

Atf İçin: Çakal, M. ve Bacak-Turan, G. (2024). Bazı Transformasyon Çizgelerin Gutman İndeksinin Hesaplanması. *İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 14(2), 865-878.

To Cite: Çakal, M & Bacak-Turan, G. (2024). Computation of Gutman index of some Transformation Graphs. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 14(2), 865-878.

Bazı Transformasyon Çizgelerin Gutman İndeksinin Hesaplanması

Merve ÇAKAL¹, Gökşen BACAĞ-TURAN^{2*}

Öne Çıkanlar:

- Matematiksel kimya
- Derece tabanlı topolojik indeksler
- Uzaklık tabanlı topolojik indeksler

Anahtar Kelimeler:

- Çizge teorisi
- Transformasyon Çizge
- Topolojik indeks
- Gutman indeksi

ÖZET:

Çizge teorisi günümüzde birçok alanda kullanılmaktadır. Bu alanlardan biri de matematiksel kimyadır. Bu alanda birçok topolojik indeks çalışılmıştır. Topolojik indeks, bir moleküler çizgenin topolojisini tanımlamak ve bunu ilgilenilen çeşitli özelliklerle ilişkilendirmek için kullanılır. Bu topolojik indekslerin en yaygın kullanılanları derece ve uzaklık tabanlı indekslerdir. Bu makalede kimyada önemli bir yere sahip olan Gutman indeksi incelenmiştir. Gutman indeksi hem derece hem de uzaklığın aynı anda kullanıldığı, literatürde kapsamlı olarak çalışılmış iyi bilinen bir topolojik indekstir ve kimya, fizik ve diğer alanlarda birçok uygulaması vardır. Transformasyon çizgeler ise kimya, bilgisayar bilimleri ve fizik gibi alanlarda moleküler yapıları, fiziksel ağları ve algoritmaları modellemek için kullanılabilen çizgelerdir. Bu çizgeler, bir çizgenin farklı transformasyonlar altındaki özelliklerinin incelenmesini sağladıklarından önemlidir. Orijinal çizgenin simetrisi, bağlantılılığı ve diğer yapısal özellikleri, bu transformasyonlar yoluyla ortaya çıkarılabilir. Bu makalede, bazı transformasyon çizgelerin Gutman indeksi bu çizgelerin özelliklerini incelemek için kullanılacak yeni bir topolojik indeks sağlamak amacıyla çalışılmış ve genel formüller elde edilmiştir.

Computation of Gutman index of Some Transformation Graphs

ABSTRACT:

Graph theory is widely used today in many fields, including mathematical chemistry. In this area, numerous topological indices have been studied. Topological indices are used to define the topology of a molecular graph and relate it to various relevant properties. The most commonly used topological indices are degree-based and distance-based indices. This article examines the Gutman index, which holds great significance in chemistry. The Gutman index is a well-known topological index that simultaneously uses both degree and distance. These graphs are important because they enable the study of the properties of a graph under different transformations. It has been extensively studied in the literature and finds numerous applications in chemistry, physics, and other fields. Transformation graphs are graphs that are used to model molecular structures, physical networks, and algorithms in fields such as chemistry, computer science and physics. Original graph's symmetry, connectivity and other structural features can be revealed through these transformations. This article focuses on studying the Gutman index of some transformation graphs to provide a new topological index that can be used to examine their properties, and general formulas have been obtained.

Highlights:

- Mathematical chemistry
- Degree based topological indices
- Distance based topological indices

Keywords:

- Graph theory
- Transformation Graphs
- Topological index
- Gutman index

¹ Merve ÇAKAL ([Orcid ID: 0000-0001-8075-0810](https://orcid.org/0000-0001-8075-0810)), Manisa Bahçeşehir Koleji, Manisa, Türkiye

² Gökşen BACAĞ-TURAN ([Orcid ID: 0000-0001-6935-4841](https://orcid.org/0000-0001-6935-4841)), Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Gökşen BACAĞ-TURAN, e-mail: goksen.turan@cbu.edu.tr

Bu çalışma Merve Çakal'ın Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir..

GİRİŞ

Bu makalede, sadece basit ve sonlu bağlantılı çizgeler ele alınmış, kullanılan ancak burada tanımlanmayan notasyonlar ve terminolojiler için Chartrand ve Lesniak'ın kitabı kullanılmıştır (Chartrand ve Lesniak, 1996). Çizge teorisi günümüzde birçok alanda kullanılır. Bunlara örnek olarak bilgisayar, matematik, biyoloji, fizik ve kimya gösterilebilir. Örneğin kimya dalında moleküler çizge adını sıklıkla duyarız. Bu çizge, moleküllerdeki atomları ve kimyasal bağları temsil eder. Karbon atomlarını moleküler çizgedeki tepeler gösterirken, karbon-karbon bağlarını o çizgedeki ayrıtlar gösterir. Kimyasal bileşiklerin fizikokimyasal özelliklerini tahmin etmek teorik kimyada zorlayıcı bir problem olarak kabul edilir. Moleküler yapıları fizikokimyasal özellikleriyle ilişkilendirmek için birçok öngörü yöntemi geliştirilmiştir ve geliştirilmektedir. Kimyasal çizge teorisinde bu tür yöntemlerin en önemlilerinden biri genellikle topolojik indeks olarak adlandırılır. Bir topolojik indeks, bir kimyasal yapının çeşitli fiziksel özellikleri, kimyasal reaktivite veya biyolojik aktivite ile nasıl ilişkili olduğunu gösteren sayısal bir değerdir. Topolojik indeksler, bir moleküler çizgenin topolojisini tanımlamak ve bunu ilgilenilen çeşitli özelliklerle ilişkilendirmek için kullanılır.

Bugüne kadar tanımlanmış ve üzerinde çalışılmış birçok farklı topolojik indeks bulunmaktadır (Asir ve Rabikka, 2022; Gursoy ve ark., 2022; Kırçalı Gürsoy, 2021; Singh ve Bhat, 2021). Bunlar arasında, uzaklık tabanlı ve derece tabanlı indeksler kimya biliminde önemli bir rol oynamaktadır. Uzaklığa bağlı olan topolojik indekslere Wiener indeks (Klavzar ve Gutman, 1997), Harary indeks (Plavsic ve ark., 1993) ve çarpımsal ağırlıklı Harary indeks (Alizadeh ve ark., 2013) örnek olarak gösterilebilir. Dereceye bağlı topolojik indekslere ise Zagreb indeksi (Gutman ve Das, 2004), Randic indeks (Randic, 1975), Harmonik indeks (Fajtlowicz, 1987), Geometrik-Aritmetik indeks (Vukicevic ve Furtula, 2009), atom bağı bağlantı indeksi (Furtula ve ark., 2009), Narumi-Katayama indeksi (Narumi ve Katayama, 1984) ve çarpımsal Zagreb indeksleri (Todeschini ve Consonni, 2010) örnek verilebilir.

Wiener indeks bir çizgedeki tüm tepe çiftleri arasındaki uzaklıklar toplamı olarak tanımlanmıştır (Wiener, 1947). Wiener indeksi üzerinde en çok çalışılan topolojik indekslerden biridir. Bu sebeple de çizge teorisinde çok önemli bir yere sahiptir (Klavzar ve Gutman, 1997; Wu, 2010). Wiener indeksin çizge teorisindeki kullanımı açısından çok yakından ilişkili olduğu bir diğer indeks olan Gutman indeksi de çizge teorisinde önemli bir yer tutmaktadır ve bu sebeple birçok çalışmaya konu olmuştur (Gutman, 1994; Andova ve ark., 2012; Gutman, 2013; Jamil, 2017). Gutman indeksi, bir çizgedeki tüm tepe çiftleri arasındaki uzaklık ve bu tepe çiftlerinin dereceleri kullanılarak hesaplanır. Bu sebeple Gutman indeksinin hem derece hem de uzaklığa bağlı bir topolojik indeks olduğunu söyleyebiliriz. Kaynama noktası, yoğunluk, yüzey gerilimi, kritik basınç, kritik hacim, ısı kapasitesi ve birçok maddenin buharlaşma ısısı dahil olmak üzere bir dizi fiziksel ve fizikokimyasal özellik ile başarılı korelasyonu, onu önemli bir indeks haline getirmektedir (Wardecki ve ark., 2023).

Transformasyon çizge, bir çizgenin tepeler ve ayrıtlar ile arasındaki bitişiklik ilişkisini ele alır. Bunu yaparken iki tepe arasındaki ilişkiyi, iki ayrıt arasındaki ilişkiyi ve bir tepe ile bir ayrıt arasındaki ilişkiyi kullanır. Bir çizgenin transformasyonu alındığında artık eski formunu kaybeder ve yeni bir çizge yapısı oluşur. Kodlanmış çizgeden verilen çizgeyi polinom zamanda çözmek mümkünse, böyle bir süreç orijinal çizgenin çeşitli yapısal özelliklerini transformasyon çizgeleri açısından analiz etmek için kullanılabilir (Wu and Meng, 2001). Bu yönüyle transformasyon çizgeleri birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve birçok çalışmaya konu olmuştur (Bacak-Turan ve Kırılancık, 2013; Eskiizmirli, 2016; Bacak-Turan and Öz, 2017; Aslan ve Açıkan, 2019; Roshini ve ark., 2020). Bu nedenle, bu

makalenin motivasyonu bazı özel çizgelerin transformasyon çizgeleri üzerinde Gutman indeksini incelemektir.

MATERYAL VE METOT

1994 yılında Gutman tarafından tanımlanan değiştirilmiş Schultz indeksi günümüzde Gutman indeksi olarak bilinmektedir.

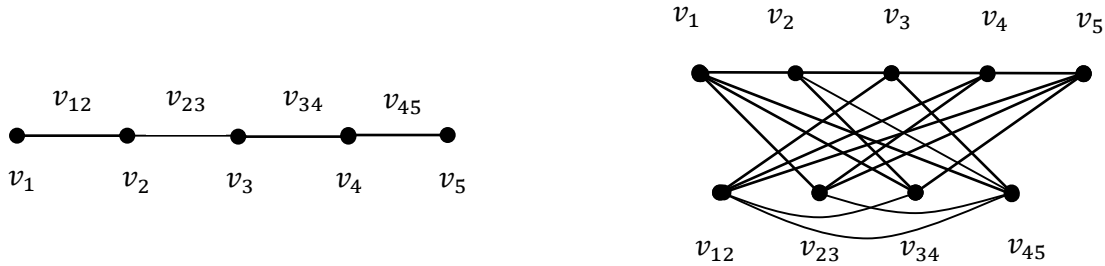
Tanım 1. $u, v \in V(G)$, $\deg(u)$ ve $\deg(v)$, u ve v tepelerinin dereceleri, $d(u, v)$ ise u ve v tepeleri arasındaki uzaklık olmak üzere Gutman indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanır (Gutman, 1994).

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \deg(u) \cdot \deg(v) \cdot d(u, v)$$

Tanım 2. $G = (V(G), E(G))$ bir çizge; x, y ve z ise $+$ veya $-$ değerlerini alabilen değişkenler olsun. Bu durumda G^{xyz} çizgesine G çizgesinin transformasyon çizgesi denir. $a, b \in V(G) \cup E(G)$ olmak üzere:

- $a, b \in V(G)$ ve $x = +$ ise a ve b G çizgesinde bitişik; $x = -$ ise bitişik değildir.
- $a, b \in E(G)$ ve $y = +$ ise a ve b G çizgesinde bitişik; $y = -$ ise bitişik değildir.
- $a \in V(G)$, $b \in E(G)$ ve $z = +$ ise a ve b G çizgesinde ilişkili; $z = -$ ise ilişkili değildir (Wu and Meng, 2001).

Bir G çizgesinin transformasyon çizgesindeki x, y, z değerlerinin alabileceği işaretlere göre permütasyon hesabı yapılırsa, bu çizgenin transformasyon çizgesinin 8 farklı şekilde oluşturulabileceğini söyleyebiliriz. Yani bir G çizgesinin transformasyon çizgeleri G^{+++} , G^{++-} , G^{+-} , G^{+--} , G^{---} , G^{--+} , G^{-++} , G^{-+-} şeklinde oluşturulabilir. P_5 çizgesi ve P_5 çizgesinin P_5^{+--} transformasyon çizgesi örnek olarak Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. P_5 çizgesi ve P_5^{+--} Transformasyon Çizgesi

Önerme 1. G , n tepesi ve m ayrıtı olan bir çizge ve G^{xyz} de G çizgesinin transformasyon çizgesi olsun. $u \in V(G)$ ve $e \in E(G)$ olmak üzere G^{xyz} transformasyon çizgesindeki tepelerin dereceleri aşağıdaki şekildedir (Roshini ve ark., 2020):

- $\deg_{G^{+++}}(u) = 2\deg_G(u)$ ve $\deg_{G^{+++}}(e) = \deg_G(u) + \deg_G(v)$.
- $\deg_{G^{++-}}(u) = m$ ve $\deg_{G^{++-}}(e) = \deg_G(u) + \deg_G(v) + n - 4$.
- $\deg_{G^{+-}}(u) = 2\deg_G(u)$ ve $\deg_{G^{+-}}(e) = m - \deg_G(u) - \deg_G(v) + 3$.
- $\deg_{G^{+--}}(u) = n - 1$ ve $\deg_{G^{+--}}(e) = \deg_G(u) + \deg_G(v)$.
- $\deg_{G^{---}}(u) = n + m - 2\deg_G(u) - 1$ ve $\deg_{G^{---}}(e) = n + m - \deg_G(u) - \deg_G(v) - 1$.
- $\deg_{G^{--+}}(u) = n - 1$ ve $\deg_{G^{--+}}(e) = m - \deg_G(u) - \deg_G(v) + 3$.
- $\deg_{G^{-++}}(u) = n + m - 1 - 2\deg_G(u)$ ve $\deg_{G^{-++}}(e) = n + \deg_G(u) + \deg_G(v) - 4$.
- $\deg_{G^{-+-}}(u) = m$ ve $\deg_{G^{-+-}}(e) = m + n - \deg_G(u) - \deg_G(v) - 1$.

Teorem 1. G bağlantılı bir çizge olmak üzere elde edilen transformasyon çizgenin çapı ile ilgili sınırlar aşağıda verilmiştir (Basavanagoud ve ark., 2011).

- a) $diam(G^{+++}) \leq diam(G)$,
- b) $diam(G^{+-+}) \leq 4$,
- c) $diam(G^{--+}) \leq 3$,
- d) x, y, z + veya – değerlerini alabilen üç değişken olmak üzere $diam(G^{xyz}) \leq 4$.

Lemma 1. G çizgesi yıldız çizgeye izomorf olmayan bağlantılı bir çizge olmak üzere $diam(G^{+-+}) \leq 3$ olacaktır (Wu and Meng, 2001).

Lemma 2. G çizgesi K_2 çizgesine izomorf olmayan bağlantılı bir çizge olmak üzere $diam(G^{--+}) \leq 4$ olacaktır (Wu and Meng, 2001).

Lemma 3. Bağlantılı bir G çizgesi bir yıldız çizgeye ya da üçgen çizgeye izomorf olmadığı sürece $diam(G^{---}) \leq 3$ olacaktır (Wu and Meng, 2001).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde yol çizgenin, çevre çizgenin ve yıldız çizgenin bazı transformasyon çizgelerindeki Gutman indeksi incelenmiş ve çizgelerin tepe sayısı üzerinden genel formüller elde edilmiştir.

Yol Çizgenin Transformasyon Çizgelerinin Gutman İndeksi

Bu bölümde P_n^{+--} , P_n^{+-+} , P_n^{--+} ve P_n^{-+-} transformasyon çizgelerinin Gutman indeksleri elde edilmiştir.

Teorem 2. P_n , $n \geq 5$ olan n tepeli bir yol çizge olmak üzere; P_n^{+--} transformasyon çizgesinin Gutman indeksi aşağıdaki gibidir:

$$Gut(P_n^{+--}) = 5n^4 - 24n^3 + 32n^2 + 10n - 38$$

İspat: P_n^{+--} çizgesinin tepe sayısı $n \geq 5$ olmak üzere $|V(P_n^{+--})| = 2n - 1$ dir. $V(P_n^{+--})$ tepeler kümesi aşağıdaki şekilde iki kümeye parçalansın:

$$V_1 = \{u_i \in V(P_n) : 1 \leq i \leq n \text{ ve } deg(u_i) = n - 1\}$$

$$V_2 = \{u_i u_{i+1} \in E(P_n) : 2 \leq i \leq n - 2, deg(u_i, u_{i+1}) = 2n - 6, deg(u_1 u_2) = deg(u_{n-1} u_n) = 2n - 5\}$$

Açıkça görülür ki $V(P_n^{+--}) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. Bu durumda:

$$\text{Durum i) } \forall v_i, v_j \in V_1 \text{ ve } i < j \text{ için } d(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

$j = i + 1$ ise iki tepe P_n çizgesinde bitişiktir ve tanım gereği P_n^{+--} transformasyon çizgesinde uzaklıkları 1 olur. Diğer durumda ise iki tepe P_n çizgesinde bitişik değildir. Ancak P_n^{+--} transformasyon çizgesinde bu iki tepeye de bitişik olan en az bir $u \in V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j) = 2$ olur.

$$\text{Durum ii) } \forall v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1} \in V_2 \text{ ve } i < j \text{ için } d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

$j = i + 1$ ise iki ayrı P_n çizgesinde bitişiktir fakat P_n^{+--} transformasyon çizgesinde ayrıtların oluşturduğu bu iki tepe bitişik olmayacaktır. Ancak P_n^{+--} tanımından aralarındaki uzaklık her zaman bir $u \in V_1$ tepesi sayesinde 2 olacaktır. Aksi durumda ise iki ayrı P_n çizgesinde bitişik olmayacaktır ve

yine tanım gereği ayrıtların oluşturduğu bu iki tepenin aralarındaki uzaklık transformasyon çizgesinde 1 olacaktır.

$$\text{Durum iii)} \forall v_i \in V_1 \text{ ve } \forall v_j v_{j+1} \in V_2 \text{ için } d(v_i, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } i = j \text{ veya } i = j + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

$v_j v_{j+1} \in V(P_n^{+--}) \cap V_2$ tepesine karşılık gelen $v_j v_{j+1} \in E(P_n)$ ayrıtı, P_n^{+--} transformasyon çizgesi tanımı gereği P_n^{+--} çizgesinde v_j ve v_{j+1} tepeleri hariç tüm tepelerle bitişiktir. Bu durumda $i \neq j$ veya $i \neq j + 1$ iken $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 1$ olacaktır. Diğer durumlarda ise iki tepeye bitişik olan en az bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 2$ olur.

$$\text{Gut}(P_n^{+--}) = \sum_{x,y \in V(P_n^{+--})} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y)$$

Yukarıdaki ifadeyi

$$A = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y),$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) \text{ ve}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) \text{ olarak parçalayalım.}$$

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_j) \cdot d(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_{i+1}) +$$

$$\sum_{i < j+1}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_{i+1}) = (n-1)[(n-1) \cdot (n-1) \cdot 1] + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2$$

Buradan $A = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$ olarak elde edilir.

$$B = \sum_{i=2}^{n-3} \text{deg}(v_i v_{i+1}) \cdot \text{deg}(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j+1}}^{n-2} \text{deg}(v_i v_{i+1}) \cdot \text{deg}(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1})$$

$$+ \sum_{i=3}^{n-2} \text{deg}(v_1 v_2) \cdot \text{deg}(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_1 v_2, v_i v_{i+1}) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-3} \text{deg}(v_{n-1} v_n) \cdot \text{deg}(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_i v_{i+1})$$

$$+ \text{deg}(v_1 v_2) \cdot \text{deg}(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_1 v_2, v_{n-1} v_n) + \text{deg}(v_1 v_2) \cdot \text{deg}(v_2 v_3) \cdot d(v_1 v_2, v_2 v_3) +$$

$$\text{deg}(v_{n-1} v_n) \cdot \text{deg}(v_{n-2} v_{n-1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_{n-2} v_{n-1})$$

$$= (2n-6) \cdot (2n-6) \cdot 2 \cdot (n-4) + \frac{(n-4)(n-5)}{2} \cdot (2n-6) \cdot (2n-6) \cdot 1 + (n-4) \cdot (2n-5) \cdot (2n-6) \cdot 1 +$$

$$(n-4) \cdot (2n-5) \cdot (2n-6) \cdot 1 + (2n-5) \cdot (2n-5) \cdot 1 + (2n-5) \cdot (2n-6) \cdot 2 + (2n-5) \cdot (2n-6) \cdot 2$$

Buradan $B = 2n^4 - 14n^3 + 30n^2 - 10n - 23$ olarak elde edilir.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j-1 \\ i \neq j}}^{n-2} \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1})$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\substack{j=2 \\ i=j-1 \\ i=j}}^{n-2} \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) + \sum_{i=3}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_1 v_2) \cdot d(v_i, v_1 v_2)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i) \cdot \deg(v_{n-1}v_n) \cdot d(v_i, v_{n-1}v_n) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_1, v_1v_2) \\
& + \deg(v_2) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_2, v_1v_2) + \deg(v_{n-1}) \cdot \deg(v_{n-1}v_n) \cdot d(v_{n-1}, v_{n-1}v_n) \\
& \quad + \deg(v_2) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_2, v_1v_2) + \deg(v_{n-1}) \cdot \deg(v_{n-1}v_n) \cdot d(v_{n-1}, v_{n-1}v_n) \\
& = (n-1) \cdot (2n-6) \cdot 1 \cdot (n^2-5n+6) + (n-1) \cdot (2n-6) \cdot 2 \cdot (2n-6) \\
& \quad + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot (n-2) \cdot 1 + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot 1 \cdot (n-2) + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot 2 \\
& \quad + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot 2 + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot 2 + (n-1) \cdot (2n-5) \cdot 2
\end{aligned}$$

Buradan $C = 5n^4 - 24n^3 + 32n^2 + 10n - 38$ olarak elde edilir.

Son olarak $A + B + C$ işlemi yapıldığında aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$Gut(P_n^{+--}) = 5n^4 - 24n^3 + 32n^2 + 10n - 38$$

Örnek 1: Şekil 1'de verilen P_5^{+--} transformasyon grafinin Gutman indeksi aşağıda hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
Gut(P_5^{+--}) &= \sum_{x,y \in V(P_5^{+--})} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x,y) = \deg(v_1) \cdot \deg(v_2) \cdot d(v_1, v_2) + \\
& \deg(v_1) \cdot \deg(v_3) \cdot d(v_1, v_3) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_4) \cdot d(v_1, v_4) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_5) \cdot d(v_1, v_5) + \\
& \deg(v_2) \cdot \deg(v_3) \cdot d(v_2, v_3) + \deg(v_2) \cdot \deg(v_4) \cdot d(v_2, v_4) + \deg(v_2) \cdot \deg(v_5) \cdot d(v_2, v_5) + \\
& \deg(v_3) \cdot \deg(v_4) \cdot d(v_3, v_4) + \deg(v_3) \cdot \deg(v_5) \cdot d(v_3, v_5) + \deg(v_4) \cdot \deg(v_5) \cdot d(v_4, v_5) + \\
& \deg(v_1v_2) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_1v_2, v_2v_3) + \deg(v_1v_2) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_1v_2, v_3v_4) + \\
& \deg(v_1v_2) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_1v_2, v_4v_5) + \deg(v_2v_3) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_2v_3, v_3v_4) + \\
& \deg(v_2v_3) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_2v_3, v_4v_5) + \deg(v_3v_4) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_3v_4, v_4v_5) + \\
& \deg(v_1) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_1, v_1v_2) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_1, v_2v_3) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_1, v_3v_4) + \\
& \deg(v_1) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_1, v_4v_5) + \deg(v_2) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_2, v_1v_2) + \deg(v_2) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_2, v_2v_3) + \\
& \deg(v_2) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_2, v_3v_4) + \deg(v_2) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_2, v_4v_5) + \deg(v_3) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_3, v_1v_2) + \\
& \deg(v_3) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_3, v_2v_3) + \deg(v_3) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_3, v_3v_4) + \deg(v_3) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_3, v_4v_5) + \\
& \deg(v_4) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_4, v_1v_2) + \deg(v_4) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_4, v_2v_3) + \deg(v_4) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_4, v_3v_4) + \\
& \deg(v_4) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_4, v_4v_5) + \deg(v_5) \cdot \deg(v_1v_2) \cdot d(v_5, v_1v_2) + \deg(v_5) \cdot \deg(v_2v_3) \cdot d(v_5, v_2v_3) + \\
& \deg(v_5) \cdot \deg(v_3v_4) \cdot d(v_5, v_3v_4) + \deg(v_5) \cdot \deg(v_4v_5) \cdot d(v_5, v_4v_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gut(P_5^{+--}) &= 4.4.1 + 4.4.2 + 4.4.2 + 4.4.2 + 4.4.1 + 4.4.2 + 4.4.2 + 4.4.1 + 4.4.2 + 4.4.1 + 5.4.2 + 5.4.1 \\
& \quad + 5.5.1 + 4.4.2 + 4.5.1 + 4.5.2 + 4.5.2 + 4.4.1 + 4.4.1 + 4.5.1 + 4.5.2 + 4.4.2 + 4.4.1 \\
& \quad + 4.5.1 + 4.5.1 + 4.4.2 + 4.4.2 + 4.5.1 + 4.5.1 + 4.4.1 + 4.4.2 + 4.5.2 + 4.5.1 + 4.4.1 \\
& \quad + 4.4.1 + 4.5.2 = 937
\end{aligned}$$

Teorem 2'de elde edilen formülde $n=5$ yerine yazıldığında sonuçların eşit olduğu görülmektedir.

$$Gut(P_n^{+--}) = 5n^4 - 24n^3 + 32n^2 + 10n - 38$$

$$Gut(P_5^{+--}) = 5 \cdot 5^4 - 24 \cdot 5^3 + 32 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 - 38 = 937$$

Teorem 3. P_n , $n \geq 5$ olan n tepeli bir yol çizge olmak üzere; P_n^{++-} transformasyon çizgesinin Gutman İndeksi aşağıdaki gibidir:

$$Gut(P_n^{++-}) = 3n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n + 7$$

İspat: P_n^{++-} çizgesi $n \geq 5$ olmak üzere; $|V(P_n^{++-})| = 2n - 1$ olacaktır. $V(P_n^{++-})$ tepeler kümesi aşağıdaki şekilde iki kümeye parçalsın:

$$V_1 = \{u_i \in V(P_n): 1 \leq i \leq n \text{ ve } \deg(u_i) = n - 1\}$$

$$V_2 = \{u_i u_{i+1} \in E(P_n): 2 \leq i \leq n - 2, \deg(u_i, u_{i+1}) = n \text{ ve } \deg(u_1 u_2) = \deg(u_{n-1} u_n) = n - 1\}$$

Açıkça görülür ki $V(P_n^{++-}) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. Bu durumda:

Durum i) $\forall v_i, v_j \in V_1$ ve $i < j$ için $d(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ elde edilir.

$j = i + 1$ olursa P_n çizgesinde iki tepe bitişiktir ve tanım gereği P_n^{++-} transformasyon çizgesinde uzaklıkları 1 olacaktır. Diğer durumda ise P_n çizgesinde bu iki tepe bitişik değildir. Ancak P_n^{++-} transformasyon çizgesinde her iki tepeye de bitişik olan en az bir $u \in V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j) = 2$ olacaktır.

Durum ii) $\forall v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1} \in V_2$ ve $i < j$ için $d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ elde edilir. Bu sonuç bir önceki duruma benzer şekilde gösterilebilir.

Durum iii) $\forall v_i \in V_1$ ve $\forall v_j v_{j+1} \in V_2$ için $d(v_i, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } i = j \text{ veya } i = j + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

elde edilir.

$v_j v_{j+1} \in V(P_n^{++-}) \cap V_2$ tepesine karşılık gelen $v_j v_{j+1} \in E(P_n)$ ayrıtı, P_n^{++-} transformasyon çizge tanımı gereği P_n^{++-} çizgesinde v_j ve v_{j+1} tepeleri hariç tüm tepelerle bitişiktir. Bu durumda $i \neq j$ veya $i \neq j + 1$ iken $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 1$ olacaktır. Diğer durumlarda ise iki tepeye bitişik olan en az bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 2$ olur.

$$Gut(P_n^{++-}) = \sum_{x,y \in V(P_n^{++-})} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y)$$

$$\text{Yukarıdaki ifadeyi } A = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y),$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) \quad \text{ve} \quad C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) \quad \text{olarak}$$

parçalayalım.

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n deg(v_i) \cdot deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{n-1} deg(v_i) \cdot deg(v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i < j+1}^n deg(v_i) \cdot deg(v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_{i+1})$$

$$= (n-1)[(n-1) \cdot (n-1) \cdot 1] + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2$$

Buradan $A = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$ olarak elde edilir.

$$B = \sum_{j=i+1}^{n-3} deg(v_i v_{i+1}) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{\substack{i,j=2 \\ i < j+2}}^{n-3} deg(v_i v_{i+1}) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) + \sum_{i=3}^{n-2} deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_1 v_2, v_i v_{i+1}) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-3} deg(v_{n-1} v_n) \cdot deg(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_i v_{i+1})$$

$$+ deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_1 v_2, v_{n-1} v_n) + deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_2 v_3) \cdot d(v_1 v_2, v_2 v_3)$$

$$+ deg(v_{n-1} v_n) \cdot deg(v_{n-2} v_{n-1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_{n-2} v_{n-1})$$

$$= (n-1) \cdot n \cdot n \cdot 1 + \frac{(n-4) \cdot (n-5)}{2} \cdot n \cdot n \cdot 2 + (n-4) \cdot n \cdot (n-1) \cdot 2 + (n-4) \cdot n \cdot (n-1) \cdot 2$$

$$+ n \cdot (n-1) \cdot 1 + n \cdot (n-1) \cdot 1 + (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2$$

Buradan $B = n^4 - 4n^3 + 10n^2 + 2$ olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j-1 \\ i \neq j}}^{n-2} \deg(v_i) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) + \\
&\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\substack{j=2 \\ i=j-1 \\ i=j}}^{n-2} \deg(v_i) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) + \sum_{i=3}^n \deg(v_i) \cdot \deg(v_1 v_2) \cdot d(v_i, v_1 v_2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i) \cdot \deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_i, v_{n-1} v_n) + \deg(v_1) \cdot \deg(v_1 v_2) \cdot d(v_1, v_1 v_2) \\
&+ \deg(v_2) \cdot \deg(v_1 v_2) \cdot d(v_2, v_1 v_2) + \deg(v_{n-1}) \cdot \deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_{n-1}, v_{n-1} v_n) \\
&+ \deg(v_n) \cdot \deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_n, v_{n-1} v_n) \\
&= (n-1) \cdot n \cdot 1 \cdot (n^2 - 5n + 6) + (n-1) \cdot n \cdot 2 \cdot (2n-6) + (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot 1 + (n-1)^2 \cdot 1 \cdot (n-2) \\
&\quad + (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2 + (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2 + (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2 + (n-1) \cdot (n-1) \cdot 2
\end{aligned}$$

Buradan $C = n^4 - 5n^2 + 4$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak $A + B + C$ işlemi yapıldığında ispat tamamlanır:

$$Gut(P_n^{++-}) = 3n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n + 7$$

Teorem 4. P_n , $n \geq 5$ olan n tepeli bir yol çizge olmak üzere; P_n^{---} transformasyon çizgesinin Gutman indeksi aşağıdaki gibidir:

$$Gut(P_n^{---}) = 8n^4 - 44n^3 + 56n^2 + 64n - 139$$

İspat: P_n^{---} çizgesi $n \geq 5$ olmak üzere: $|V(P_n^{---})| = 2n - 1$ olacaktır. $V(P_n^{---})$ tepeler kümesi aşağıdaki şekilde iki kümeye parçalsın:

$$V_1 = \{u_i \in V(P_n) : 2 \leq i \leq n-1, \deg(u_i) = 2n-6 \text{ ve } \deg(u_1) = \deg(u_n) = 2n-4\}$$

$$V_2 = \{u_i u_{i+1} \in E(P_n) : 2 \leq i \leq n-2, \deg(u_i, u_{i+1}) = 2n-6, \deg(u_1 u_2) = \deg(u_{n-1} u_n) = 2n-5\}$$

Açıkça görülür ki $V(P_n^{---}) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. Bu durumda:

$$\text{Durum i)} \forall v_i, v_j \in V_1 \text{ ve } i < j \text{ için } d(v_i, v_j) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

$j = i + 1$ olması durumunda iki tepe P_n çizgesinde bitişiktir, bu durumda P_n^{---} transformasyon çizgesinde $u \in V_2$ olacak şekilde bir tepe aracılığı ile $d(v_i, v_j) = 2$ olacaktır. $j \neq i + 1$ olması durumunda ise P_n^{---} transformasyon çizge tanımından $d(v_i, v_j) = 1$ olacaktır.

Durum ii) $\forall v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1} \in V_2$ ve $i < j$ için $d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ elde edilir.

$j = i + 1$ olursa P_n çizgesinde iki ayrı bitişiktir fakat P_n^{---} transformasyon çizge tanımından P_n^{---} transformasyon çizgesinde bu ayrıtlardan oluşan tepelerin aralarındaki uzaklık her zaman bir $u \in V_1$ tepesi sayesinde 2 olacaktır. Aksi durumda ise P_n çizgesinde iki ayrı bitişik olmayacaktır ve yine tanım gereği ayrıtlardan oluşan bu tepelerin aralarındaki uzaklık 1 olacaktır.

$$\text{Durum iii)} \forall v_i \in V_1 \text{ ve } \forall v_j v_{j+1} \in V_2 \text{ için } d(v_i, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } i = j \text{ veya } i = j + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.

$v_j v_{j+1} \in V(P_n^{---}) \cap V_2$ tepesine karşılık gelen $v_j v_{j+1} \in E(P_n)$ ayrıtı, P_n^{---} transformasyon çizge tanımı gereği P_n^{---} çizgesinde v_j ve v_{j+1} tepeleri hariç tüm tepelerle bitişiktir. Bu durumda $i \neq j$

veya $i \neq j + 1$ iken $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 1$ olacaktır. Diğer durumlarda ise iki tepeye bitişik olan en az bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 2$ olur.

$$Gut(P_n^{---}) = \sum_{x,y \in V(P_n^{---})} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y)$$

Yukarıdaki ifadeyi

$$A = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) \text{ ve}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y) \text{ olarak parçalayalım.}$$

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n deg(v_i) \cdot deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j) = \sum_{i=2}^{n-2} deg(v_i) \cdot deg(v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_{i+1}) +$$

$$\sum_{j=4}^{n-1} \sum_{\substack{i=2 \\ i < j-1}}^{n-3} deg(v_i) \cdot deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j) + \sum_{i=3}^{n-1} deg(v_1) \cdot deg(v_i) \cdot d(v_1, v_i) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-2} deg(v_n) \cdot deg(v_i) \cdot d(v_n, v_i) + deg(v_1) \cdot deg(v_2) \cdot d(v_1, v_2) +$$

$$deg(v_{n-1}) \cdot deg(v_n) \cdot d(v_{n-1}, v_n) + deg(v_1) \cdot deg(v_n) \cdot d(v_1, v_n)$$

Buradan $A = 2n^4 - 10n^3 + 10n^2 + 18n - 32$ olarak elde edilir.

$$B = \sum_{j=i+1}^{n-3} deg(v_i v_{i+1}) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{\substack{j=3 \\ i \neq j+1}}^{n-2} deg(v_i v_{i+1}) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{i=3}^{n-2} deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_1 v_2, v_i v_{i+1}) +$$

$$\sum_{i=2}^{n-3} deg(v_{n-1} v_n) \cdot deg(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_i v_{i+1}) +$$

$$deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_1 v_2, v_{n-1} v_n) + deg(v_1 v_2) \cdot deg(v_2 v_3) \cdot d(v_1 v_2, v_2 v_3)$$

$$+ deg(v_{n-1} v_n) \cdot deg(v_{n-2} v_{n-1}) \cdot d(v_{n-1} v_n, v_{n-2} v_{n-1})$$

Buradan $B = 2n^4 - 14n^3 + 30n^2 - 10n - 23$ olarak elde edilir.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} deg(x) \cdot deg(y) \cdot d(x, y)$$

$$= \sum_{i=2}^{n-2} deg(v_i) \cdot deg(v_i v_{i+1}) \cdot d(v_i, v_i v_{i+1}) +$$

$$\sum_{j=3}^{n-2} \sum_{\substack{i=2 \\ i < j}}^{n-3} deg(v_i) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{j=2}^{n-3} \sum_{\substack{i=4 \\ i > j+1}}^{n-1} deg(v_i) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) + \sum_{j=2}^{n-2} deg(v_1) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_1, v_j v_{j+1}) +$$

$$deg(v_1) \cdot deg(v_1 v_2) \cdot d(v_1, v_1 v_2) + deg(v_1) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_1, v_{n-1} v_n) +$$

$$\sum_{j=2}^{n-2} deg(v_n) \cdot deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_n, v_j v_{j+1}) + deg(v_n) \cdot deg(v_1 v_2) \cdot d(v_n, v_1 v_2)$$

$$+ deg(v_n) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_n, v_{n-1} v_n) + \sum_{i=2}^{n-2} deg(v_i) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_i, v_{n-1} v_n) +$$

$$deg(v_{n-1}) \cdot deg(v_{n-1} v_n) \cdot d(v_{n-1}, v_{n-1} v_n)$$

Buradan $C = 4n^4 - 20n^3 + 16n^2 + 56n - 84$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak $A + B + C$ işlemi yapıldığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$Gut(P_n^{---}) = 8n^4 - 44n^3 + 56n^2 + 64n - 139$$

Teorem 5. P_n , $n \geq 5$ olan n tepeli bir yol çizge olmak üzere; P_n^{-+} transformasyon çizgesinin Gutman İndeksi aşağıdaki gibidir:

$$Gut(P_n^{-+}) = \frac{6n^4 - 26n^3 + 39n^2 - 19n - 2}{2}$$

İspat: P_n^{--+} çizgesi $n \geq 5$ olmak üzere: $|V(P_n^{--+})| = 2n - 1$ olacaktır. $V(P_n^{--+})$ tepeler kümesi aşağıdaki şekilde iki kümeye parçalansın:

$$V_1 = \{u_i \in V(P_n): 1 \leq i \leq n \text{ ve } \deg(u_i) = n - 1\}$$

$$V_2 = \{u_i u_{i+1} \in E(P_n): 2 \leq i \leq n - 2 \text{ için } \deg(u_i, u_{i+1}) = n - 2, \deg(u_1, u_2) = \deg(u_{n-1}, u_n) = n - 1\}$$

Açıkça görülür ki $V(P_n^{--+}) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. Bu durumda:

Durum i) $\forall v_i, v_j \in V_1$ ve $i < j$ için $d(v_i, v_j) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ elde edilir.

$j = i + 1$ olması durumunda P_n çizgesinde iki tepe bitişiktir, bu durumda P_n^{--+} transformasyon çizgesinde $u \in V_2$ olacak şekilde bir tepe ile mutlaka $d(v_i, v_j) = 2$ olacaktır. $j \neq i + 1$ olması durumunda ise P_n^{--+} transformasyon çizge tanımından $d(v_i, v_j) = 1$ olacaktır.

Durum ii) $\forall v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1} \in V_2$ ve $i < j$ için $d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ elde edilir.

$j = i + 1$ olursa P_n çizgesinde iki ayrıt bitişiktir fakat P_n^{--+} transformasyon çizge tanımından, P_n^{--+} çizgesinde ayrıtlardan oluşan bu iki tepenin aralarındaki uzaklık her zaman bir $u \in V_1$ tepesi sayesinde 2 olacaktır. Aksi durumda ise P_n çizgesinde iki ayrıt bitişik olmayacaktır ve yine tanım gereği ayrıtların oluşturduğu bu iki tepenin aralarındaki uzaklık 1 olacaktır.

Durum iii) $\forall v_i \in V_1$ ve $\forall v_j v_{j+1} \in V_2$ için $d(v_i, v_j v_{j+1}) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \text{ veya } i = j + 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

elde edilir.

v_i ve $v_j v_{j+1}$ tepeleri $i = j$ veya $i = j + 1$ olduğu durumda bitişiktir ve tanım gereği $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 1$ olacaktır. Diğer durumlarda ise $d(v_i, v_j v_{j+1}) = 2$ olacak şekilde en az bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi olacaktır.

$$Gut(P_n^{--+}) = \sum_{x,y \in V(P_n^{--+})} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y)$$

$$\text{Yukarıdaki ifadeyi } A = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y),$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) \quad \text{ve} \quad C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) \quad \text{olarak}$$

parçalayalım.

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \deg(v_i) \cdot \deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{n-1} \deg(v_i) \cdot \deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j) +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j+1}}^n \deg(v_i) \cdot \deg(v_j) \cdot d(v_i, v_j)$$

$$\text{Buradan } A = \frac{n^4 - n^3 - 3n^2 + 5n - 2}{2} \text{ olarak elde edilir.}$$

$$B = \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^n \deg(v_i v_{i+1}) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j+2}}^{n-1} \deg(v_i v_{i+1}) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1})$$

$$\text{Buradan } B = \frac{n^4 - 7n^3 + 28n^2 - 56n + 42}{2} \text{ olarak elde edilir. } C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \deg(x) \cdot \deg(y) \cdot d(x, y) =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ i \neq j+1}}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j \\ i \neq j+1}}^{n-1} \deg(v_i) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1}) +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i=j \\ i=j+1}}^{n-1} \deg(v_i) \cdot \deg(v_j v_{j+1}) \cdot d(v_i, v_j v_{j+1})$$

Buradan $C = 2n^4 - 10n^3 + 22n^2 - 22n + 8$ olarak elde edilir.

Son olarak $A + B + C$ işlemini yaparsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$Gut(P_n^{--+}) = \frac{6n^4 - 28n^3 + 69n^2 - 95n + 56}{2}$$

Çevre Çizgenin Transformasyon Çizgelerinin Gutman İndeksi

Bu bölümde C_n^{+--} , C_n^{-+-} , C_n^{--+} , C_n^{---} ve C_n^{++-} transformasyon çizgelerinin Gutman indeksleri için genel formüller verilmiştir. İspatlar yol çizgenin ispatlarına benzer şekilde yapılmaktadır.

Teorem 6. $n \geq 3$ olmak üzere n tepeli bir C_n çevre çizgesinin çeşitli transformasyon çizgelerinin Gutman indeksleri aşağıdaki gibidir:

- $Gut(C_n^{+--}) = \frac{10n^4 - 22n^3 - 15n^2 + 25n}{2}$
- $Gut(C_n^{-+-}) = \frac{10n^4 - 22n^3 - 15n^2 + 25n}{2}$
- $Gut(C_n^{--+}) = 3n^4 - 7n^3 + 5n^2 - n$
- $Gut(C_n^{---}) = 8n^4 - 28n^3 - 10n^2 + 75n$
- $Gut(C_n^{++-}) = 3n^4 - 2n^3$

Yıldız Çizgenin Transformasyon Çizgelerinin Gutman İndeksi

Bu bölümde S_n^{+-} , S_n^{++} , S_n^{-+} , S_n^{--} , S_n^{+-} ve S_n^{++} transformasyon çizgelerinin Gutman indeksleri için genel sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 7. $n \geq 3$ olmak üzere n tepeli bir S_n yıldız çizgesinin çeşitli transformasyon çizgelerinin Gutman indeksleri aşağıdaki gibidir:

- $Gut(S_n^{+-}) = 5n^4 - 22n^3 + 36n^2 - 28n + 9$
- $Gut(S_n^{++}) = \frac{n^4 + 9n^3 - 10n^2 - 24n + 24}{2}$
- $Gut(S_n^{-+}) = \frac{n^4 + 7n^3 - 19n^2 + 5n + 6}{2}$
- $Gut(S_n^{--}) = 24n^2 - 60n + 36$
- $Gut(S_n^{+-}) = 3n^4 - 12n^3 + 17n^2 - 11n + 3$
- $Gut(S_n^{++}) = \frac{6n^4 - 16n^3 + 11n^2 + n - 2}{2}$

İspat a) S_n^{+-} çizgesi S_n çizgesinin bir transformasyon çizgesi olsun. $|V(S_n^{+-})| = 2n - 1$ olacaktır. $V(S_n^{+-})$ tepeler kümesi aşağıdaki şekilde iki kümeye parçalansın:

$$V_1 = \{u_i \in V(S_n) : 1 \leq i \leq n \text{ ve } \deg(u_i) = n - 1\}$$

$$V_2 = \{u_1 u_i \in E(S_n) : 2 \leq i \leq n, \deg(u_1 u_i) = 2n - 4\}$$

Burada v_1 tepesi merkez tepe kabul edilmiştir. Açıkça görülür ki $V(S_n^{+-}) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. Bu durumda:

$$\text{Durum i) } \forall v_i, v_j \in V_1 \text{ ve } i < j \text{ için } d(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = 1 \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

$i = 1$ olursa, S_n çizgesinde iki tepe bitişiktir ve S_n^{+-} transformasyon çizgesinde uzaklıkları 1 olacaktır. Diğer durumda ise S_n çizgesinde iki tepe bitişik değildir. Ancak S_n^{+-} transformasyon çizgesinde her iki tepeye de bitişik olan en az bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi olacaktır. Böylece $d(v_i, v_j) = 2$ olacaktır.

Durum ii) $\forall v_1 v_i, v_1 v_j \in V_2$, $i < j$ ve $i, j > 1$ için $d(v_1 v_i, v_1 v_j) = 1$ elde edilir. Çünkü S_n çizgesindeki tüm ayrıtlar birbirine bitişiktir ve S_n^{++-} transformasyon çizge tanımından, S_n^{++-} çizgesinde ayrıtların oluşturduğu iki tepe arasındaki uzaklık her zaman 1'dir.

Durum iii) $\forall v_i \in V_1$ ve $\forall v_1 v_j \in V_2$, $i < j$ ve $j > 1$ için

$$d(v_i, v_1 v_j) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } j = i \text{ veya } j = i + 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

$j = i$ veya $j = i + 1$ olması durumunda mutlaka bir $u \in V_1 \cup V_2$ tepesi ile $d(v_i, v_1 v_j) = 2$ olacaktır. Aksi halde S_n^{++-} transformasyon çizge tanımı gereği $d(v_i, v_1 v_j) = 1$ olacaktır.

$$\begin{aligned} \text{Gut}(S_n^{++-}) &= \sum_{x,y \in V(S_n^{++-})} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{Yukarıdaki ifadeyi } A = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_1} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y),$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) \quad \text{ve} \quad C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y) \quad \text{olarak}$$

parçalayalım.

$$A = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_j) \cdot d(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i=2}^n \text{deg}(v_1) \cdot \text{deg}(v_i) \cdot d(v_1, v_i) + \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_j) \cdot d(v_i, v_j)$$

$$= (n-1) \cdot (n-1) \cdot 1 \cdot (n-1) + (n-1) \cdot (n-1) \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2$$

Buradan $A = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$ olarak elde edilir.

$$B = \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^n \text{deg}(v_1 v_i) \cdot \text{deg}(v_1 v_j) \cdot d(v_1 v_i, v_1 v_j) = (2n-4) \cdot (2n-4) \cdot 1 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Buradan $B = 2n^4 - 14n^3 + 36n^2 - 40n + 16$ olarak elde edilir.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} \text{deg}(x) \cdot \text{deg}(y) \cdot d(x, y)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=2}^n \text{deg}(v_1) \cdot \text{deg}(v_1 v_i) \cdot d(v_1, v_1 v_i) + \sum_{i=2}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_1 v_i) \cdot d(v_i, v_1 v_i) \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j}}^n \text{deg}(v_i) \cdot \text{deg}(v_1 v_j) \cdot d(v_i, v_1 v_j) \end{aligned}$$

$$= (n-1) \cdot (2n-4) \cdot 2 \cdot (n-1) + (n-1) \cdot (2n-4) \cdot 2 \cdot (n-1) + (n-1) \cdot (2n-4) \cdot 1 \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

Buradan $C = 2n^4 - 4n^3 - 6n^2 + 16n - 8$ olarak elde edilir.

Son olarak $A + B + C$ işlemi yapıldığında aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\text{Gut}(S_n^{++-}) = 5n^4 - 22n^3 + 36n^2 - 28n + 9$$

Diğer ispatlar da benzer şekilde yapılmaktadır.

SONUÇ

Çizge teorisinin en yaygın kullanım alanlarından biri matematiksel kimya dalıdır. Bu alanda birçok topolojik indeks üzerinde çalışılmıştır. Bu indekslerin bazıları dereceye, bazıları ise uzaklığa bağlıdır. Bir topolojik indeks olan Gutman indeksinde ise hem derece hem uzaklık aynı anda kullanılmaktadır. Bu çalışmada yol çizge, çevre çizge ve yıldız çizgenin bazı transformasyon çizgelerinin Gutman indeksi incelenmiş ve genel formüller elde edilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkıları

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

- Asir T., Rabikka V. (2022). The Wiener index of the zerodivisor graph of Z_n , *Discrete Applied Mathematics*, 319, 461-471.
- Alizadeh, Y., Iranmanesh, A. ve Doslic, T. (2013). Additively Weighted Harary Index of Some Composite Graphs. *Discrete Mathematics*, 313 (1), 26-34.
- Andova, V., Dimitrov, D., Fink, J. ve Skrekovski, R. (2012). Bounds on Gutman Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 67, 515-524.
- Aslan, E. ve Açan, B. (2019). Transformasyon Grafların Komşu İzole Saçılım Sayısı. *Journal of Natural and Applied Sciences*, 23(2), 625-629.
- Bacak-Turan, G. ve Kırılıngıç, A. (2013). Neighbor Integrity of Transformation Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 24(3), 303-317.
- Bacak-Turan, G. ve Oz, E. (2017). Neighbor Rupture Degree of Transformation Graphs G^{xy} . *International Journal of Foundations of Computer Science*, 28 (4), 335-355.
- Basavanagoud, B., Patil, H. P. ve Veeragoudar, J. B. (2011). On the Block-Transformation Graphs, Graph-Equations and Diameters. *International Journal of Advances in Science and Technology*, 2(2).
- Chartrand, G. ve Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs*. California: Chapman and Hall.
- Eskiizmirliler, S., Bacak-Turan, G. ve Polat, R. (2016). Neighbor Rupture Degree of Total Graphs and Their Complements. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 6(1), 55-64.
- Fajtlowicz, S. (1987). On conjectures of Graffiti-II. *Congressus Numerantium*, 60, 187-197.
- Furtula, B., Graovac, A. ve Vukicevic, D. (2009). Atom-bond connectivity index of trees. *Discrete Applied Mathematics*, 157(13), 2828-2835.
- Gursoy, A., Ülker, A. ve Kırılıngıç, N. (2022). Sombor index of zero-divisor graphs of commutative rings. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 30(2), 231-257.
- Gutman, I. (1994). Selected properties of the Schultz molecular topological index. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 34(5), 1087-1089.
- Gutman, I. ve Das, K.C. (2004). The first Zagreb index 30 years after. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 50, 83-92.
- Gutman, I. (2013). Degree-Based Topological Indices. *Croatica Chemica Acta*, 86(4), 351-361.
- Jamil, M. K. (2017). Distance-Based Topological Indices and Double Graph. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 8(1), 83-91.
- Kırılıngıç, N. (2021). Computing the Forgotten Topological Index for Zero Divisor Graphs of MV-Algebras. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 11(4), 3072-3085.
- Klavzar, S. ve Gutman, I. (1997). Wiener number of vertex-weighted graphs and a chemical application. *Discrete Applied Mathematics*, 80(1), 73-81.
- Narumi, H. ve Katayama, M. (1984). Simple topological index: a newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University*, 16 (3), 209-214.
- Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N. ve Mihaljčić, Z. (1993). On the Harary index for the characterization of chemical graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 235-250.

- Randic, M. (1975). On Characterization of molecular branching. *Journal of the American Chemical Society*, 97, 6609-6615.
- Roshini, G. R., Chandrakala, S. B. ve Sooryanarayana, B. (2020). Some Degree Based Topological Indices of Transformation Graphs. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 10(2), 225-237.
- Singh P., Bhat V.K. (2021). Adjacency matrix and Wiener index of zero divisor graph $\Gamma (Z_n)$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 66, 717-732.
- Todeschini, R. ve Consonni, V. (2010). New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64, 359-372.
- Vukicevic, D. ve Furtula, B. (2009). Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges. *Journal of mathematical chemistry*, 46, 1369-1376.
- Wardecki, D, Dołowy, M. ve Bober-Majnuż, K. (2023). Evaluation of the Usefulness of Topological Indices for Predicting Selected Physicochemical Properties of Bioactive Substances with Anti-Androgenic and Hypouricemic Activity. *Molecules*, 28(15), 5822.
- Wiener, H. (1947). Structural determination of paraffin boiling points, *Journal of the American Chemical Society*, 69(1), 17 - 20.
- Wu, B. (2010). Wiener Index of Line Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64, 699-706.
- Wu, B. ve Meng, J. (2001). Basic Properties of Total Transformation Graphs. *Journal of Mathematical Study*, 34 (2), 109-116.