DOI:10.25092/baunfbed. 1367671 **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 26(1), 196-202, (2024)**

Kenar eklemenin indirgenmiş ikinci Zagreb indeks ve hyper-Zagreb indeks üzerine etkisi

Aysun YURTTAS GUNES*

Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Görükle Kampüsü 16059 Bursa - Türkiye

Geliş Tarihi (Received Date): 29.09.2023
Kabul Tarihi (Accepted Date): 01.11.2023

Öz

Bir grafa kenar/köşe ekleme ya da bir graftan kenar/köşe silme işlemi, verilen bir graf ya da graf sınıfının gerekli birçok özelliğini çalışmada oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu yöntemi art arda uygulayarak daha küçük graftan elde edilen daha büyük bir graf hakkında bilgi edinilebilir. Bu çalışmada, bir grafa yeni bir kenar eklemenin indirgenmiş ikinci Zagreb indeks ve hyper-Zagreb indeks üzerine etkisi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: *İndirgenmiş ikinci Zagreb indeks, hyper-Zagreb indeks, kenar ekleme, köşe ekleme.*

Effect of edge addition on reduced second Zagreb Index and hyper-Zagreb Index

Abstract

Vertex and edge addition/deletion to a given graph is a useful method to study several required properties of a given graph or graph class. Successively applying these methods, one can obtain such information on a large graph by means of smaller graphs. In this work, we studied the effects of adding a new edge to a graph on the reduced second Zagreb index and hyper-Zagreb index.

Keywords: *Reduced second Zagreb index, hyper-Zagreb index, edge addition, vertex addition.*

*Aysun YURTTAS GUNES, ayurttas@uludag.edu.tr, https://orcid.org/0000-0001-8873-1999

1. Giriş

$G=(V,E)$, köşe kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G)=\{v_iv_j: v_i,v_j\in V(G)\}$ olan döngü ya da katlı kenar bulundurmayan *n* mertebeli ve *m* boyutlu basit bir graf olsun. Bu durumda G'nin mertebesini ve boyutunu vurgulamak için G yerine $G(n,m)$ kullanılır. Eğer e, G'nin v_i ve v_j komşu köşelerini birleştiren bir kenarı ise bu durum $e=v_iv_j$ ile gösterilir. Herhangi bir $v\in V(G)$ köşesinin derecesi $d_G(v)$ ya da kısaca d_v ile gösterilir. Derecesi 1 olan köşeye pendant köşe denir. Bir pendant köşeye sahip olan kenara ise pendant kenar denir. u köşesinin komşuluğu $N_G(u)=\{v\in V(G): \text{G grafında v köşesi u köşesine komşu}\}$ şeklinde tanımlanır. u köşesinin komşularının derececeleri toplamı ise $\delta_G(u)=\sum_{v\in N_G(u)} d_G(v)$ şeklinde tanımlanır.

Bir kimyasal molekül, her bir atomu bir köşeye ve her bir kimyasal bağı da bir kenara karşılık tutularak oluşturulan bir graf ile modellenebilir. Topolojik graf indeksleri, atomların ve moleküllerin çeşitli özelliklerini bazı matematiksel teknikler aracılığıyla incelemek için tanımlanır ve kullanılır. 3000'den fazla topolojik graf indeksi birçok matematikçi ve kimyager tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Bu indeksler, grafların çeşitli fiziksel, kimyasal özelliklerini ölçen değişmezler olarak tanımlanır. 1947 yılında Wiener, parafinlerin kaynama noktalarını belirlemek için ilk topolojik indeksi tanımlamıştır, [1]. Daha sonra 1972 yılında Gutman ve Trinajstic, [2], QSAR ve QSPR çalışmalarında en önemli topolojik graf indeksleri olan birinci ve ikinci Zagreb indekslerini tanımlamışlardır. [3]'de birinci Zagreb indeksi için bazı alt ve üst sınırlar belirlenmiş ve diğer bazı topolojik indekslerle ilişkileri verilmiştir. Zagreb indekslerinin matematiksel teorisi ve kimyasal uygulamalarının ayrıntıları için bkz. [4, 5, 11].

Birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin farkı Furtula, Gutman ve Ediz [6] tarafından incelenmiş ve bu farkın indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi adı verilen ve

$$RM_2(G)=\sum_{uv\in E(G)}(d_u-1)(d_v-1) \tag{1}$$

şeklinde tanımlanan köşe derecesine dayalı değişmezle yakından ilişkili olduğunu göstermişlerdir.

2013 yılında Shirdel, Rezapour ve Sayadi, [7], hyper-Zagreb indeksi olarak adlandırılan ve

$$HM(G)=\sum_{uv\in E(G)}(d_u+d_v)^2 \tag{2}$$

ile verilen köşe derecelerine bağlı yeni bir indeks tanımlayarak grafların Kartezyen çarpımı, bileşimi, birleşimi ve ayrışımının $HM(G)$ indeksini hesaplamışlardır.

Verilen bir grafa kenar/köşe ekleme/silme bir graf ya da graf sınıfının gerekli birçok özelliğinin çalışılmasında oldukça kullanışlı bir metottur. Bu metot art arda uygulanarak daha büyük graflar için bu bilgiler elde edilebilir. Bu yöntemin bazı uygulamaları [8, 9, 10]'da bulunabilir. Bu çalışmada verilen bir G grafına yeni bir kenar eklemenin $RM_2(G)$ indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi ve $HM(G)$ hyper-Zagreb indeksi üzerine etkisi çalışılmıştır.

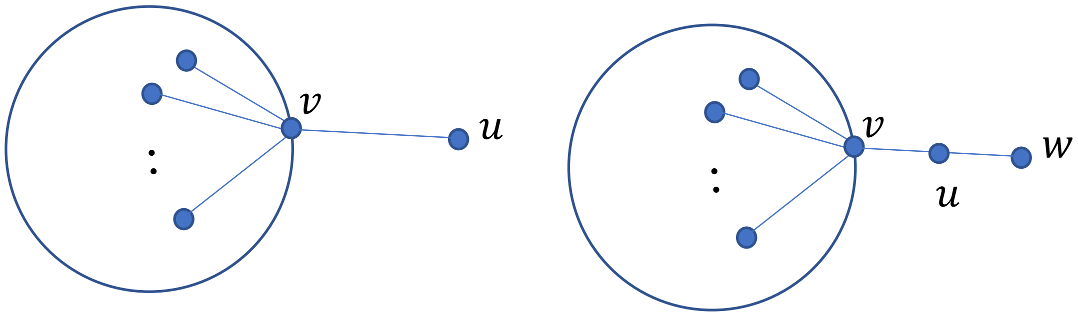
2. Kenar eklemenin indirgenmiş ikinci Zagreb indeks ve hyper-Zagreb indeksine etkisi

Bu bölümde verilen bir G grafına yeni bir kenar eklemenin $RM_2(G)$ ve $HM(G)$ indekslerine etkisi elde edilmiştir. Bu kenar grafa üç şekilde eklenebilir: pendant köşeye bir pendant kenar olarak, derecesi 1'den büyük köşeye yeni bir pendant kenar olarak ya da var olan ve komşu olmayan iki köşeyi birleştirerek.

İlk olarak çok kullanışlı bir durum olan G'nin u köşesinin pendant köşe olması durumu ele alınmıştır:

Teorem 1. G, en az üç köşesi olan basit bağlantılı bir graf olsun. u bir pendant köşe ise v, u*'nun* tek komşusu olmak üzere u'ya yeni bir pendant kenar eklemek indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi $d_v - 1$ kadar, hyper-Zagreb indeksi ise *4* arttırır.

İspat. Şekil 1'de olduğu gibi u, G'nin bir pendant köşesi ve v de u'nun d_v dereceli tek komşusu olsun. O halde



Şekil 1. *u* pendant köşesine bir pendant kenar ekleme.

$$
\begin{aligned}
RM_2(G) &= \sum_{uv\in E(G)} (d_u - 1)(d_v - 1) \\
&= (d_u - 1)(d_v - 1) + \sum_{rs\in E(G), r,s\neq u} (d_r - 1)(d_s - 1) \\
&= \sum_{rs\in E(G), r,s\neq u} (d_r - 1)\,(d_s - 1) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

dir. G'ye u köşesinden yeni bir kenar eklemek u'nun derecesini 1 arttıracağından

$$
\begin{aligned}
RM_2(G+e) &= (d_v - 1)(2-1) + (2-1)(1-1) + \sum_{rs\in E(G), r,s\neq u} (d_r - 1)\,(d_s - 1) \\
&= (d_v - 1) + \sum_{rs\in E(G), r,s\neq u} (d_r - 1)\,(d_s - 1) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. $HM(G)$ indeksi için

$$
HM(G) = \sum_{uv\in E(G)} (d_u + d_v)^2
$$

$$= (d_v + 1)^2 + \sum_{rs \in E(G), r, s \neq u} (d_r + d_s)^2 \tag{5}$$

ve buradan da

$$HM(G+e) = \sum_{uv \in E(G+e)} (d_u + d_v)^2$$
$$= (d_v + 1)^2 + 4 + \sum_{rs \in E(G), r, s \neq u} (d_r - 1)(d_s - 1) \tag{6}$$

elde edilir. O halde

$$HM(G+e) - HM(G) = 4 \tag{7}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

İkinci olarak *G*'nin derecesi 1'den büyük olan bir *u* köşesine kenar ekleme durumu incelenmiştir:

Teorem 2. *G*, en az üç köşesi olan basit bağlantılı bir graf olsun. Derecesi $d_u = t > 1$ olan u köşesinin komşuları $v_1, v_2, \cdots, v_t$ ve dereceleri sırasıyla $d_{v_1}, d_{v_2}, \cdots, d_{v_t}$ olsun. O halde u köşesine yeni bir *e* pendant kenarı eklendiğinde

$$RM_2(G+e) - RM_2(G) = \delta_G(u) + \frac{t(t+1)}{2} \tag{8}$$

ve

$$HM(G) = 2\delta_G(u) + (t+1)^2 + \frac{t(t+1)(2t+1)}{2} \tag{9}$$

olur.

İspat. $d_u = t$ olduğundan

$$RM_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u - 1)(d_v - 1)$$
$$= (t-1)\sum_{i=1}^{t}\left(d_{v_i} - 1\right) + \sum_{rs \in E(G), r, s \neq u} (d_r - 1)(d_s - 1) \tag{10}$$

olur. Eğer $e = uw$ olmak üzere $G + e$ grafı göz önüne alınırsa $d_{G+e}(u) = t + 1$ ve $d_{G+e}(w) = 1$ olduğundan

$$RM_2(G+e) = \sum_{uv \in E(G+e)} (d_u - 1)(d_v - 1)$$
$$= t\sum_{i=1}^{t}\left(d_{v_i} - 1\right) + \sum_{rs \in E(G), r, s \neq u} (d_r - 1)(d_s - 1) \tag{11}$$

olur ve böylece

$$RM_2(G+e)-RM_2(G)=\delta_G(u)+\frac{t(t+1)}{2} \tag{12}$$

elde edilir. $HM(G)$ indeksi için

$$\begin{aligned} HM(G) &= \sum_{uv\in E(G)} (d_u+d_v)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{t}\left(t+d_{v_i}\right)^2+\sum_{rs\in E(G),r,s\neq u} (d_r+d_s)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

ve buradan da

$$HM(G+e) \quad = \quad (t+1)^2+\sum_{i=1}^{t}\left(t+1+d_{v_i}\right)^2+\sum_{rs\in E(G),r,s\neq u} (d_r-1)\,(d_s-1) \tag{14}$$

olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. □

Son olarak, G'nin komşu olmayan iki köşesini birleştirerek eklenen kenarın $RM_2(G)$ ve HM(G) indeksine etkisi göz önüne alınacaktır:

Teorem 3. *G*, en az üç köşesi olan basit bağlantılı bir graf ve u *and* v *G*'de komşu olmayan $d_u=t$ *ve* $d_v=k$ dereceli iki köşe olsun. Eğer *G*'ye yeni bir $e=uv$ kenarı eklenirse

$$RM_2(G+e)-RM_2(G)=\delta_G(u)+\delta_G(v)-\frac{t(t+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2} \tag{15}$$

ve

$$HM(G+e)-HM(G)=2\big(\delta_G(u)+\delta_G(v)\big)+\frac{t(t+1)(2t+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{2} \tag{16}$$

olur.

İspat. *u*'nun *t* tane komşusu $z_1,z_2,\cdots,z_t$ ve dereceleri $a_1,a_2,\cdots,a_t$, *v*'nin *k* tane komşusu $w_1,w_2,\cdots,w_k$ ve dereceleri de $b_1,b_2,\cdots,b_k$ olsun. $RM_2(G)$ indeksin tanımından

$$\begin{aligned} RM_2(G) &= \sum_{i=1}^{t}(d_u-1)\left(d_{z_i}-1\right)+\sum_{j=1}^{k}(d_v-1)\left(d_{w_j}-1\right) \\ &\quad + \sum_{rs\in E(G),r,s\neq uv} (d_r-1)\,(d_s-1) \\ &= (t-1)\sum_{i=1}^{t}(a_i-1)+(k-1)\sum_{j=1}^{k}\left(b_j-1\right) \\ &\quad + \sum_{rs\in E(G),r,s\neq u,v} (d_r-1)\,(d_s-1) \end{aligned} \tag{17}$$

elde edilir. Eğer u ve v köşeleri yeni bir $e = uv$ kenarı ile birleştirilirse

$$RM_2(G+e) = t\sum_{i=1}^{t}(a_i - 1) + k\sum_{j=1}^{k}(b_j - 1) + \sum_{rs\in E(G),r,s\neq u}(d_r - 1)(d_s - 1) \quad (18)$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} RM_2(G+e) - RM_2(G) &= \sum_{i=1}^{t}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{k}(b_j - 1) \\ &= \delta_G(u) + \delta_G(v) - \frac{t(t+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. $HM(G)$ indeks için ispat $RM_2(G)$'nin ispatına benzer şekilde yapılır. □

3. Sonuçlar

Kenar ve/veya köşe ekleme/silme işlemi ilk graftan elde edilen yeni grafla ilgili bilgileri elde etmede kullanılan yaygın bir yöntemdir. Bir kenar ya da köşe eklendiğinde ya da silindiğinde grafın herhangi bir parametresinin değişimi biliniyorsa, bu işlemi art arda uygulamak ve ilk grafın aynı parametresi cinsinden büyük olan grafın gerekli parametresini bulmak mümkündür.

Bu çalışmada, verilen bir grafa kenar eklemenin indirgenmiş ikinci Zagreb indeksi ve hyper-Zagreb indeksi üzerine etkisi incelenmiştir.

Kaynaklar

[1] Wiener, H. J., Structural Determination of Paraffin Boiling Points, **J. Am. Chem. Soc.**, 69, 17-20, (1947).

[2] Gutman, I. ve Trinajstic, N., Graph theory and molecular orbitals III, Total π-electron energy of alternant hydrocarbons, **Chem. Phys. Lett**., 17, 535-538, (1972).

[3] Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I., N. ve Cevik, A. S., On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, **Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta** 24, 1, 153-176, (2016).

[4] Das, K. C. ve Gutman, I., Some properties of the second Zagreb index, **MATCH Commun. Math. Comput. Chem**., 52, 103-112, (2004).

[5] Gutman, I., Furtula, B. ve Elphick C., Three new/old vertex degree-based topological indices, **MATCH Commun. Math. Comput. Chem**., 72, 617-684, (2014).

[6] Furtula, B., Gutman, I. ve Ediz S., On difference of Zagreb indices, **Discrete Appl. Math**. 178, 83-88, (2014).

[7] Shirdel, G. H., Rezapour, H. ve Sayadi A. M., The hyper–Zagreb index of graph operations, **Iran. J. Math. Chem**., 4, 213–220, (2013).

[8] Delen, S. ve Cangul, I. N., Effect of edge and vertex addition on Albertson and Bell indices, **AIMS Mathematics**, 6, 1, 925–937, (2020).

[9] Delen, S., Togan, M., Yurttas, A. ve Cangul, I.N., New results on edge and vertex deletion in graphs, **MICOPAM Proceedings Book**, 175-179, (2018).

[10] Togan, M., Yurttas, A., Cevik, A. S. ve Cangul, I. N., **Effect of edge deletion and addition on Zagreb indices of graphs** in Taş, K., Baleanu, D. ve Machado, J., Mathematical Methods in Engineering, Theoretical Aspects, Nonlinear Systems and Complexity, Springer, 191-201, USA, (2019).

[11] Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R., **Graph theory with applications**, Macmillan London and Elsevier, New York, (1976).