

Atıf İçin: Maraş, S. (2024). Sentaktik Köpük Eğri Kirişlerin Diferansiyel Quadrature Metodu ile Serbest Titreşim Analizi. *İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 14(2), 835-847.

To Cite: Maraş, S. (2024). Free Vibration Analysis of Syntactic Foam Curved Beams by Differential Quadrature Method. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 14(2), 835-847.

Sentaktik Köpük Eğri Kirişlerin Diferansiyel Quadrature Metodu ile Serbest Titreşim Analizi

Sinan MARAŞ

Öne Çıkanlar:

- Sentaktik köpük
- Titreşim analizi
- Diferansiyel quadrature metodu

Anahtar Kelimeler:

- Sentaktik köpük
- Titreşim analizi
- Nümerik analiz
- Diferansiyel quadrature metodu

ÖZET:

Bu çalışmada, iki ucu basit mesnetli sınır şartına sahip sentaktik köpük eğri kirişlerin serbest titreşim analizleri Diferansiyel Quadrature metodu (DQM) ile nümerik olarak incelenmiştir. Yer değiştirme alanı, klasik kiriş teorisine göre ifade edilmiş; Newton'un hareket yasaları kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Bu amaçla, MATLAB kullanılarak bir DQM kodu geliştirilmiş ve epoksi/cam mikro balon (MB) bazlı sentaktik köpük eğri kirişlerin MB hacim oranları, MB yoğunlukları gibi malzeme parametrelerinin ve eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı gibi geometrik parametrelerinin serbest titreşim analizi üzerindeki etkilerini incelemek için yapıların doğal frekansları elde edilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar, MB hacim oranlarının, yoğunluklarının ve eğri kirişin geometrik özelliklerinin sentaktik köpük eğri kirişlerin titreşim davranışlarını önemli ölçüde etkilediğini ortaya koymaktadır.

Free Vibration Analysis of Syntactic Foam Curved Beams by Differential Quadrature Method

Highlights:

- Syntactic foam
- Vibrations analysis
- Differential quadrature method

Keywords:

- Syntactic foam
- Vibration analysis
- Numerical analysis
- Differential quadrature method

ABSTRACT:

In this study, the free vibration analysis of syntactic foam curved beams with two simply supported ends was numerically investigated by the Differential Quadrature Method (DQM). The displacement field was expressed according to classical beam theory, and motion equations were derived by Newton's laws of motion. For this purpose, a DQM code was developed using MATLAB, and the natural frequencies of structures were obtained to examine the effects of material parameters such as microballoon (MB) volume fractions, MB densities, as well as geometric parameters like curvature angle and curvature radius on the free vibration analysis of epoxy/glass microballoon-based syntactic foam curved beams. The results obtained from the research indicate that MB volume fractions, densities, and the geometric characteristics of curved beams significantly influence the vibration behavior of syntactic foam curved beams.

GİRİŞ

Kompozit malzemeler, diğer birçok malzemeye kıyasla üstün özelliklere sahip olmaları sebebiyle günümüzde mühendislik alanında birçok yapıda kullanılmaktadır. Bu özellikler arasında rijitlik, enerji yutma kapasitesi, yorulma dayanımı, aşınma direnci ve korozyon direnci gibi faktörler bulunmaktadır. Matris içerisinde elyaflar rastgele, tek yönlü veya farklı türden elyaflar şeklinde takviye edilmiş olabilmektedir. Kompozit malzemelerin çeşitli yüklenme koşullarında kullanılabilmesi için mekanik özelliklerini ve tabakaların yönlendirme açılarını değiştirme olanağı vardır. Bu yapısal değişiklikler, günümüzde otomobil, uçak ve uzay endüstrilerinde yaygın olarak kullanılan bu malzemelerin titreşim davranışlarının araştırılmasını gerektirir. Kompozit yapıların dinamik davranışlarının incelenmesi hususunda birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda malzeme ve geometrik parametrelerin, yapının enerji yutma kapasitesi, doğal frekans ve mod şekilleri gibi dinamik davranışı üzerindeki etkileri nümerik (Galerkin metodu, Hamilton prensibi, Sonlu elemanlar yöntemi, Ritz yöntemi, Diferansiyel Quadrature metodu vb.) ve deneysel olarak incelenmiştir. Srinivasa ve ark., 2014; Osman ve Suleiman, 2017).

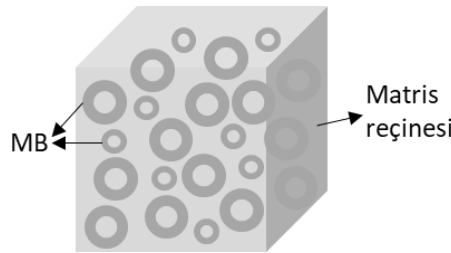
Düz kiriş ve plakalardan farklı olarak titreşim karakteristiklerinin analizi daha kompleks olan ve uçak, otomobil, savunma sanayi vb. alanlarda kullanılan kompozit eğri kirişlerin dinamik analizlerinin incelenmesi oldukça önemlidir. Literatürde bu yapıların titreşim ve elastik kararlılıkları ile ilgili çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Tabakalı kompozit eğri kirişlerin statik ve titreşim analizi hususunda klasik kiriş teorisi, birinci mertbe kayma deformasyon teorisi, yüksek mertbe kayma deformasyon teorisi gibi teoriler kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiş ve bu denklemler Ritz, Galerkin, sonlu elemanlar yöntemleri gibi nümerik yöntemler kullanılarak çözülmüştür. Farklı sınır şartlarının, tabaka dizilişlerinin ve eğri kiriş geometrik parametrelerinin doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. (M. Qatu, 1992; Kadioglu ve Iyidogan, 2009; Hajianmaleki ve Qatu, 2012). Sayyad ve Avhad (2022), yüksek mertbeden kiriş teorisi kullanarak, enine kayma ve normal gerilmelerin etkilerini hesaba katan, yani kalınlık gerilmesi etkilerini içeren eğri bir kirişin serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Moghaddasi ve Kiani (2022), grafen plakalarla takviye edilmiş tabakalı kompozit eğri kirişin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim tepkilerini incelemişlerdir. Eğri kirişin tabaka sayısındaki, eğrilik yarıçapındaki, tabaka kalınlığındaki ve kiriş uzunluğundaki değişimlerin doğal frekanslar üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Karamanli ve ark. (2023), çeşitli kayma deformasyon teorilerini kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş eğri kirişlerin bükülme, serbest titreşim ve burkulma tepkilerini sonlu eleman metodu ile araştırmışlardır.

Son yıllarda, matris elemanına küresel boş mikro balonlar dahil edilerek oluşturulan kompozit malzemeler geliştirilmiştir. Sentaktik köpük (SK), iki fazlı kapalı hücreli kompozit malzemelerdir (Şekil 1). Bu malzemeler, düşük yoğunluklu boş mikro taneciklerin (mikro balonlar) matris malzemesine eklenmesiyle elde edilmektedir.

SK'lerdeki MB malzemeleri metaller, seramikler, cam, polimerler, karbon vb. olabilir. Matris malzemeleri olarak silikonlar, fenolik reçineler, polyesterler, poliüretanlar, epoksi reçineler vb. polimerler kullanılmaktadır (Anirudh ve ark., 2022).

SK, yüksek hasar toleransı, düşük nem emme, yüksek sönümlenme kapasitesi, yüksek sertlik, yüksek özgül mukavemet ve mükemmel ısı yalıtımı gibi faydalı özelliklere sahiptir. Bu özellikleri nedeniyle son yıllarda otomotiv, denizcilik, sönümlenme panelleri, havacılık ve çarpışma güvenliği gibi uygulamalarda kullanımı giderek artmaktadır (Gupta ve ark., 2010; Skoptsov ve ark., 2016; Anirudh ve ark., 2022).

Literatürde SK'ler ile ilgili yayınlanmış çalışmalar incelendiğinde bu yapıların eğilme, basma, çekme, enerji soğurma, düşük hızlı darbe davranışları gibi mekanik testlerinin genellikle deneysel olarak yapıldığı görülmektedir (Gupta ve ark., 2008; Poveda ve ark., 2014; Liang ve ark., 2017). SK'lerin serbest titreşim analizi, doğal frekansları, mod şekilleri ve sönümlenme özelliklerinin belirlenmesi tasarım aşamasında oldukça büyük önem arz etmektedir. Bu nedenlerden dolayı bu malzemelerin serbest titreşim analizi mühendislik tasarımı için gereklidir. SK'lerin mekanik özelliklerinin incelenmesi üzerine çalışmalar olmasına rağmen, yazarların bilgisi dahilinde bu malzemelerden oluşan eğri kiriş yapıların deneysel ve nümerik yöntemlerle dinamik özelliklerini inceleyen çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmada, literatüre katkı sağlamak amacıyla, epoksi/cam MB bazlı SK eğri kirişlerin MB yoğunluklarının ve hacim oranlarının serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri DQM kullanılarak nümerik olarak incelenmesi amaçlanmıştır.



Şekil 1. Sentaktik köpük mikro yapısının şematik gösterimi

MATERYAL VE METOT

DQM, ilk olarak Bellman ve Casti (Bellman ve Casti, 1971) tarafından önerilmiş ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde diğer sayısal metotlara göre daha az düğüm kullanarak yaklaşık sonuçlar üretmiştir. Bu metot, belirli bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre bir fonksiyonun kısmi türevini hesaplarken, o değişkenin bölgesindeki tüm ayrık noktaların fonksiyon değerlerini ağırlıklı olarak doğrusal bir toplam olarak yaklaşıtırır (Siddiqi, 1995). İki boyutlu bir $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) ayrık noktaları için, r 'inci mertebeden x 'e göre kısmi türevi, s 'inci mertebeden y 'ye göre kısmi türevi ve r 'inci ve s 'inci mertebelerden x 'e ve y 'ye göre kısmi türev ifadeleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\left. \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j); r = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{N_y} B_{ik}^{(s)} f(x_i, y_k); s = 1, 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} f}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right) = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} f(x_k, y_m); i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3)$$

Burada, N_x ve N_y , sırasıyla x koordinat yönündeki düğüm sayısını ve y koordinat yönündeki düğüm sayısını ifade etmektedir. Burada, $f(x, y)$ fonksiyonunun r 'inci mertebeden x -kısmi türevi ve s 'inci mertebeden y -kısmi türevi için ağırlık katsayıları sırasıyla $A_{ij}^{(r)}$ ve $B_{ij}^{(s)}$ ifadeleri ile temsil edilmektedir. Bu ifadeler aşağıda verildiği gibidir (Bellman ve Casti, 1971; Siddiqi, 1995).

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; i, j = 1, 2, \dots, N_x, j \neq i \text{ ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (4)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; i, j = 1, 2, \dots, N_y, j \neq i \text{ ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (5)$$

$$A_{ij}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve} \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (6)$$

$$B_{ij}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve} \quad s = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (7)$$

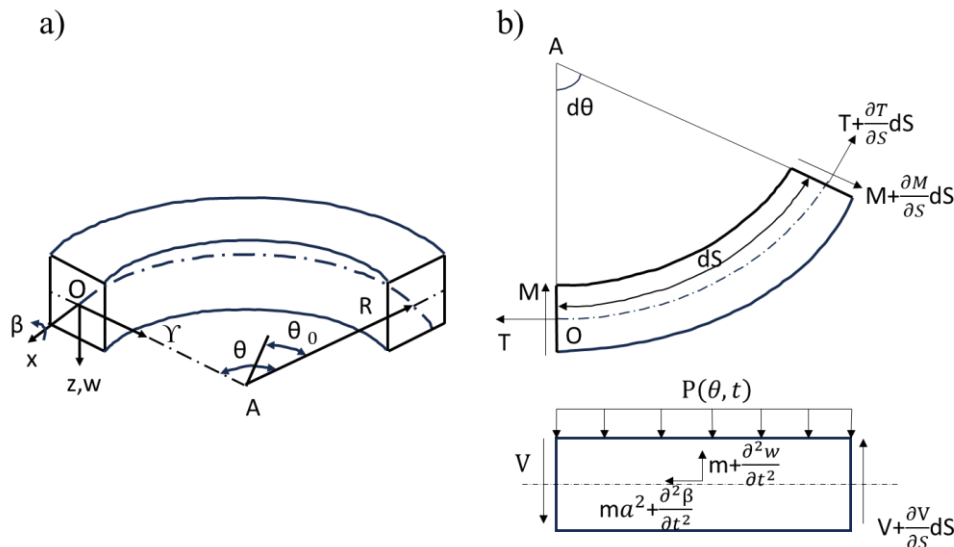
Düğüm noktalarının seçimi için aşağıda verilen ifadeler kullanılmaktadır (Siddiqi, 1995).

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{n_x-1} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (8)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(j-1)\pi}{n_y-1} \right]; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (9)$$

Eğri Kirişin Hareket Denklemleri

Eğri kirişin geometrik özellikleri Şekil 2.a'da verilmiştir. Kirişin uzunluğu boyunca olan eksen, düşey eksen ve radyal eksen burada sırasıyla x, z ve Y sembolleri ile ifade edilmektedir. Eğri kirişin yer değiştirme bileşenleri β ve w ile temsil edilmektedir. β , x ekseninde yaptığı açı ve w, z eksenine göre yapmış olduğu yer değiştirmedir. Kirişin başlangıcı ile bitimi arasındaki eğrilik açısı ise θ' dir. Kirişin eğrilik yarıçapı ise R ile ifade edilmektedir. Hareket denklemleri çıkarılırken çalışma kapsamında ele alınan eğri kirişin kalınlığının boyuna oranla oldukça küçük olması sebebiyle eğilme esnasında meydana gelen dönmeden kaynaklı ortaya çıkan atalet kuvvetleri, kısaca dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmesi ihmal edilmiştir.



Şekil 2. Eğri kiriş: a) geometrik özellikler b) eğri kirişe etkiyen moment ve kuvvetler (Tan ve Shore, 1968)

Eğri kiriş üzerinden $d\theta$ kadarlık bir açı ile dx uzunluğunda bir parça alınarak, bu eğri kiriş parçası üzerinde etki eden moment ve kuvvetler Şekil 2.b'de gösterilmiştir. Burada, V kesme kuvvetini, M eğilme momentini, T burulma momentini, $p(\theta, t)$ kirişe tesir eden dinamik kuvvet yoğunluğunu ve ayrıca kirişin yer değiştirme ve atalet etkileri $m\ddot{w}$ ve $ma^2\ddot{\beta}$ ifadeleri ile gösterilmektedir. Eğri kirişin yay uzunluğunu ifade eden dS , $Rd\theta$ olarak tanımlanmıştır.

Şekil 2 de gösterilen eğri kirişin x, z ve Y eksenleri boyunca denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (Tan ve Shore, 1968).

x ekseninde kuvvet dengesinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{M}{R} - ma^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

z ekseninde kuvvet dengesinden aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$p - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Y eksenini boyunca kuvvet dengesinden, aşağıda verilen denklem yazılabilir.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{T}{R} - V = 0 \quad (12)$$

Eşitlik 12. nin θ 'ya göre bir kez türevi alınıp ve eşitliğin her iki tarafı $-1/R$ ile çarpılırsa Eşitlik 13. elde edilir.

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

Eşitlik 13. ile Eşitlik 11. toplanıp, gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eşitlik 14 elde edilir.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \quad (14)$$

Eğri bir kirişin elastik eğri denklemlerinde, EI eğilme direngenliğini, G kayma modülünü, KT Saint-Venant burulma sabitini, E elastisite modülünü ve I_w ise çarpılma sabitini göstermektedir. Eğilme momenti ve burulma momenti ise aşağıdaki şekilde tanımlanabilir (Tan ve Shore, 1968; Kang ve ark., 1996).

$$\frac{M}{EI} = \frac{\beta}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (15)$$

$$\frac{T}{GK_T} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{EI_w}{GK_T} \left(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \beta}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \quad (16)$$

Eşitlik 15. Ve Eşitlik 16., Eşitlik 10. da yerine yazılırsa Eşitlik 17. elde edilir.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{GK_T}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{GK_T}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{EI}{R^3} \frac{\partial^3 \beta}{\partial \theta^3} - \frac{EI_w}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) - \left[\frac{1}{R} \left(\frac{EI\beta}{R} - \frac{EI}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + ma^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

Eşitlik 17. de gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde Eşitlik 18. elde edilir.

$$\frac{EI_w}{R^5} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \left(\frac{GK_T + EI}{R^3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{EI_w}{R^4} \frac{\partial^4 \beta}{\partial \theta^4} - \frac{GK_T}{R^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} + \frac{EI}{R^2} \beta - ma^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

Eşitlik 15. ve Eşitlik 16., Eşitlik 14. de yerine yazılırsa Eşitlik 19 elde edilir.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{EI\beta}{R} - \frac{EI}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{GK_T}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{GK_T}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{EI_w}{R^3} \frac{\partial^3 \beta}{\partial \theta^3} - \frac{EI_w}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \quad (19)$$

19 nolu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(EI + \frac{EI_w}{R^2} \right) \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{GK_T}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{EI_w}{R^5} \frac{\partial^4 \beta}{\partial \theta^4} - \left(\frac{EI + GK_T}{R^3} \right) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik 20. deki, $w(z,t)$ ve $\beta(z,t)$ değerleri aşağıda verildiği gibi harmonik fonksiyon formunda tanımlanıp daha sonra bu Eşitlik 20. de yerine yazılırsa;

$$w(z, t) = W(\theta) \sin(wt) \quad (21)$$

$$\beta(z, t) = \Phi(\theta) \sin(wt) \quad (22)$$

$$\left(EI + \frac{EI_w}{R^2} \right) \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} - \frac{GK_T}{R^4} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{EI_w}{R^5} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} - \left(\frac{EI + GK_T}{R^3} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - m\omega^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eşitlik 21. ve Eşitlik 22., Eşitlik 18. de yerine yazılır ve p kuvveti ihmal edilirse;

$$\frac{EI_w}{R^5} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} - \left(\frac{GK_T + EI}{R^3} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{EI_w}{R^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} - \frac{GK_T}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{EI}{R^2} \Phi - ma^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik 23. ve Eşitlik 24. ifadelerinin boyutsuz hale getirilmesi için aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir (Kang ve ark., 1996).

$$X = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \tilde{D} = \frac{EI_w}{EIR^2}, \quad \tilde{C} = \frac{GK_T}{EI} \quad \bar{\omega} = \left[\frac{m(R\theta_0)^4}{\pi^4 EI} \right]^{\frac{1}{2}} \omega \quad (25)$$

Eşitlik 25. de belirtilen boyutsuz parametreler, Eşitlik 23. ve Eşitlik 24. denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{1}{\pi^4 R \xi^2} \tilde{D} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta_0^2} - \frac{\theta_0^2}{\pi^4 R \xi^2} (1 + \tilde{C}) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_0^2} + \frac{1}{\pi^4 \xi^2} \tilde{D} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta_0^4} - \frac{\theta_0^2}{\pi^4 \xi^2} \tilde{C} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_0^2} + \frac{\theta_0^4}{\pi^4 \xi^2} \Phi - \bar{\omega}^2 \Phi = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{\pi^4} (1 + \tilde{D}) \frac{\partial^4 W}{\partial \theta_0^2} - \frac{\theta_0^2}{\pi^4} \tilde{C} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_0^2} + \frac{R}{\pi^4} \tilde{D} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta_0^4} - \frac{R\theta_0^2}{\pi^4} (1 + \tilde{C}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_0^2} - \bar{\omega}^2 W = 0 \quad (27)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğri kirişe ait basir mesnet sınır şartı ise aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$\text{Basit mesnet: } X=0 \text{ veya } X=1' \text{ de; } W = \Phi = W'' = \Phi'' = 0 \quad (28)$$

Eğri kirişlerin boyutsuz hareket denklemlerini temsil eden Eşitlik 26. ve Eşitlik 27. ifadelerine DQM uygulanırsa;

$$\frac{1}{\pi^4 R \xi^2} \tilde{D} \sum_{j=1}^N D_{ij} W_j - \frac{\theta_0^2}{\pi^4 R \xi^2} (1 + \tilde{C}) \sum_{j=1}^N B_{ij} W_j + \frac{1}{\pi^4 \xi^2} \tilde{D} \sum_{j=1}^N D_{ij} \Phi_j - \frac{\theta_0^2}{\pi^4 \xi^2} \tilde{C} \sum_{j=1}^N B_{ij} \Phi_j + \frac{\theta_0^4}{\pi^4 \xi^2} \Phi_i - \bar{\omega}^2 \Phi_i = 0 \quad (29)$$

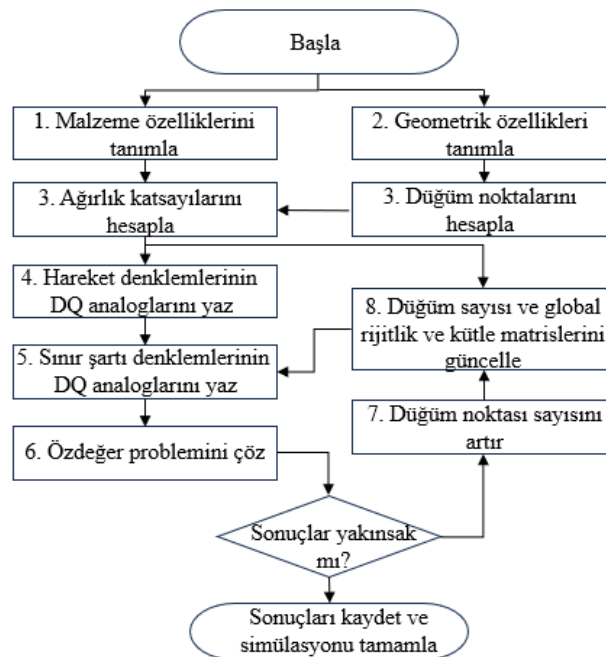
$$\frac{1}{\pi^4} (1 + \tilde{D}) \sum_{j=1}^N D_{ij} W_j - \frac{\theta_0^2}{\pi^4} \tilde{C} \sum_{j=1}^N B_{ij} W_j + \frac{R}{\pi^4} \tilde{D} \sum_{j=1}^N D_{ij} \Phi_j - \frac{R\theta_0^2}{\pi^4} (1 + \tilde{C}) \sum_{j=1}^N B_{ij} \Phi_j - \bar{\omega}^2 W_i = 0 \quad (30)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eşitlik 28. de verilen basit mesnet sınır şartı ifadelerine DQM uygulanırsa aşağıda verilen eşitlikler elde edilir.

$$X=0' \text{ da } W_1 = \Phi_1 = 0; \quad X=0+\delta' \text{ da } \sum_{j=1}^N B_{2j} W_j = \sum_{j=1}^N B_{2j} \Phi_j = 0 \quad (31)$$

$$X=1-\delta' \text{ da } \sum_{j=1}^N B_{(N-1)j} W_j = \sum_{j=1}^N B_{(N-1)j} \Phi_j = 0; \quad X=1' \text{ de } W_N = \Phi_N = 0 \quad (32)$$



Şekil 3. DQM akış diyagramı

BULGULAR VE TARTIŞMA

Yapılan bu çalışmada, SK eğri kirişin matematiksel modeli DQM'ye dayalı olarak MATLAB programı (Şekil 3) vasıtasıyla hazırlanmıştır. Sunulan DQM'nin eğri kirişlerin serbest titreşim analizindeki doğruluğunu kontrol etmek için sayısal örnekler sunulmuş ve sonuçlar çeşitli kiriş teorilerinin ve farklı çözüm metotlarının sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması:

Sunulan DQM'nin formülasyonunun geçerliliği, izotropik ve kompozit malzemelere sahip eğri kirişler için bazı doğal frekanslar hesaplanarak kanıtlanmıştır. Çizelge 1, çeşitli eğrilik açıları ve yarıçapları için izotropik malzemeli, her iki ucu basit mesnetli eğri kirişlerin doğal frekans değerlerinin karşılaştırmasını göstermektedir. Mevcut DQM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, Culver (1967), Shore ve Chaudhuri (1972), Yoo ve Fehrenbach (1981) ve Yoon ve ark. (2006) tarafından sunulan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ele alınan eğri kirişin geometrik ve malzeme özellikleri şu şekildedir: $A=9.297 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $I_x=1.137 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_y=3.871 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $K_T=1.471 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I=5.559 \times 10^{-7} \text{ m}^6$, $E=200 \text{ GPa}$, $G=77.2 \text{ GPa}$, $\rho=7855 \text{ kg/m}^3$.

Çizelge 1'de görüldüğü gibi, DQM'den elde edilen sonuçlar ile diğer araştırmalardan elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum bulunmaktadır.

Çizelge 1. Çeşitli eğrilik açıları ve yarıçapları için izotropik malzemeli, her iki ucu basit mesnetli eğri kirişlerin doğal frekans değerlerinin karşılaştırması

Eğrilik açısı (derece)	Eğrilik yarıçapı (m)	Bu çalışma (N=13)			Shore ve Chaudhuri (1972)		Yoo ve Fehrenbach (1981)		Yoon ve ark. (2006)	
		ω_1 (rad/s)	ω_1 (rad/s)	Fark (%)	ω_1 (rad/s)	Fark (%)	ω_1 (rad/s)	Fark (%)	ω_1 (rad/s)	Fark (%)
10	29.350	202.7	202.5	0.1	203.3	0.3	204.7	1.0	201.3	0.7
30	9.784	162.7	162.2	0.3	164.7	1.2	165.8	1.9	160.9	1.1
50	5.870	121.3	120.9	0.3	122.8	1.2	121.3	0.0	120.1	1.0
70	4.194	89.1	88.9	0.2	90.0	1.0	89.3	0.2	88.3	0.9
90	3.261	64.8	64.6	0.3	65.2	0.6	64.0	1.2	64.1	1.1

Parametrik Çalışma

DQM ile elde edilen sonuçlar literatürdeki farklı çözüm metotlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılıp modelin doğruluğu test edildikten sonra SK eğri kirişin malzeme özelliği, MB yoğunluğu, MB hacim oranı ve geometrik özelliği gibi çeşitli tasarım parametrelerinin doğal frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir. Eğri kiriş, iki kenarı basit mesnetli sınır koşulu altında, çeşitli MB hacim oranı ve yoğunluklarına sahip SK ve matris reçinesinden oluşan kompozit bir yapı olarak modellenmiştir. Çalışmada ele alınan SK malzemelerin elastik özellikleri, Çizelge 2 ve Çizelge 3'teki veriler kullanılarak Bardella ve Genna (2001)'nin çalışmasındaki karışım oranı ifadeleri kullanılarak hesaplanmıştır ve bu özellikler Çizelge 4'te verildiği gibidir. Çalışma kapsamında ele alınan SK eğri kirişin geometrik özellikleri şu şekildedir: $A=9.297 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $I_x=1.137 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $I_y=3.871 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $K_T=1.471 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $I=5.559 \times 10^{-7} \text{ m}^6$.

Çizelge 2. SK'lerde kullanılan MB'lerin özellikleri (Porfiri ve Gupta, 2009)

MB türü	Yoğunluk (kg/m^3)	Ortalama çap (μm)	Duvar kalınlığı (μm)	Yarıçap oranı η (r_i / r_o)
S ₂₂	220	35	0.521	0.970
K ₃₇	370	45	1.024	0.948
K ₄₆	460	40	1.289	0.936

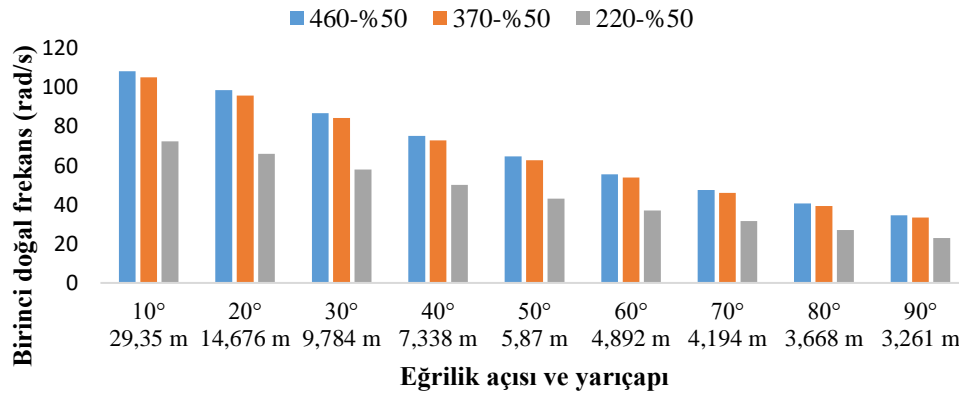
r_i : MB'nin iç yarıçapı/ r_o : MB'nin dış yarıçapı

Çizelge 3. SK’de kullanılan malzemelerin yoğunluğu ve elastik sabitleri (Porfiri ve Gupta, 2009)

Malzeme	Yoğunluk (kg/m ³)	Poisson oranı (ν_s)	Elastisite modülü (GPa)
Epoksi reçine	1160	0.35	2.752
Cam MB	2540	0.21	60

Çizelge 4. SK’de kullanılan malzemelerin yoğunluğu ve elastik sabitleri

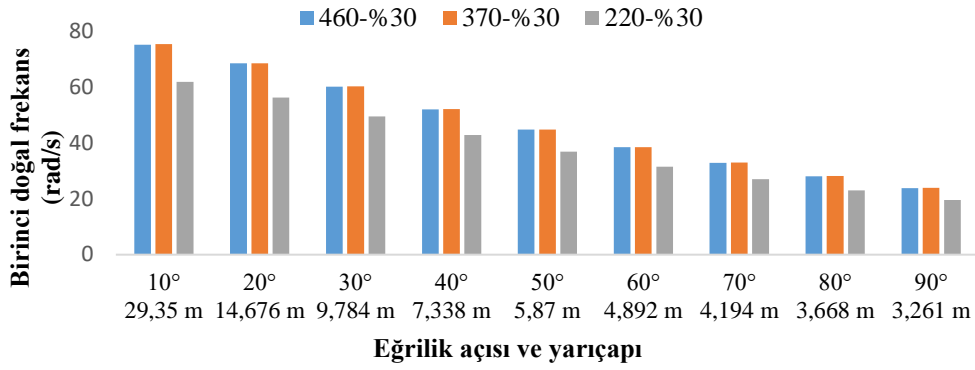
MB yoğunluğu (ρ_m kg/m ³)	460		370		220	
MB hacim oranı (V_m)	%50	%30	%50	%30	%50	%30
E_s (GPa)	4.94	3.06	4.69	2.99	1.96	1.83
ν_s (Poisson oranı)	0.295	0.319	0.300	0.321	0.325	0.336
G_s (GPa)	1.91	1.16	1.80	1.13	0.74	0.69
Teorik yoğunluk (kg/m ³)	680	874	684	852	601	772

**Şekil 4.** MB hacim oranı %50 olan SK’ler için birinci doğal frekanslar

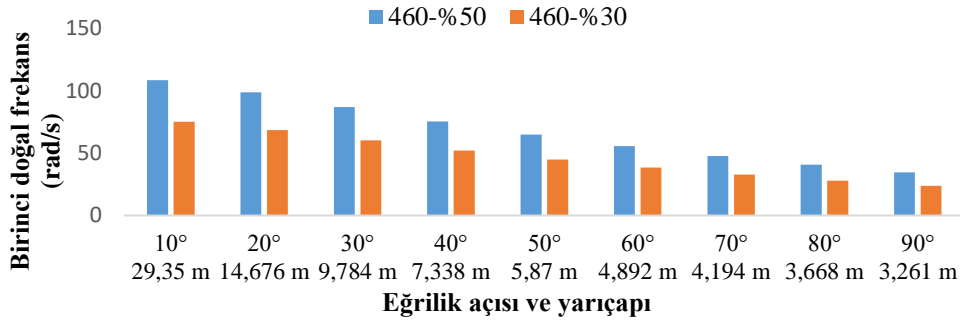
Çeşitli eğrilik açısına, yarıçapına ve %50 MB hacim oranına sahip SK eğri kirişlerin, MB yoğunluklarındaki değişimin birinci doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 4’te gösterilmiştir. Geometrik olarak herhangi bir eğrilik açısına ve yarıçapına sahip eğri kirişte, MB yoğunluğu azaldıkça (460 kg/m³’ten 220 kg/m³’e doğru) birinci doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu durumun nedeni, yapı içerisinde daha düşük yoğunluğa sahip MB kullanıldıkça yapının rijitliğinde azalmanın meydana gelmesidir. Ayrıca Şekil 4’ten, eğrilik açısı değerleri artıp (10°’den 90°’ye doğru) bununla beraber eğrilik yarıçapı değerleri azaldıkça (29,35 m’den 3,261 m’ye doğru) SK eğri kirişlerin doğal frekans değerlerinde azalma olduğu tespit edilmektedir. Bunun sebebi ise, eğri kirişin eğrilik açısı arttıkça yapının rijitliğinin azalmasıdır.

Şekil 5’te, çeşitli eğrilik açısına, yarıçapına ve %30 MB hacim oranına sahip SK eğri kirişlerin, MB yoğunluklarındaki değişimin birinci doğal frekanslar üzerindeki etkisini göstermektedir. Yapının geometrik özellikleri olan eğrilik açısı ve yarıçapı değerlerinin tamamında, yapı içerisinde kullanılan ve %30 hacim oranına sahip MB’lerden yoğunlukça daha büyük olanı tercih edilirse (örneğin 220 kg/m³ yerine 460 kg/m³) yapının doğal frekansı daha yüksek olarak elde edilmektedir. Ayrıca Şekil 5 incelendiğinde, eğrilik açısı arttıkça yapının doğal frekansları azalmaktadır.

Şekil 6’da MB yoğunluğu 460 kg/m³ olan ve çeşitli eğrilik açısı ve yarıçapına sahip SK köpük eğri kirişlerin, MB hacim oranlarındaki değişime karşılık birinci doğal frekanslarındaki değişim görülmektedir. Yapının eğrilik açısı arttıkça, rijitliğinin azalması sebebiyle SK eğri kirişlerin birinci doğal frekansları azalmaktadır. Ayrıca, MB yoğunluğu 460 kg/m³ değerinde sabit olan eğri kirişlerde, MB hacim oranı %50 olan yapıların birinci doğal frekansı MB hacim oranı %30 olan yapılara göre daha yüksektir. Bu durumun sebebi ise yapı içerisindeki MB hacim oranı daha yüksek olduğu takdirde, yapının yoğunluğunun daha az olmasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 5. MB hacim oranı %30 olan SK'ler için birinci doğal frekanslar

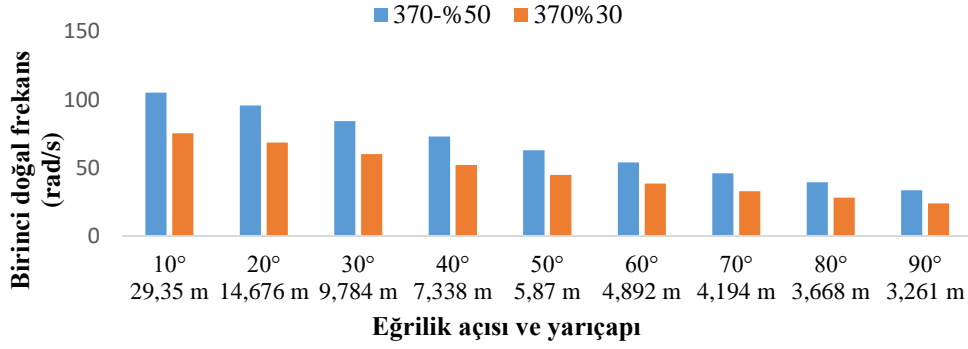
Şekil 6. MB yoğunluğu (ρ_{MB}) 460 kg/m³ olan SK'ler için birinci doğal frekanslar

MB yoğunluğu 370 kg/m³ olan ve çeşitli eğrilik açısı ve yarıçapına sahip SK eğri kirişlerin, MB hacim oranlarındaki değişime karşılık birinci doğal frekanslarındaki değişim Şekil 7'de verilmiştir. Eğrilik açısı ve yarıçapı değeri en yüksek olan SK'lerin birinci doğal frekanslarının, en düşük eğrilik açısına ve yarıçapına sahip olanlarınkine kıyasla daha düşük olduğu Şekil 7'den açıkça görülmektedir. Ayrıca Şekil 7 incelendiğinde, MB yoğunluğu 370 kg/m³ değerinde sabit olan eğri kirişlerde, MB hacim oranı %50'den %30 değerine doğru azaldığında birinci doğal frekans değerlerinin de azaldığı sonucuna varılmaktadır. Bu durumun sebebi ise, SK eğri kirişin MB yoğunluğu sabit tutulup MB hacim oranı azaldığı takdirde, yapının rijitliğinde azalma meydana gelmesi ve yoğunluğunda ise artış meydana gelmesidir.

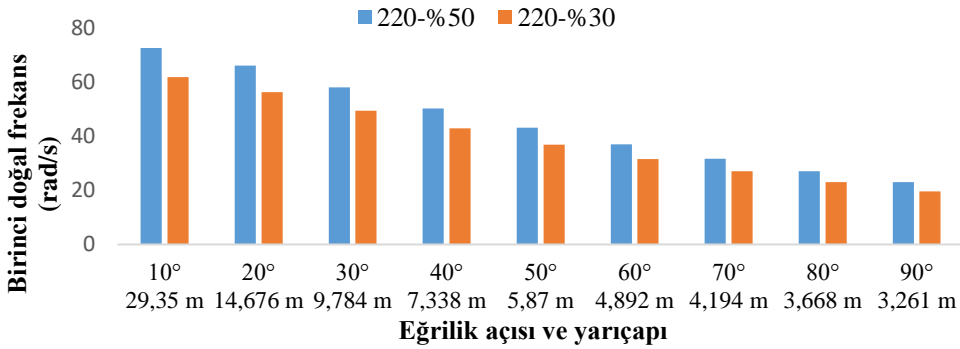
Çeşitli eğrilik açısına, yarıçapına sahip ve MB yoğunluğu 220 kg/m³ olan SK eğri kirişlerin, MB hacim oranlarındaki değişime karşılık birinci doğal frekanslarındaki değişim Şekil 8'de görülmektedir. Eğrilik açısı ve yarıçapı arttıkça, yapının rijitliğinin azalması sebebiyle SK eğri kirişlerin birinci doğal frekansları azalmaktadır. Ayrıca, MB yoğunluğu 220 kg/m³ değerinde sabit olan eğri kirişlerde, MB hacim oranı %50 olan yapıların birinci doğal frekansı MB hacim oranı %30 olan yapılara göre daha yüksek olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumun sebebi ise yapı içerisindeki MB hacim oranı arttıkça yapının yoğunluğunun azalmasıdır.

Şekil 9'da, 460 kg/m³ MB yoğunluğuna ve %50 MB hacim oranına sahip SK eğri kirişin, eğrilik açısı ve yarıçaplarındaki değişime karşılık ilk üç doğal frekanslarındaki değişim görülmektedir. Şekil 9 incelendiği takdirde, yapının eğrilik açısı değerleri arttıkça birinci doğal frekansların azaldığı sonucuna varılmaktadır. İkinci doğal frekans değerlerinin ise, eğri kirişin eğrilik açısı değerleri arttıkça genellikle azaldığı tespit edilmektedir. Üçüncü doğal frekans değerlerine bakıldığında ise, eğrilik açısı değerleri arttıkça eğri kirişin üçüncü doğal frekans değerlerinin genellikle arttığı görülmektedir.

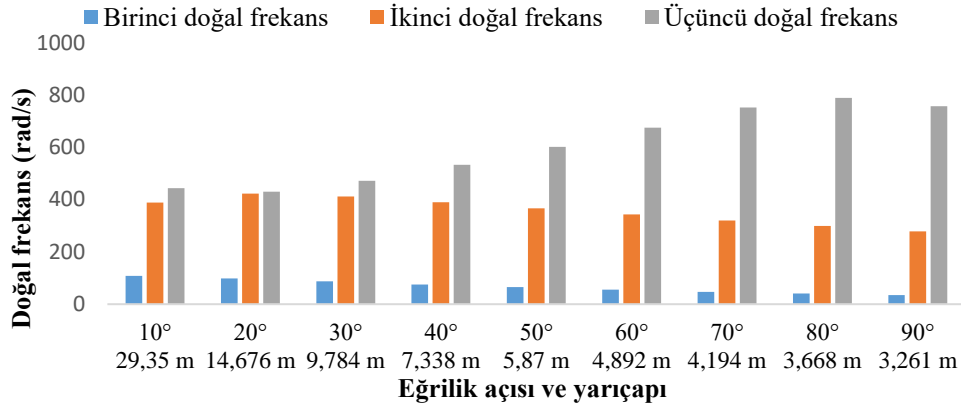
Şekil 10'da, eğrilik açısı ve yarıçapı sırasıyla 10° ve 29,35 m olan SK eğri kirişlerin MB hacim oranları ve yoğunluklarındaki değişime karşılık ilk üç doğal frekanslarındaki değişim verilmiştir.



Şekil 7. MB yoğunluğu (ρ_{MB}) 370 kg/m³ olan SK'ler için birinci doğal frekanslar



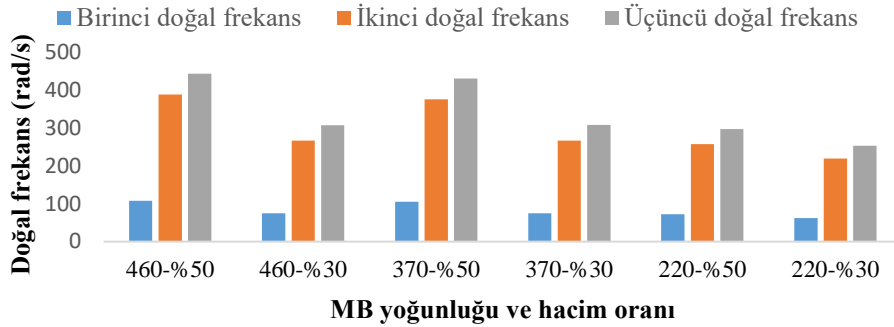
Şekil 8. MB yoğunluğu (ρ_{MB}) 220 kg/m³ olan SK'ler için birinci doğal frekanslar



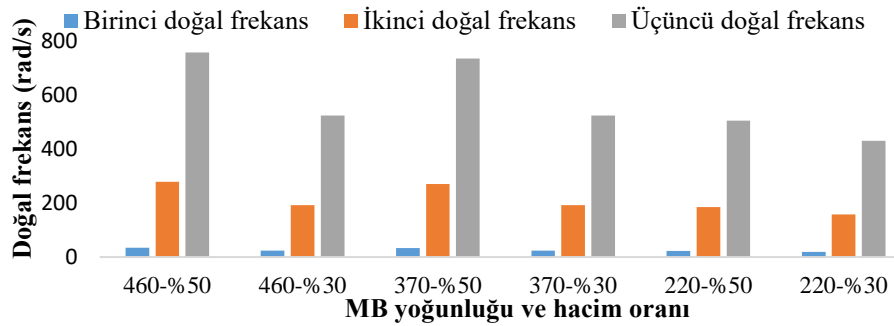
Şekil 9. MB yoğunluğu (ρ_{MB}) 460 kg/m³ ve MB hacim oranı %50 olan SK eğri kirişlerin ilk üç doğal frekansları

Şekil 10 incelendiğinde, örneğin 460 kg/m³ MB yoğunluğuna ve %50 MB hacim oranına sahip eğri kirişin birinci, ikinci ve üçüncü doğal frekans değerleri sırasıyla 108,3 rad/s, 388,6 rad/s ve 443,6 rad/s olarak elde edilmiştir. MB hacim oranı %50 olan SK eğri kirişlerin, MB yoğunluğu sırasıyla 460, 370 ve 220 kg/m³ değerlerine doğru azaldıkça üç doğal frekans değerlerinin de azaldığı gözlemlenmektedir. Bu durum yapının rijitliğindeki ve yoğunluğundaki değişim ile yakından ilişkilidir. MB hacim oranı sabit iken yapı içerisindeki MB yoğunluğu azaldıkça SK eğri kirişin rijitliği azalmakta ve aynı zamanda yoğunluğu artmaktadır ve bunun neticesinde de yapının doğal frekansları azalmaktadır. Şekil 10'dan, MB hacim oranı %30 olan SK eğri kirişler için MB yoğunluğu sırasıyla 460, 370 ve 220 kg/m³ değerlerine doğru azalması durumunda da ilk üç doğal frekans değerleri için benzer bir eğilimin olduğu görülmektedir. Bir diğer önemli sonuç ise MB yoğunlukları 460, 370 ve 220 kg/m³ değerlerinde ayrı ayrı sabit iken, yapının içerisindeki MB hacim oranları sırasıyla %50 ve %30 değerlerine doğru azaltıldığı takdirde ilk üç doğal frekans değerlerinde azalma olduğunun

belirlenmesidir. Bu durum, MB yoğunluğu sabit iken yapı içerisindeki MB hacim oranı azaldığı zaman yapının yoğunluğunda artış meydana gelmesinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 10. Eğrilik açısı 10° ve eğrilik yarıçapı 29,35 m olan SK eğri kirişlerin ilk üç doğal frekansları



Şekil 11. Eğrilik açısı 90° ve eğrilik yarıçapı 3,261 m olan SK eğri kirişlerin ilk üç doğal frekansları

Eğrilik açısı ve yarıçapı sırasıyla 90° ve 3,261 m olan SK eğri kirişlerin MB hacim oranları ve yoğunluklarındaki değişime karşılık ilk üç doğal frekanslarındaki değişim Şekil 11’de verilmiştir. Şekil 11 incelendiği takdirde, MB hacim oranları ve yoğunluklarındaki değişimin doğal frekanslar üzerindeki etkilerinin Şekil 10’da verilen eğilimlere benzer paralel eğilimler sergilediği görülmektedir. MB yoğunluğu ve hacim oranının doğal frekanslara etkileri hususunda elde edilen bulgular ile literatürdeki kiriş ve plaka yapılarının incelendiği çalışmalardan elde edilen sonuçlarla uygunluk gösterdiği tespit edilmiştir (Maraş ve ark., 2019; Şansveren ve Yaman, 2019).

SONUÇLAR

Bu çalışmada, SK eğri kirişin serbest titreşim davranışı, klasik kiriş teorisi ve DQM kullanılarak kirişin yönetici denklem sistemi nümerik olarak çözülmek suretiyle incelenmiştir. Epoksi/cam MB bazlı SK eğri kirişlerin MB hacim oranlarının, MB yoğunluklarının, eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı gibi geometrik parametrelerinin doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bu araştırma, tasarımcıların uygulama ve yükleme koşullarına göre uygun malzeme ve geometrik özelliklere sahip SK eğri kiriş konfigürasyonlarını seçmelerine yardımcı olur ve bu da maliyet tasarrufu sağlar. İncelenen yapıların titreşim analizinden elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- Eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı değerleri arttıkça yapı içerisindeki MB hacim oranı ve MB yoğunluğu fark etmeksizin yapının doğal frekansları azalmaktadır.
- Yapı içerisindeki MB hacim oranı %50 veya %30 değerinde sabit tutulup MB yoğunluğu sırasıyla 220 kg/m^3 , 370 kg/m^3 ve 460 kg/m^3 olarak arttırıldığında, yapının doğal frekansları artmaktadır.
- Yapı içerisindeki MB yoğunluğu 220 kg/m^3 , 370 kg/m^3 veya 460 kg/m^3 olarak sabit tutulup MB hacim oranı %30 değerinden %50 değerine arttırıldığı takdirde (örneğin 220-%30 konfigürasyonundan 220-%50 konfigürasyonuna doğru), yapının doğal frekanslarında artış görülmektedir.

• SK eğri kiriş konfigürasyonları içerisinde en yüksek doğal frekansa sahip olan yapılar, eğri kirişin eğrilik açısı, yarıçapı, MB hacim oranı ve MB yoğunluğu gibi geometrik ve malzeme özelliklerindeki değişime göre farklılık göstermektedir.

Çıkar Çatışması

Yazar herhangi bir çıkar çatışmasının olmadığını beyan eder.

KAYNAKLAR

- Anirudh, S., Jayalakshmi, C., Anand, A., Kandasubramanian, B., ve Ismail, S. O. (2022). Epoxy/hollow glass microsphere syntactic foams for structural and functional application-A review. *European Polymer Journal*, 171, 111163.
- Bardella, L., ve Genna, F. (2001). On the elastic behavior of syntactic foams. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40-41), 7235-7260.
- Bellman, R., ve Casti, J. (1971). Differential quadrature and long-term integration. *Journal of mathematical analysis and Applications*, 34(2), 235-238.
- Culver, C. G. (1967). Natural frequencies of horizontally curved beams. *Journal of the Structural Division*, 93(2), 189-204.
- Gupta, N., Gupta, S. K., ve Mueller, B. J. (2008). Analysis of a functionally graded particulate composite under flexural loading conditions. *Materials Science and Engineering: A*, 485(1-2), 439-447.
- Gupta, N., Ye, R., ve Porfiri, M. (2010). Comparison of tensile and compressive characteristics of vinyl ester/glass microballoon syntactic foams. *Composites Part B: Engineering*, 41(3), 236-245.
- Hajianmaleki, M., ve Qatu, M. S. (2012). Static and vibration analyses of thick, generally laminated deep curved beams with different boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 43(4), 1767-1775.
- Kadioglu, F., ve Iyidogan, C. (2009). Free vibration of laminated composite curved beams using mixed finite element formulation. *Science and Engineering of Composite Materials*, 16(4), 247-258.
- Kang, K., Bert, C. W., ve Striz, A. G. (1996). Vibration analysis of horizontally curved beams with warping using DQM. *Journal of Structural Engineering*, 122(6), 657-662.
- Karamanli, A., Wattanasakulpong, N., Lezgy-Nazargah, M., ve Vo, T. P. (2023). Bending, buckling and free vibration behaviours of 2D functionally graded curved beams. *Structures*, 55, 778-798.
- Liang, M., Lu, F., ve Li, X. (2017). Dynamic responses and failure of short glass-fiber reinforced syntactic foams. *International Journal of Applied Mechanics*, 9(01), 1750002.
- Maraş, S., Yaman, M., ve Şansveren, M. F. (2019). Dynamic Analysis of Laminated Syntactic Foam Beams. *3rd International Conference on Advanced Engineering Technologies*.
- Moghaddasi, M., ve Kiani, Y. (2022). Free and forced vibrations of graphene platelets reinforced composite laminated arches subjected to moving load. *Meccanica*, 57(5), 1105-1124.
- Osman, M. Y., ve Suleiman, O. M. E. (2017). Free vibration analysis of laminated composite beams using finite element method'. *International Journal of Engineering Research and Advanced Technology (IJERAT)*, 3(2), 5-22.
- Porfiri, M., ve Gupta, N. (2009). Effect of volume fraction and wall thickness on the elastic properties of hollow particle filled composites. *Composites Part B: Engineering*, 40(2), 166-173.
- Poveda, R. L., Achar, S., ve Gupta, N. (2014). Viscoelastic properties of carbon nanofiber reinforced multiscale syntactic foam. *Composites Part B: Engineering*, 58, 208-216.
- Qatu, M. (1992). In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 159(2), 327-338.

- Sayyad, A. S., ve Avhad, P. V. (2022). A new higher order shear and normal deformation theory for the free vibration analysis of sandwich curved beams. *Composite Structures*, 280, 114948.
- Shore, S., ve Chaudhuri, S. (1972). Free vibration of horizontally curved beams. *Journal of the Structural Division*, 98(3), 793-796.
- Siddiqi, Z. A. (1995). Analysis of interacting subdomains in structural mechanics problems by the differential quadrature method: The University of Oklahoma.
- Skoptsov, K. A., Sheshenin, S. V., Galatenko, V. V., Malakho, A. P., Shornikova, O. N., Avdeev, V. V., ve Sadovnichy, V. A. (2016). Particle simulation for predicting effective properties of short fiber reinforced composites. *International Journal of Applied Mechanics*, 8(02), 1650016.
- Srinivasa, C. V., Suresh, Y. J., ve Kumar, W. P. (2014). Experimental and finite element studies on free vibration of skew plates. *International Journal of Advanced Structural Engineering (IJASE)*, 6(1), 48.
- Şansveren, M. F., ve Yaman, M. (2019). The effect of carbon nanofiber on the dynamic and mechanical properties of epoxy/glass microballoon syntactic foam. *Advanced Composite Materials*, 28(6), 561-575.
- Tan, C. P., ve Shore, S. (1968). Dynamic response of a horizontally curved bridge. *Journal of the Structural Division*, 94(3), 761-781.
- Yoo, C. H., ve Fehrenbach, J. P. (1981). Natural frequencies of curved girders. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107(2), 339-354.
- Yoon, K.-Y., Park, N.-H., Choi, Y.-J., ve Kang, Y.-J. (2006). Natural frequencies of thin-walled curved beams. *Finite elements in analysis and design*, 42(13), 1176-1186.