri tepe parmak tarafında alttan kesme tehlikesi vardır. Bu nedenle çeşitli kesitlerde alt kesilme ve sivri tepe kontrol edilmelidir. Öncelikle $w=0$ kesitinde diş sayısına karşılık sınır için gerekli \pm profil kaydırma hesaplanır. Parmak tarafında $w \cdot \tan(\delta)$ negatif profil kaydırma olduğundan bu kesitte alttan kesmeden kurtulmak için gerekli toplam konvansiyonel profil kaydırma Eş. 15’de verilmiştir [33].

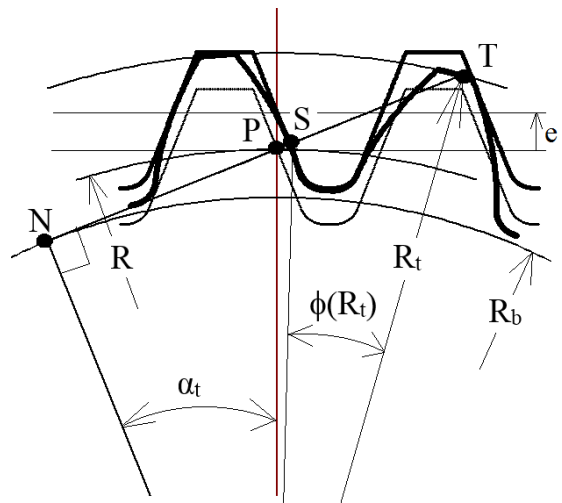
$$x_{uL,R} = -\frac{Z \cdot \sin^2(\alpha_{tL,R})}{2 \cdot \cos(\beta)} + \frac{h_a^*}{\cos(\delta)} + \frac{w \cdot \tan(\delta)}{m_n} \quad (15)$$

Düz konikvari dişli çarklarda alttan kesmenin önlenmesi konvansiyonel profil kaydırma ile gerçekleştirilir. Ancak helisel konikvari dişlilerde dönme düzleminde kesit

asimetrik olduğundan sağ ve sol alın kavrama açıları farklıdır. Kavrama açısının düşük olduğu tarafta belirgin alttan kesme görülür. Parmak tarafındaki kesitte alt kesilmeyi önlemek için gerekli toplam profil kaydırma faktörü topuk tarafında sivri tepeye yol açabilmektedir. Bu nedenle helisel konikvari dişlilerde alttan kesmeyi önlemek için asimetrik profilli takım tercih edilir. Takımın alttan kesilmeli yanağa karşılık gelen profili standart değerden yüksek normal kavrama açıdır.

4. DİŞBAŞI DAİRESİ-EVOLVENT PROFİL KESİŞME NOKTASININ ANALİTİK TAYİNİ (ANALYTICAL DETERMINATION OF TIP CIRCLE-INVOLUTE PROFILE INTERSECTION POINT)

Vektör metodu ile modellemeye dişli çarkın evolvent profili diş başı dairesini aşmaktadır. Bu durumda CAD ortamında uygun operasyonla fazla kısım giderilmektedir. Bununla birlikte bu problemin analitik çözümü bulunmaktadır. Takım-taslak kavrama doğrusu evolvent parametresinin sınırını belirlemede kullanılabilir [34]. Kavrama kıtasında yuvarlanma noktasından diş başında temas noktasında kadar kat edilen mesafeden evolvent parametresinin efektif sınırı tayin edilebilir. Bu makalede aynı iki nokta arasındaki açısal yer değiştirme kullanılmaktadır. Diş başı dairesine kadar taranan açı $\emptyset(R_t)$ alın kesitte kavrama açısı, profil kaydırma miktarı, temel taksimat ve diş başı daireleri cinsinden hesaplanabilir. Şekil 5’de profil kaydırmalı durum gösterilmiştir ve $\emptyset(R_t)$ açısı bu duruma uygun belirtilmiştir. $\overline{PS} = e \cdot \tan(\alpha_t) \cdot \cos(\alpha_t)$ dir. (14) ve (16) numaralı denklemlerden $\xi(R_t)$ efektif evolvent parametresi hesaplanır. Eş.18’de verilen $\Omega_{L,R}$ helisel konik izdüşüm faktörü olarak tanımlanabilir. Alın kesitte kavrama açısının hesaplanması Eş. 19’da verilmiştir. Üst işaret sol profil, alt işaret sağ profil içindir.



Şekil 5. Dönme düzleminde takım-taslak dişli kavrama doğrusu (Line of action of rack-gear mechanism at transverse section)

$$\phi(R_t) = -\tan(\alpha_{tL,R}) \cdot \left(1 + \frac{e}{R}\right) + \sqrt{\left(\frac{R_t}{R_{bL,R}}\right)^2 - 1}$$

(16)

$$\xi(R_t) = -0,5 \cdot m_n \cdot Z \cdot \sin^2(\alpha_{tL,R}) \cdot \phi(R_t) \cdot \Omega_{L,R} + 0,5 \cdot e \cdot \sin(2 \cdot \alpha_{tL,R}) \cdot \cos(\beta) \cdot \Omega_{L,R} + w \cdot \sin(\delta) \cdot \tan(\alpha_{nL,R})$$

(17)

$$\Omega_{L,R} = \frac{\tan(\alpha_{nL,R})}{\tan(\alpha_{nL,R}) \pm \sin(\beta) \cdot \tan(\delta)} = \frac{\tan(\alpha_{nL,R}) \cdot \cos(\delta)}{\tan(\alpha_{tL,R}) \cdot \cos(\beta)}$$

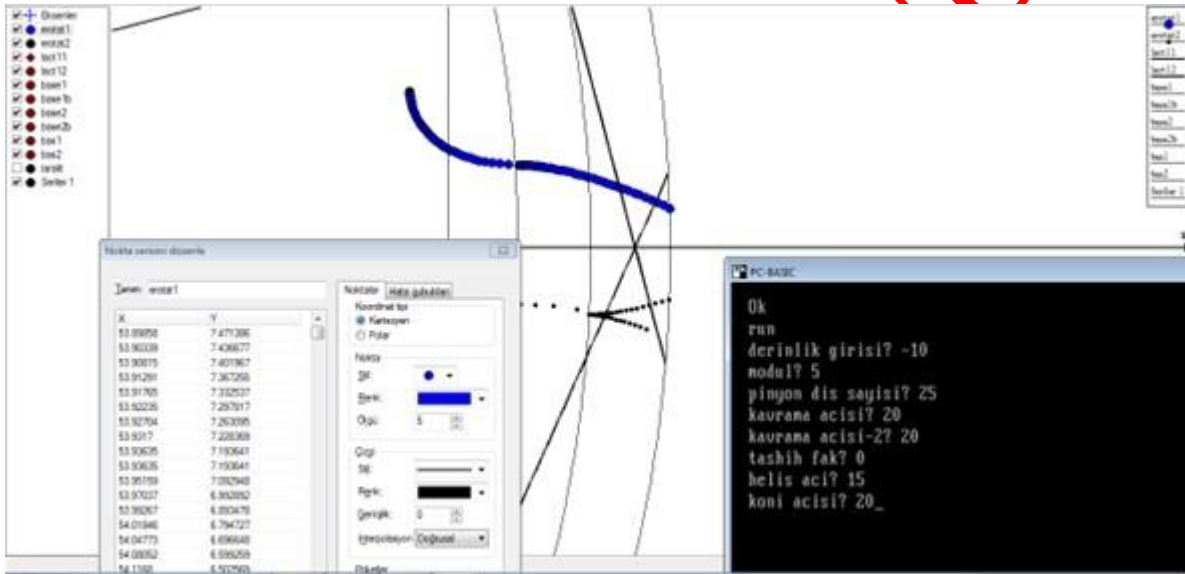
(18)

$$\tan(\alpha_{tL,R}) = \tan(\alpha_{nL,R}) \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\beta)} \pm \tan(\beta) \cdot \sin(\delta)$$

(19)

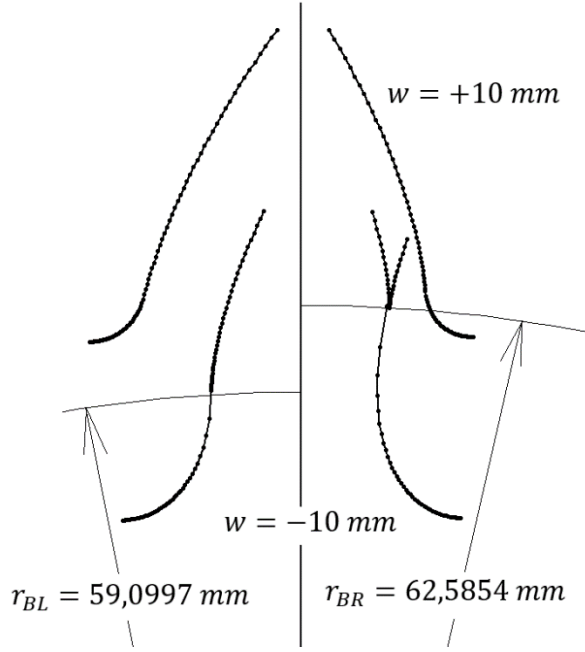
5. BULGULAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSIONS)

Sunulan matematik modelden hareketle Basic programlama dilinde PC-Basic editöründe bir program geliştirilmiş ve sonuçların görselleştirilmesi için Graph 4.4.2 fonksiyon grafik çizim programı kullanılmıştır. Geliştirilen program takım ve dişli çark koordinatlarını listelendiği veri dosyalarının yanı sıra görselleştirme için gerekli yardımcı çizgilerin koordinatlarını da oluşturmaktadır. Grafik çizim dosyaları bu veri dosyalarını değerlendirmektedir. Örnek bir çalışma ekranı Şekil 6'da verilmektedir. Çeşitli parametrelerle hazırlanmış tasarım örnekleri aşağıda verilmektedir.



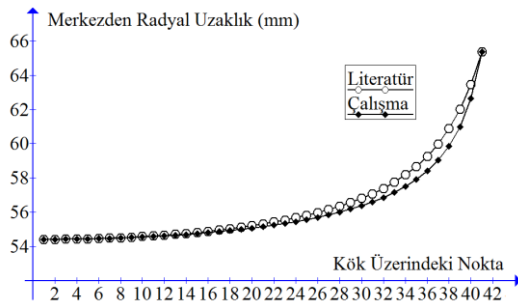
Şekil 6. Görsel malzemenin hazırlanması (Preparation of visual materials)

Şekil 7'de dönme düzleminde iki ayrı kesitte helisel konikvari dişli geometrinin değişimi gösterilmektedir. Tasarım parametreleri kavrama açısı $\alpha_{nL} = \alpha_{nR} = 20^\circ$, normal kesitte modül $m_n = 5$ mm, diş sayısı $Z = 25$, helis açısı $\beta = 15^\circ$ ve koni açısı $\delta = 20^\circ$ olarak alınmıştır [1]. Ayrı kesitte kavrama açıları $\alpha_{tR} = 14,705^\circ$ ve $\alpha_{tL} = 24,024^\circ$ olarak hesaplanır. Asimetrik profil söz konusudur. Burun tarafında ($w = -10$ mm) sağ profilde alttan kesme görülmektedir. Topuk tarafında ise ($w = +10$ mm) evolvent profilin tamamı temel dairesinin üzerindedir. Kesitlerdeki profiller karşılaştırma yapılan makalede olduğu gibi görsel amaçlı döndürülmüştür [1].



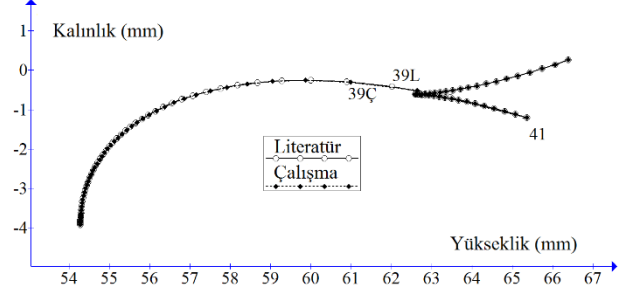
Şekil 7. Dönme düzleminde helisel konikvari dişli çark geometrisi (Helical beveloid gear in plane of rotation)

Geliştirilen model literatürdeki konikvari dişli modeline göre kök bölgesinde birebir örtüşmeyi sağlamamaktadır. Bununla birlikte sonuçlardaki sapma önemli bir hataya yol açmamaktadır. Karşılaştırma için kök bölgesinde noktaların dişli merkezine olan mesafeleri ele alınmıştır. Kök bölgesi her bir modelde 41 noktadan oluşturulmuştur. Şekil 8’de görüldüğü üzere başlangıçta modellere ait noktalar birebir örtüşmektedir. İlerleyen aşamada noktaların hemen hemen aynı kontur üzerinde merkeze olan uzaklıkları değişmektedir. Grafikte eğriler arasındaki açılma mesela 36. noktanın profil üzerindeki yerinin farklılığını ifade etmektedir. Bununla birlikte temel dairesinden dallanan evolventin bitim noktasında (aynı zamanda kök yörüngesinin bitim noktası) tekrar uyum sağlanmaktadır. Uyumsuzluk takımın dairesel uç denklemindeki farklılıklardan kaynaklanmaktadır. Eş. 4 ve Eş. 5 de ikinci satırdaki kök içindeki ifade nedeniyle tüm diş sayıları ve geometriler (evolvent düz, evolvent helisel, konikvari) için karşılaştırılan modelden farklılık gösterir. Bu farklılık alt kesilme durumunda daha belirginleşmektedir. Eş çalışma parametreleri başlangıç ve bitiş noktaları hariç farklıdır.



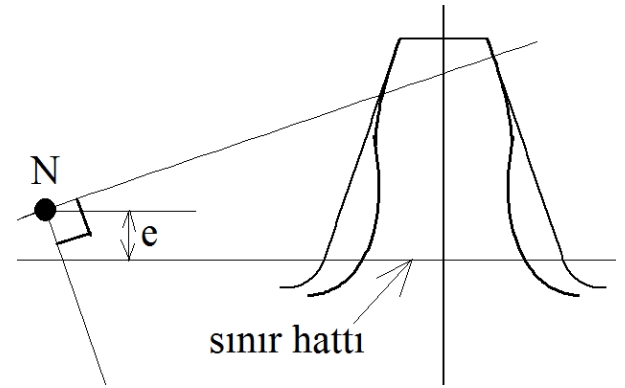
Şekil 8. Kök bölgesindeki noktaların radyüslerinin karşılaştırılması (Comparison of radii of points at root fillet curves)

Şekil 8 deki grafiğe ilave olarak modeller profil olarak da karşılaştırılmıştır. Geliştirilen model kök bölgesinde çok hafif bir sapma ile literatürdeki modeli takip etmektedir. Ancak Şekil 9’da görüldüğü üzere aynı numaralı noktaların konumları değişmektedir.

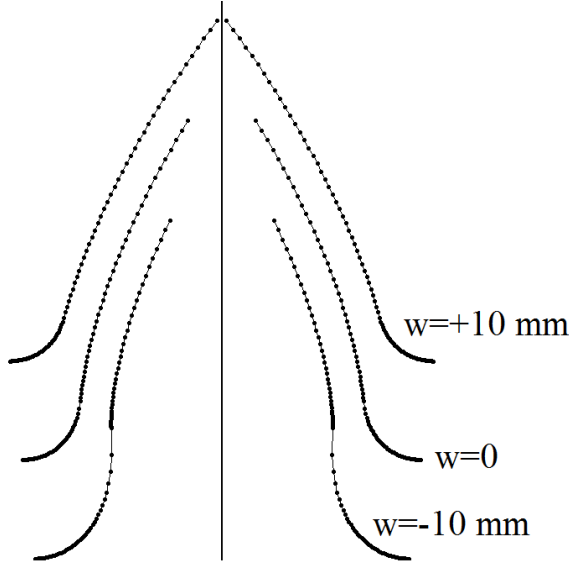


Şekil 9. Kök bölgesinde modellerin karşılaştırılması (Comparison of models at root fillet section)

Şekil 10’da dönme düzleminde düz konikvari dişli geometrisi gösterilmektedir. Tasarım parametreleri kavrama açısı $\alpha_{nL} = \alpha_{nR} = 20^\circ$, normal kesitte modül $m_n = 5$ mm, diş sayısı $Z = 25$ ve koni açısı $\delta = 20^\circ$ olarak alınmıştır [1]. Alın kesitte kavrama açıları $\alpha_{tL} = 18,88172^\circ$ ve $\alpha_{tR} = 18,88172^\circ$ olarak hesaplanır. Burun tarafında ($w = -10$ mm) alttan kesme görülmektedir. Kremayer takımın evolvent-yuvarlatılmış uç sınırından çizilen hat, kavrama doğrusunu girişim sınır noktasının altından kesmektedir. Aradaki fark verilmesi gereken en az profil kaydırma miktarını gösterir. Eş. 15’den alın kesitte verilmesi gereken profil kaydırma faktörü $x_u = -0,2449091 + 0,7279402 = 0,4830312$ olarak hesaplanır. Şekil 11’de profil kaydırma uygulanmış dişli çeşitli kesitlerde gösterilmiştir. Topuk tarafında profil sivri tepeye (zero topland) yaklaşmıştır.

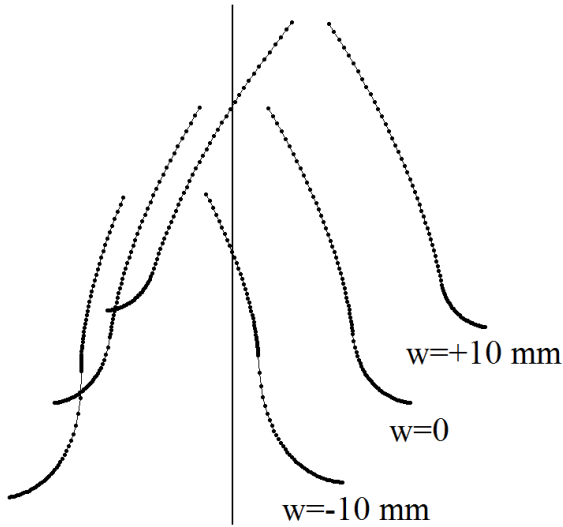


Şekil 10. Diş dibinden kesilmiş düz konikvari dişli geometrisi (Undercutting of straight beveloid gear)



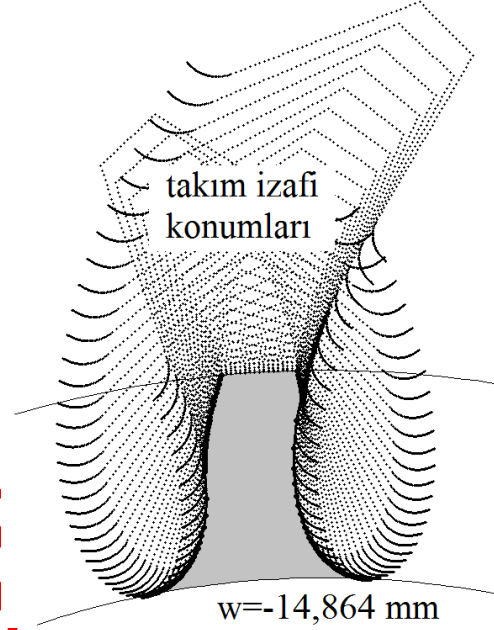
Şekil 11. Profil kaydırılmış düz konikvari dişli geometrisi (Straight beveloid gear with addendum modification)

Helisel konikvari dişli örneğinde ise Şekil 7'de görüldüğü üzere $w=-10$ mm kesitinde fazlasıyla alttan kesme oluşumu görülmektedir. Önlemek için Eş.15'de verilen ifade ile gerekli en az profil kaydırma miktarı bulunabilir. Ancak bu miktar topuk tarafına sivri tepeye yol açmakta ve profil dişbaşı dairesine ulaşmadan dış kalınlığı sıfır değeri almaktadır. Bu nedenle bu parametreler için profil kaydırma yerine asimetrik profilli takım tercih edilir. Tasarım parametreleri normal kesitte kavrama açıları $\alpha_{nL} = 20^\circ$ ve $\alpha_{nR} = 28^\circ$ alınmıştır. Alın kesitte kavrama açıları $\alpha_{tR} = 23,056^\circ$ ve $\alpha_{tL} = 24,024^\circ$ olarak hesaplanır. Şekil 12'de çeşitli kesitlerde asimetrik takımla imal edilmiş helisel konikvari dişli geometrisi gösterilmiştir. Tehlikeli kesitte alttan kesme önlenmiş ve topuk tarafında sivri tepe tehlikesi oluşmamıştır.



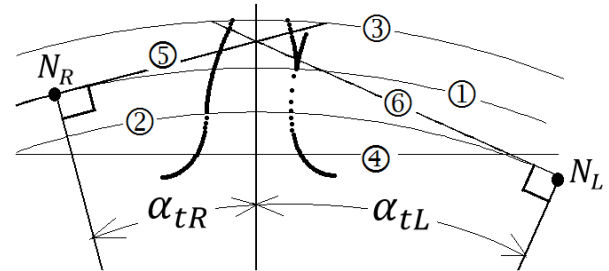
Şekil 12. Asimetrik profilli takımla imal edilen helisel konikvari dişli geometrisi (Helical beveloid gear cut by rack cutter with asymmetric profile)

Kesici takımın izafi konumları Şekil 13'de gösterilmektedir. Helisel konikvari dişli çark için Şekil 7'deki örnekteki aynı parametreler kullanılmış ve burun tarafında ($w = -14,864$ mm) için geometri elde edilmiştir. Sağ profilde alt kesilme belirgin olarak görülmektedir. Sol tarafta ise alt kesilme sınırına ulaşılmıştır. $w = -14,864$ mm değeri Eş.15'den hesaplanır.



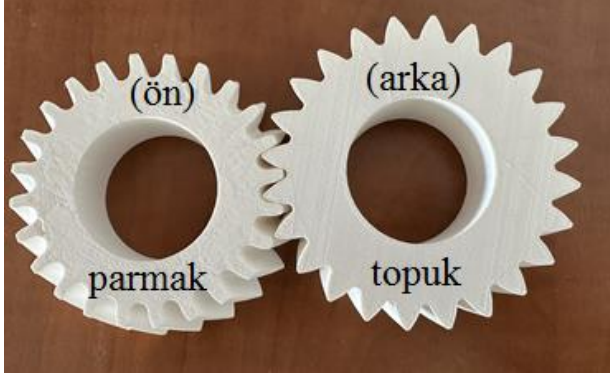
Şekil 13. Kesici takımın izafi konumları (Relative positions of the generating cutter)

Şekil 14'de imal edilen profiller ve kavrama doğruları gösterilmiştir. ① sağ profilin temel dairesini, ② sol profilin temel dairesini, ③ diş başı dairesini, ④ takım evolvent sınır hattını, ⑤ sağ profilin kavrama doğrularını ve ⑥ sol profilin kavrama doğrularını gösterir. Sınır hattı ⑤ numaralı kavrama doğrularını sınır noktasının gerisinden kesmektedir. Bu durumda alt kesilmeli imalat söz konusudur. ⑥ numaralı kavrama doğrularında sınır hattının kesim noktası sınır noktasının üzerindedir. Sol profilde alt kesilme tehlikesi yoktur. Böylece Eş. 15'i kullanmadan herhangi bir kesitte alt kesilme olup olmadığı tespit edilebilir. ⑤ ve ⑥ numaralı kavrama doğrularının diş başı dairesinde sonlanmasını sağlamak için Eş. 17'den hesaplanan efektif parametre kullanılmaktadır. Böylece evolvent profil beklenildiği gibi diş başı dairesinde sonlanmaktadır.



Şekil 14. Kavrama doğruları (Line of action of contacting profiles)

Ekllemeli imalat yöntemleri karmaşık geometrili parçaların kısa sürede düşük maliyetle imalatını sağlamaktadır [35, 36]. Bu çalışmada Eriyik Yığma Modelleme (FDM) yöntemi kullanılarak PLA plastiğinden helisel konikvari dişli çifti imal edilmiştir. Şekil 15’de $m_n = 3\text{mm}$, $z = 24$, $\alpha_{n1} = \alpha_{n2} = 20^\circ$, $\delta = 15^\circ$ ve $\beta = 15^\circ$ parametreleri ile imal edilmiş dişli çifti gösterilmektedir.



Şekil 15. Eriyik yığma modelleme ile imal edilmiş konikvari dişliler (Beveloid gears manufactured with FDM Method)

6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada literatürde mevcut alın dişli çark modelinden hareketle uygun düzenlemelerle helisel konikvari dişli çark matematik modeli elde edilmiştir. Yerel eksen takımında kurulan ve sadece tek bir alın kesitte geometriyi oluşturan mevcut modele, konikvari dişli çarka genişleten koordinat dönüşümleri uygulanmıştır. Böylece dişlilerin 3 boyutlu modeli elde edilebileceği gibi herhangi bir alın kesitte 2 boyutlu modeli de elde edilebilmektedir. Ayrıca evolvent profilin diş başı dairesini kestiği noktayı tayin eden analitik ifade bu çalışmada konikvari dişli çarka uyarlanarak geliştirilmiştir. Sunulan matematik modelin geçerliliği ve doğruluğu için literatürde mevcut konikvari dişli matematik modelleri ile karşılaştırma yapılmıştır. Geliştirilen model literatürdeki mevcut konikvari dişli modeli ile doğrulanmıştır. Diş dibi kavis bölgesinde denklem ve dönüşüm farklılığından kaynaklanan sapma kabul edilebilir tolerans dahilindedir. Ek A’da modellerin karşılaştırılması yapılmıştır. Konikvari dişlilerde genişlik boyunca lineer değişen profil kaydırma nedeniyle topuk tarafında sivri tepe ve burun tarafında alttan kesme tehlikesi vardır. Bu nedenle dengeli tasarımda koni açısına bağlı olarak genişlikler küçük tutulur. Düz konikvari dişlide alttan kesmeyi önlemek için konvansiyonel profil kaydırma uygulanır. Helisel konikvari dişli çarkta dönme düzleminde asimetric diş profili oluşmaktadır. Alın kavrama açısı düşük olan tarafta alttan kesme görülmektedir. Önlemek için takım asimetric profilli dizayn edilebilir. Alttan kesme tehlikesinin olduğu yanağın normal kavrama açısı standart değerden büyük alınır.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZAR KATKILARININ BEYANI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Yazarlar çalışmaya eşit oranda katkı sağlamıştır. / All authors have contributed equally.

ÇIKAR ÇATIŞMASININ BEYANI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur. / There is no conflict of interest in this study.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Liu, C.C. ve Tsay, C.B., "Tooth undercutting of beveloid gears", *J. Mech. Des.*, 123: 569-576, (2001).
- [2] Brauer, J., "Analytical geometry of straight conical involute gears", *Mechanism and Machine Theory*, 37: 127-141, (2002).
- [3] Brauer, J., "A general finite element model of involute gears", *Finite Elements in Analysis and Design*, 40: 1857-1872, (2004).
- [4] Brecher, C., Brumm, M. and Henser, J., "Calculation of the tooth root load carrying capacity of beveloid gears", *Gear Technology*, 31(4): 52-61, (2014).
- [5] Mitome, K. I., "Conical involute gear: part 1. design and production system", *Bulletin of JSME*, 26: 299-305, (1983).
- [6] Sun, R., Song, C., Zhu, C., Liu, S. and Wei, C., "Tooth surface modelling and mesh behaviors for paralleled beveloid gears", *Journal of Mechanical Design*, 142: (054501(1-13)), (2020).
- [7] Sun, R., Song, C., Zhu, C., Wang, Y. and Liu, K., "Numerical study on contact force of paralleled beveloid gears using minimum potential energy theory", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 56: 249-264, (2021).
- [8] Şentürk, B.G. and Fetvacı, M.C., "Modelling and undercutting analysis of beveloid gears", *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 35: 901-916, (2020).
- [9] Yazar, M. and Özdemir, A. "Eliptik düz dişlilerin bilgisayar destekli tasarımı ve CNC tel erozyon ile imalatı", *Politeknik Dergisi*, 13: 245-253, (2010).
- [10] Şentürk B.G., "Beveloid dişlilerin matematik modellenmesi ve dişli temas analizi", *Doktora tezi*, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, (2020).

- [11] Litvin, F.L. and Fuentes, A., "Gear Geometry and Applied Theory", *Cambridge University Press*, UK, (2004).
- [12] Chang, S. L., Tsay, C. B. and Wu, L. I., "Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters", *Mechanism and Machine Theory*, 31: 879-890, (1996).
- [13] Yang, S. C., "Mathematical model of a helical gear with asymmetric involute teeth and its analysis", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26: 448-456, (2005).
- [14] Rajesh, S., Marimuthu, P., Babu, P. D. and Venkatraman, R., "Balanced bending fatigue life for helical gear drives to enhance the power transmission capacity through novel rack cutters", *Engineering Failure Analysis*, 144: 106989, (2023).
- [15] Yang, H. C. and Pai, P. F., "Kinematic performance of a parabolic gear tooth with two parabolic coefficients", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231: 4431-4440, (2017).
- [16] Hsueh-Cheng, Y. and Huang, Z. W., "Using variable modulus to modify a rack cutter and generate a gear pair", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 236: 5342-5359, (2022).
- [17] Ni, G., Zhu, C., Song, C., Shi, J. and Liu, S., "Effects of rack-cutter parabolic modification on loaded contact characteristics for crossed beveloid gears with misalignments", *International Journal of Mechanical Sciences*, 141: 359-371, (2018).
- [18] Gaoxiang, N., Chaosheng, S., Zifan, F. and Zhang, Z., "Effects of geometric design parameters and misalignments on contact ellipse of crossed beveloid gears", *Mech. Mach. Theory*, 165: 104441, (2021).
- [19] Cao, B., Li, G., Tao, Y. and Ran, Q., "Robust geometric parameter optimization of a crossed beveloid gear pair with approximate line contact", *Mech. Mach. Theory*, 168: 104596, (2022).
- [20] Zhu, C., Song, C., Lim, T. C. and Peng, T., "Pitch cone design and influence of misalignments on tooth contact behaviors of crossed beveloid gears", *Mech. Mach. Theory*, 59: 48-64, (2013).
- [21] Song, C., Zhou, Y., Zhu, C., Ni, G. and Liu, S., "Loaded Tooth Contact Analysis Of Intersected Beveloid And Cylindrical Involute Gear Pair With Small Shaft Angle", *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing*, 12: 1-15, (2018).
- [22] Brecher, C., Brumm, M. and Henser, J. 'Validation Of The Tooth Root Load Carrying Capacity Calculation Of Beveloid Gears With Parallel Axes', *International Gear Conference 2014. Woodhead Publishing Limited*, (2014).
- [23] Song, C., Zhou, S., Zhu, C., Yang, X., Li, Z. and Sun, R., "Modeling and analysis of mesh stiffness for straight beveloid gear with parallel axes based on potential energy method", *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 12: JAMDSM0122, (2018).
- [24] Sun, R., Song, C., Zhu, C., Liu, S. and Wei, C., "Tooth surface modelling and mesh behaviors for paralleled beveloid gears", *Journal of Mechanical Design*, 142: 054501, (2020).
- [25] Song, C., Zhu, C., Liu, H. and Ni, G., "Dynamic analysis and experimental study of a marine gearbox with crossed beveloid gears", *Mechanism and Machine Theory*, 92: 17-28, (2015).
- [26] Zhu, C., Liu, L., Song, C., Xiang, Y. and Liu, H., "Pitch cone design and tooth contact analysis of intersected beveloid gears for marine transmission", *Mechanism and Machine Theory*, 82: 141-153, (2014).
- [27] Liu, C.-C. and Tsay, C.-B., "Mathematical models and contact simulations of concave beveloid gears", *Journal of Mechanical Design*, 124: 753-760, (2002).
- [28] Komatsubara, H., Mitome, K. I. and Ohmachi, T., "Development of concave conical gear used for marine transmissions (1st report, principle of generating helical concave conical gear)", *JSME Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 45: 371-377, (2002).
- [29] Liu, C. C., Chen, Y. C. and Peng, Y. L., "Contact pattern simulation and stress analysis of intersected concave conical involute gear pairs generated by shaper cutters", *14th IFTOMM World Congress*, Taiwan, 259-264, (2015).
- [30] Liu, C. C., Chen, Y. C. and Lin, S. H., "Contact stress analysis of straight concave conical involute gear pairs with small intersected angles", *International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, Hong Kong, 3: 17-19, (2010).
- [31] Liu, S., Song, C., Zhu, C., Ni, G. and Ullah, N., "Concave and convex modifications analysis for skewed beveloid gears considering misalignments", *Mechanism and Machine Theory*, 133: 127-149, (2019).
- [32] Batista, M., "Analytical treatment of the geometry of involute gears", 10.13140/RG.2.2.31057.66404, (2021).
- [33] Roth, K., "Zahnradtechnik Evolventen-Sondervverzahnungen zur Getriebeverbesserung: Evoloid-, Komplement-, Keilschräg-, Konische-, Konus-, Kronenrad-, Torus-, Wälzkolbenverzahnungen, Zahnrad-Erzeugungsverfahren", 3: Springer-Verlag, Berlin, (2013).
- [34] Fetvacı, M., "Profil kaydırmalı silindirik evolvent dişli çarkların matematik modellenmesi", *Politeknik Dergisi*, 23: 1339-1346, (2020).
- [35] Karakoç, B., Uzun G. "Ergiyik Yığılma Modelleme Yöntemi ile Üretilen Numunelerde Örne

Yönteminin ve Baskı Yönünün Mukavemete Olan Etkisi", *Politeknik Dergisi*, DOI: 10.2339/politeknik.1262855

- [36] Günay, M., Gündüz, S., Yılmaz, H., Yaşar, N. ve Kaçar, R., "PLA esaslı numunelerde çekme dayanımı için 3D baskı işlem parametrelerinin optimizasyonu", *Politeknik Dergisi*, 23: 73-79. (2020).

EK A Matematik Modellerin Karşılaştırılması (Appendix A Comparison of Mathematical Models)

Şekil 1'de kremayer geometrisi esas alınarak Liu'nun çalışmasında kremayer takımın normal—kesiti için sunulan denklemler aşağıdadır.

İmal edilen dişlinin evolvent yanaklarını şekillendiren bölgelerin yer vektörleri Eş. A1 ve Eş. A2'de verilmektedir. Bu bölgelerde eğrisel parametre $-h_t/\cos(\alpha_{nR}) \leq \xi_R \leq h_a/\cos(\alpha_{nR})$ ve $-h_t/\cos(\alpha_{nL}) \leq \xi_L \leq h_a/\cos(\alpha_{nL})$ aralıklarında değişmektedir.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} 0,25 \cdot m_n \cdot \pi - \xi_R \cdot \sin(\alpha_{nR}) \\ \xi_R \cdot \cos(\alpha_{nR}) \end{cases} \quad (A1)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -0,25 \cdot m_n \cdot \pi + \xi_L \cdot \sin(\alpha_{nL}) \\ \xi_L \cdot \cos(\alpha_{nL}) \end{cases} \quad (A2)$$

İmal edilen çarkın dış kökünü şekillendiren bölgelerin yer vektörleri Eş. A3 ve Eş. A4'de verilmektedir. Bu bölgelerde eğrisel parametre $0 \leq \xi_R \leq 90^\circ - \alpha_{nR}$ ve $0 \leq \xi_L \leq 90^\circ - \alpha_{nL}$ aralıklarında değişmektedir.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} 0,25 \cdot m_n \cdot \pi + h_t \cdot \tan(\alpha_{nR}) + \rho_R \cdot \cos(\alpha_{nR}) - \rho_R \cdot \sin(\xi_R) \\ -h_t + \rho_R \cdot \sin(\alpha_{nR}) - \rho_R \cdot \cos(\xi_R) \end{cases} \quad (A3)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -0,25 \cdot m_n \cdot \pi - h_t \cdot \tan(\alpha_{nL}) - \rho_L \cdot \cos(\alpha_{nL}) + \rho_L \cdot \sin(\xi_L) \\ -h_t + \rho_L \cdot \sin(\alpha_{nL}) - \rho_L \cdot \cos(\xi_L) \end{cases} \quad (A4)$$

İmal edilen çarkın tabanını şekillendiren bölgelerin yer vektörleri Eş. A5 ve Eş. A6'da verilmektedir. Bu bölgelerde eğrisel parametre $0 \leq \xi_R \leq 0,25 \cdot m_n \cdot \pi - h_t \cdot \tan(\alpha_{nR}) - \rho_R \cdot \cos(\alpha_{nR})$ ve $0 \leq \xi_L \leq 0,25 \cdot m_n \cdot \pi - h_t \cdot \tan(\alpha_{nL}) - \rho_L \cdot \cos(\alpha_{nL})$ aralıklarında değişmektedir.

$$\begin{cases} x_n^R \\ y_n^R \end{cases} = \begin{cases} 0,5 \cdot m_n \cdot \pi - \xi_R \\ -h_t + \rho_R \cdot \sin(\alpha_{nR}) - \rho_R \end{cases} \quad (A5)$$

$$\begin{cases} x_n^L \\ y_n^L \end{cases} = \begin{cases} -0,5 \cdot m_n \cdot \pi + \xi_L \\ -h_t + \rho_L \cdot \sin(\alpha_{nL}) - \rho_L \end{cases} \quad (A6)$$

Denklemler incelendiğinde modellerde evolvent ve taban bölgelerin birebir örtüştüğü görülmektedir. Kök

bölgelerinde ise farklılık vardır. Takım ucu eğrilik merkezi koordinatları sağ profil için $\xi_{OR} = h_t \cdot \tan(\alpha_{nR}) + \rho_R \cdot \cos(\alpha_{nR})$ ve $\eta_{OR} = -h_t + \rho_R \cdot \sin(\alpha_{nR})$ olarak hesaplanır. Eş. A3'de verilen parametrik ifade $0 \leq \xi_R \leq 90^\circ - \alpha_{nR}$ aralığında ve 2. Bölüm Eş. 4'de verilen parametrik ifade $h_t \cdot \tan(\alpha_{nR}) \leq \xi_R \leq \xi_{OR}$ aralığında değişmektedir. Parametrelerin sadece alt-üst limit değerleri için birebir örtüşme vardır ara değerler için hesaplanan değerler kabul edilebilir sınırlarda farklılık arz eder. Bunun nedeninin $\sqrt{\rho_R^2 - (\xi_{OR} - \xi_R)^2}$ teriminden kaynaklandığı kanaatine varılmıştır. Bu terimde parametrenin lineer olmayan bir fonksiyonu söz konusudur.

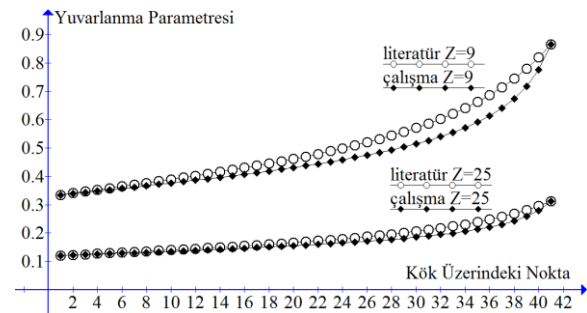
Karşılaştırma için alt kesilmeli ve alt kesilmez düz dişli çark örneği kullanılmaktadır. Tasarım parametreleri kavrama açısı $\alpha_{nL} = \alpha_{nR} = 20^\circ$ ve modül $m_n = 1$ mm alınmıştır. Diş sayıları $Z = 9$ ve $Z = 25$ alınarak modellerde yuvarlanma parametreleri hesaplanmıştır. Yuvarlanma parametresinin hesabı için bu çalışmada sunulan modelde [31] Eş. 14'de verilen ifade kullanılmaktadır. Denklemler yerlerine yazılarak düz dişlide sağ kök bölgesi için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\phi(\xi_R) = \frac{1}{R} \left[(\xi_R + 0,25 \cdot m_n \cdot \pi) + (\eta_{OR} - \sqrt{\rho_R^2 - (\xi_{OR} - \xi_R)^2}) \cdot \left(\frac{-\xi_{OR} - \xi_R}{\sqrt{\rho_R^2 - (\xi_{OR} - \xi_R)^2}} \right) \right] \quad (A7)$$

Benzer şekilde karşılaştırma yapılan model [1] için de Eş.13 kullanılabilir. Bununla birlikte genelde takım yer vektörünün doğrultman kosinüsleri ve taksimat noktasının yeri kullanılarak yuvarlanma parametresi hesaplanır. Sonuç olarak kök bölgesinin yuvarlanma parametresi Eş. A8 ile hesaplanır. Eş. A3'de verilen bileşenler kullanılır.

$$\phi(\xi_R) = \frac{1}{R} \cdot [(x_n^R) - (y_n^R) \cdot (\tan \xi_R)] \quad (A8)$$

Şekil A1'de kök bölgesinde yuvarlanma parametresinin değişimi gösterilmiştir. Başlangıç ve bitim noktasında tam uyum söz konusudur. Ancak ara noktalarda değerler farklılaşmaktadır. Bitim noktasına (evolvent tarafı) yaklaşırken belirgin bir farklılık görülmektedir. Bu farklılık şekilde görüldüğü üzere küçük diş sayılarında artmaktadır. Böylelikle gerçek alt kesilme noktası modellerde farklıdır.



Şekil A1. Yuvarlanma parametrelerinin karşılaştırılması (Comparison of rolling parameters)