



## Kabuk yoğunluğu değişiminin PITE (Birincil Dolaylı Topografik Etki) üzerindeki etkisi

Aleyna Öztop\*<sup>1</sup>, Ramazan Alpay Abbak<sup>1</sup>, Aydın Üstün<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Konya Teknik Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Türkiye, aleynaoztop@gmail.com; raabbak@ktun.edu.tr

<sup>2</sup> Kocaeli Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Türkiye, aydin.ustun@kocaeli.edu.tr

Kaynak Göster: Öztop, A., Abbak, R. A., & Üstün, A. (2024). Kabuk yoğunluğu değişiminin PITE (Birincil Dolaylı Topografik Etki) üzerindeki etkisi. Geomatik, 9 (1), 97-105

<https://doi.org/10.29128/geomatik.1374075>

### Anahtar Kelimeler

Jeoit belirleme  
Kabuk yoğunluğu  
PITE  
Stokes-Helmert yöntemi  
Topoğrafya

### Araştırma Makalesi

Geliş: 10.10.2023  
Reviz: 16.11.2023  
Kabul: 20.11.2023  
Yayınlanma: 05.02.2024



### Öz

Jeoit belirleme çalışmalarında 1 santimetre doğruluklu jeoit modeli oluşturmak ana hedeftir. Bu hedefin en hızlı ve en pratik şekilde çözülmesi bazı mühendislik problemlerinin çözülmesini kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle jeoit belirlemek için kullanılan yöntemler gün geçtikçe geliştirilmektedir. Stokes-Helmert yaklaşımı klasik jeoit modelleme seçeneklerinden biridir. Sınır değer probleminin çözümünde topoğrafya dikkatli bir şekilde ele alınmaz ise istenen hedefe ulaşmaya engeldir. Stokes-Helmert yaklaşımının son aşamasında PITE'nin (Birincil Dolaylı Topografik Etki) hesabıyla kesin jeoit yüksekliği elde edilmektedir. Yoğunluk değişimi, PITE'nin hesabında ve dolayısıyla, jeoit yüksekliklerinde anlamlı farklılığa neden olur. Bu farkı görmek için bir sayısal yükseklik modeli ve kabuk yoğunluğu modelinden yararlanmak yeterlidir. Topoğrafyayı ilgilendiren yerbilimleri çalışmalarında yoğunluk değeri genelde ortalama  $2.67 \text{ gr/cm}^3$  alınır. Ancak bu değer bazı bölgelerde %20'lere yaklaşan farklılık gösterir. Yoğunluk değişimindeki böyle bir oran PITE hesabından bulunan değerleri desimetre mertebesinde etkiler. Bu çalışmada yoğunluk değişiminin PITE üzerindeki etkisi incelenecektir. Bu sayede ülkemizde santimetre doğruluklu jeoit belirleme çalışmalarına önemli bir katkı sağlanacaktır. PITE değerleri hesap noktasının yüksekliğine ve yoğunluğuna bağlıdır. Sayısal uygulama sonucunda değişken yoğunluklu PITE değerleri -43 cm ile -1 cm arasında değişirken, sabit yoğunluk kullanıldığında bu değerler -39 cm ile 10 cm arasındadır.

## The effect of crustal density variation on PITE (Primary Indirect Topography Effect)

### Keywords

Geoid determination  
Crust Density  
PITE  
Stokes-Helmert Method  
Topography

### Research Article

Received: 10.10.2023  
Revised: 16.11.2023  
Accepted: 20.11.2023  
Published: 05.02.2024

### Abstract

In geoid determination studies, the main goal is to create a geoid model with an accuracy of 1 centimeter. Solving this goal in the fastest and most practical way makes it easier to implement some engineering problems. For this reason, the methods used to determine the geoid are being developed day by day. The Stokes-Helmert approach is one of the classical geoid modeling options. If the topography is not handled carefully in the solution of the boundary value problem, it is an obstacle to achieving the desired goal. In the final stage of the Stokes-Helmert approach, the exact geoid height is obtained by calculating the PITE (Primary Indirect Topographic Effect). The density change causes a significant difference in the PITE's calculation and, therefore, in the geoid heights. To see this difference, it is enough to use the digital elevation model and the crustal density model. In geosciences studies related to topography, the density value is usually taken as an average of  $2.67 \text{ g/cm}^3$ . However, this value varies in some regions, approaching 20%. Such a ratio, which can be observed in the density change, affects the values obtained from the PITE calculation at the decimetre level. In this study, the effect of density change on PITE will be examined. In this way, an important contribution will be made to the centimeter accuracy geoid determination studies in our country. The PITE values depend on the height and density of the calculation point. As a result of numerical application, the density change gives PITE values between -43 cm and -1 cm, while under constant density these values are between -39 cm and 39 cm.

## 1. Giriş

Jeoit (geometrik anlamda yeryüzünün gerçek şekli olarak adlandırdığımız yüzey), her noktasında çekül doğrultularını dik açılarla kesen ve okyanus yüzeyi ile kısmen çakışık olduğu varsayılan yüzey şeklinde ifade edilmiştir (Gauss, 1828). Günümüzde jeoidi yüksek doğrulukla belirlemek jeodezik çalışmalar için hayati önem arz etmektedir (Yılmaz, 2023). Yeryüzündeki noktaların ortometrik yükseklikleri ve deniz tabanının derinliği jeoitten itibaren ölçülür. Ülkemizde altyapı projelerinde ve birçok harita mühendisliği uygulamalarında jeoidi referans alan ortometrik yükseklik kullanılmaktadır (Abbak, 2011).

Fiziksel jeodezinin temel amacı, yeryuvarının gravite alanını dolayısıyla gerçek anlamda jeoidi belirlemektir. Jeoidi yer merkezinden itibaren tanımlamak yerine üzerinde her türlü jeodezik hesabın gerçekleştirildiği dönel elipsoitten olan sapmalarıyla tanımlamak uygulamada bir takım kolaylık sağlar (Abbak, 2021). Bu kapsamda iki farklı yüzey arasındaki bozucu potansiyelin sınır değer probleminin çözülmesi ile jeoidi elde etmek mümkün olmaktadır. Jeoidi gravite alanının bir sınır yüzeyi olarak tanımlamak için jeoit üzerindeki kütleler kaldırılır ve gravite gözlemleri jeoide indirgenir. Topoğrafyanın jeoide olan etkisini en doğru biçimde tespit etmek jeoit belirleme çalışmalarının en önemli hususlarından birisi haline gelmiştir (Demir ve ark., 2018).

Veri türü göz önüne alınarak sınıflandırma yapıldığında, jeoit belirleme için dört temel yöntem sıralanmaktadır. Bunlar; astro-jeodezik, gravimetrik, GNSS-nivelman ve hibrit yöntemlerdir (Abbak, 2021). Bu yöntemlerden gravimetrik yaklaşım bölgesel çalışmalarda yüksek doğruluklu çözüm sağlamaktadır. Gravimetrik jeoit modeli oluşturulmasında gravite verilerinin yanı sıra topoğrafik yükseklikler de kullanılmaktadır. Bu nedenle, jeoit belirlemede topoğrafyanın yoğunluk değeri de önemlidir. Ortalama kabuk yoğunluğu değeri ( $2.67 \text{ gr/cm}^3$ ), gerçekte her bölgede farklı değerlere sahiptir. Bu da topoğrafik düzeltme hesabında kullanılan ortalama yoğunluk değerinin değişken olarak ele alınması anlamına gelmektedir.

Jeoidin yeterli bir doğrulukla belirlenip belirlenemeyeceği yıllardır tartışma konusu olmuştur. Bazı bilim insanları bunun yapılamayacağını söylemiştir. Çünkü yeryuvarı içindeki kütle yoğunluğu dağılımının jeoidi belirli bir doğruluk seviyesine izin verecek kadar doğru bir şekilde bilinmemektedir. Stokes yaklaşımının doğruluğu bu anlamda sorgulanırken, Molodenski'nin kuazijeoit belirleme teorisinin ilgi görmesinin temel nedeni budur (Heiskanen ve Moritz, 1967). GNSS'nin ortaya çıkması ve elipsoidal yüksekliğin hassas bir şekilde ölçülme yeteneği sayesinde bu tartışmaya olan ilgi daha da artmıştır. Son yıllarda uluslararası farklı jeodezik çalışma grupları tarafından yüksek doğruluklu jeoit/kuazijeoit hesaplama çalışmaları gerçekleştirilmektedir. Bu çabaların amacı bir santimetre veya daha yüksek doğrulukla jeoit veya kuazijeoidin belirlenmesidir.

Stokes-Helmert yöntemiyle cm doğruluklu gravimetrik jeoit belirleme çalışmaları 1990'lı yıllarda

başlamıştır. İlk uygulamalar Martinec ve Vanicek (1994a; 1994b) çalışmaları olmuştur. Daha sonra, Novak (2000), Tenzer ve ark., (2003), Ellmann ve Vanicek (2007), Vanicek ve ark., (2013), Foroughi (2018), Guo ve ark., (2019), Vajda ve ark., (2020) Stokes-Helmert yöntemine göre jeoit belirleme konusunu kapsamlı uygulama örnekleriyle ele almıştır. Janak ve ark., (2017) tarafından gerçekleştirilen çalışmada Fransa'nın Auvergne bölgesinde kabuk yoğunluğu hesaba katılarak Stokes-Helmert yöntemiyle jeoit belirleme işlemi gerçekleştirilmiştir. Yöntemin son yıllarda ilgi görmesinin temel sebeplerinden birisi, diğer jeoit belirleme yöntemlerine göre topoğrafyayı daha çok ön planda tutmasıdır.

Stokes-Helmert metodunda, yeryüzünde ölçülen serbest hava gravite anomalilerinden topoğrafik ve atmosferik kütlelerin etkisinin yanı sıra gravite alanının uzun dalga boylu bileşenleri kaldırılır. Elde edilen artık (rezidual) gravite anomalileri ile Stokes integrali uygulanır. Daha sonra çıkarılan atmosferik ve topoğrafik kütlelerin etkisi ve uzun dalga boylu bileşenler yeniden yerine konur. Bu süreçte topoğrafik kütlelerin yerine konmasına birincil dolaylı topoğrafik etki (PITE: Primary Indirect Topography Effect) adı verilir (Ellmann ve Vanicek, 2007). Topoğrafik kütlelerin etkileri belirlenirken yoğunlukla yer kabuğunun yoğunluğu için ortalama değer kullanılır. Ancak kullanılan ortalama yoğunluk değeri yalnızca hesap basitleştirme işleminden ibarettir. Küresel ya da bölgesel kabuk yoğunluk modellerinin ortaya çıkmasıyla birlikte günümüzde kabuk yoğunluğuna bağlı topoğrafik düzeltme değerleri belirli bir yaklaşıkla tahmin edilebilmektedir. Bu çalışmada, kabuk yoğunluğu modeli kullanılarak birincil dolaylı topoğrafik etkinin (PITE) nasıl değiştiği ve bu değişimin jeoit doğruluğuna katkısı incelenmiştir.

## 2. Yöntem

Sayısal uygulama için Fransa'nın Auvergne test bölgesi seçilmiştir. Çalışma sahası,  $45^\circ \leq \varphi \leq 47^\circ$  kuzey paralelleri,  $2^\circ \leq \lambda \leq 4^\circ$  doğu meridyenleri arasında kalan yaklaşık  $40000 \text{ km}^2$  yüzölçümüne sahip bir alanı kaplamaktadır (Şekil 1'de iç çerçevede gösterilen alan). Çalışma sahasında en küçük, ortalama ve en büyük yükseklik değerleri sırasıyla, 500 m, 1000 m ve 1900 m olarak belirlenmiştir. Jeoit modeli hesabında iki katlı entegrasyon söz konusu olduğu için çalışma sahasının dışında da yersel veri olması gerekmektedir. Bu nedenle hesaplamada çalışma sahasının  $1.5^\circ$ lik dışındaki veriler de kullanılmıştır (Şekil 1'deki tüm bölge). Araştırma için girdi verisi olarak; sayısal yükseklik modeli (SRTM1) ve küresel kabuk yoğunluğu modeli (UNBCRUST) kullanılmıştır. Söz konusu verilere ilişkin temel bilgiler aşağıda sırayla verilmiştir.

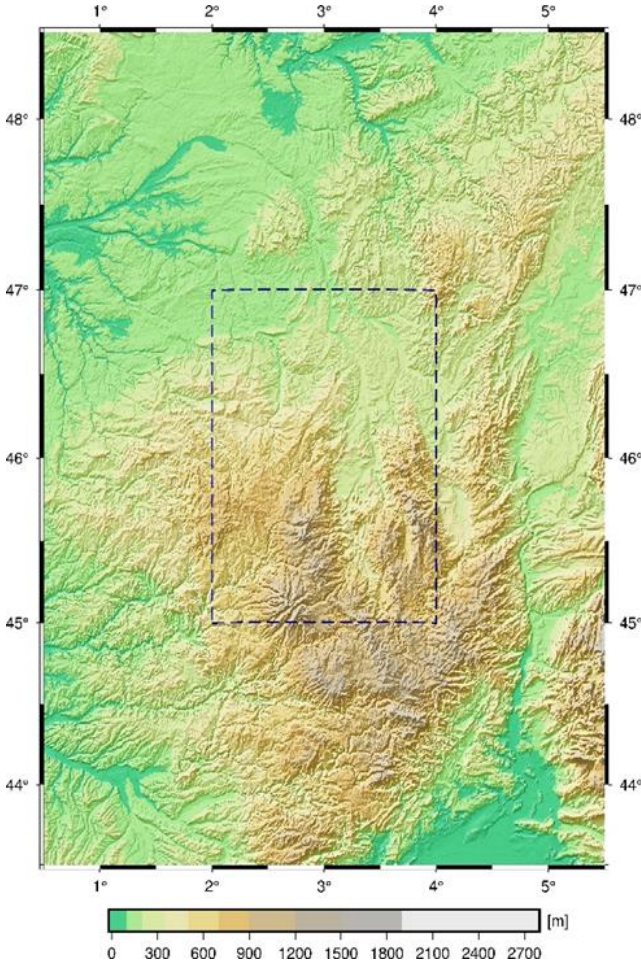
### 2.1. Sayısal yükseklik modeli

Sayısal yükseklik modeli (SYM), fiziksel yeryüzünün bilgisayar ortamındaki gösterimidir. Bilim ve teknolojinin gelişmesiyle birlikte SYM üretimi, uzaktan algılama yöntemleriyle global ve yüksek çözünürlüklü olarak gerçekleştirilebilmektedir. SRTM (Shuttle Radar Topography Mission), sentetik yapay açıklıklı radar

teknolojisi kullanan yeryüzünün topografyasını belirleme amaçlı bir uzaktan algılama görevidir. Bu görev NASA tarafından üstlenilmiştir. Proje kapsamında, SRTM mekiğinin 2000 yılı Şubat ayındaki 15 günlük uçuşuyla yeryüzü topografyası radar interferometresi tekniği yardımıyla belirlenmiştir (Farr ve ark., 2007; İl ve ark., 2018).

SRTM projesinden üretilen 1 saniye çözünürlüklü sayısal yükseklik modeli bu çalışmada SRTM1 olarak adlandırılmıştır. SRTM1 modelinin tüm yeryuvarında düşey doğruluğu 16 m iken, çalışma bölgemizde

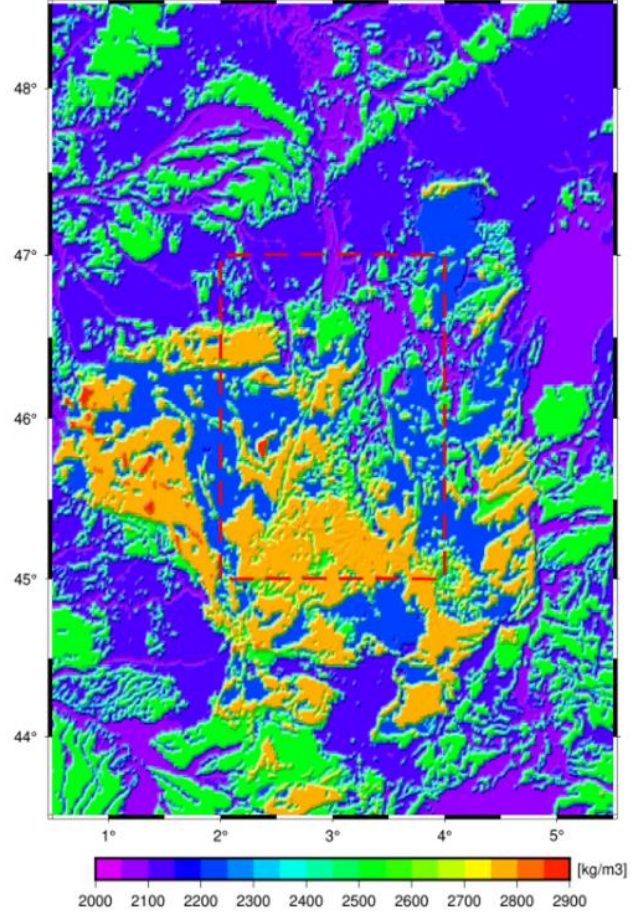
doğruluğu 3 m'den daha iyidir (Abbak, 2014). Bu model yatay ve düşey datum olarak sırasıyla WGS84 elipsoidini ve EGM96 jeoidini referans alır (Bildirici ve ark., 2007; Bildirici ve Abbak, 2020). Şekil 1'deki haritanın çiziminde SRTM1 modeli kullanılmıştır. Diğer yandan, jeoidin dağlık alanlardaki değişimi göz önüne alınarak, jeoit modeli için çözünürlük 0.01° (36 saniye) olarak seçilmiştir. Bu nedenle bu çalışma için SRTM1 verilerinin aritmetik ortalamalarıyla 0.01° çözünürlüklü yükseklik değerleri (360 000 grid noktası) oluşturulmuştur.



Şekil 1. Çalışma bölgesinin topoğrafik haritası (çizgili çerçeve jeoit alanını belirtmektedir).

## 2.2. Kabuk modeli

Uygulama kapsamında kullanılan bir diğer veri ise New Brunswick Üniversitesi tarafından geliştirilen UNB\_Topo\_Dens küresel kabuk modelidir. Bu makalede, söz konusu modele kolaylık açısından UNBCRUST denecektir. UNBCRUST, küresel olarak topoğrafik yoğunluk hakkında yüksek çözünürlüklü bilgi sağlayan ilk modeldir. Topoğrafik yoğunluk modellerinin çoğunluğu gravite alanı bilgisi ve sismolojik veriler ile belirlenir. Bu model yeryuvarı üzerinde ölçülen gravite gözlemlerinden türetilen Bouguer anomalilerinden yola çıkarak yoğunluğu elde etmektedir. Modelin analizi, tüm yeryuvarı için ortalama topoğrafik yoğunluğun 2247 kg/m<sup>3</sup> olduğunu ortaya koymaktadır (Sheng ve ark., 2019). UNBCRUST sayesinde yeryuvarının tümünde topoğrafik yoğunluk değişimleri ve belirsizlikleri elde



Şekil 2. Çalışma bölgesinin yoğunluk haritası (çizgili çerçeve jeoit alanını belirtmektedir).

edilebilir hale gelmiştir. UNBCRUST, 30 saniye çözünürlüklü ve 2 boyutlu bir topoğrafik yoğunluk modeli olarak sunulmaktadır. Modelin indirme bağlantısı ve diğer teknik detaylar için Sheng ve ark. (2019) çalışmasına bakılabilir.

## 2.3 Stokes-Helmert yöntemi

Bu çalışmada jeoit modelini belirlemek için Stokes-Helmert metodu ele alınmıştır. Stokes-Helmert metodu bir jeodezik sınır değer probleminin çözümüdür. Aynı zamanda bir Kaldır-Hesapla-Yerine Koy (RCR: remove-compute-restore) tekniğidir (Sjöberg, 2005). Topoğrafik yüzeyde gravite ölçüleri yapılırken, Stokes yöntemiyle sınır değer probleminin çözümü için ölçülen değerlerin sınır yüzeyi olarak adlandırılan jeoide indirgenmesi gerekmektedir. Sınır koşulunu sağlaması için gravite

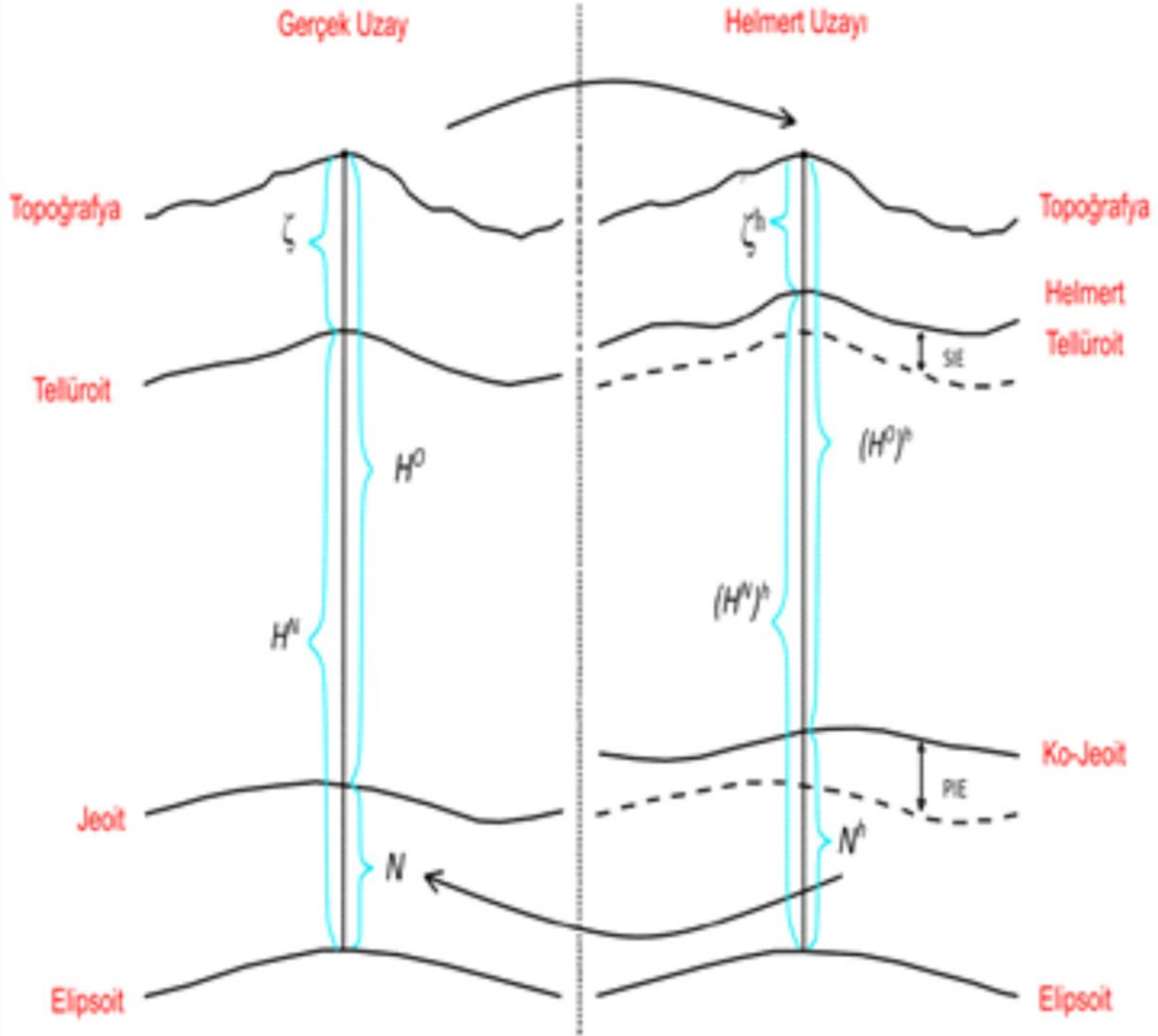
anomalilerinin jeoide kadar aşağı uzanımı (downward continuation) gerekmektedir. Bu nedenle topoğrafya ve atmosferin varlığına ilişkin birçok düzeltme hesaba katılmaktadır.

Bilindiği gibi topoğrafik etkilerin değerlendirilmesi günümüzde kesin jeoit modellemede en ciddi sorunlardan biridir. Bu nedenle topoğrafik etkilerin küresel yeryuvarı için özenle formüle edilmesi ve değerlendirilmesi gerekir.

Topoğrafik kütlelerin etkisini dikkate almanın bir yolu, Helmert'in ikinci yoğunlaştırma (2<sup>nd</sup> condensation) modelini kullanmaktır. Bu modele göre, yeryuvarının topoğrafik kütleleri, jeoit üzerinde bulunan sonsuz ince bir yoğunlaşma tabakası ile değiştirilebilir. Stokes-Helmert yönteminin tam anlamıyla uygulanabilmesi için gerçek uzaydaki niceliklerin ilk olarak Helmert uzayına dönüştürülmesi gerekir (Şekil 3). Böylece "Helmertize" edilmiş gravite alanı daha sonra düşük ve yüksek

frekanslı parçalara ayrılabilir (Vanicek, 1987). Şekil 3'de ifade edilen tellüroit, yeryüzündeki bir noktanın gerçek potansiyeli ile normal potansiyelinin sayısal olarak eşit olduğu yüzeydir (Abbak, 2021). İkincil dolaylı topoğrafik etki, literatürde SITE olarak adlandırılır.

Küresel jeopotansiyel modeller, gravite alanının uzun dalga boylu bilgisi için en doğru kaynaktır. Oysa kısa dalga boylu bilgi Stokes entegrasyonundan elde edilir. Entegrasyon, hesap noktasının etrafındaki bir alanla sınırlıdır. Burada Stokes kernel şeması kullanılmalıdır. Bu şemada, uzak nokta etkilerinin küresel jeopotansiyel modelden değerlendirilip, yersel gravite anomalilerinden çıkarılarak artık gravite anomalileri elde edilir. Artık gravite anomalileriyle gerçekleştirilen Stokes entegrasyonu, Helmert artık ko-jeoit ile sonuçlanır. Hesaplama aşamasında, gerçek uzaydaki jeoit, Helmert ko-jeoit yüksekliklerinden birincil dolaylı topoğrafik ve atmosferik etkiler çıkarılarak elde edilir.



**Şekil 3.** Stokes-Helmert yönteminde gerçek ve Helmert uzayı (Ellmann ve Vanicek, 2007).  $H^0$  ve  $H^N$  sırasıyla ortometrik ve normal yükseklik türünü ifade eder. Bunların  $h$  ile gösterimi Helmert uzayındaki karşılıklarını temsil eder.

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma_0} S^L(\psi) (\Delta g^h - \sum_{n=2}^L \Delta g_n^h) d\sigma + \frac{R}{2\gamma_0} \sum_{n=2}^L \frac{2}{n-1} \Delta g_n^h + \frac{V^t - V^{ct}}{\gamma_0} \quad (1)$$

Stokes-Helmert metoduna göre jeoit yüksekliği, Eşitlik 1 ile elde edilir. Burada,  $R$  ortalama yeryuvarının

yarıçapı,  $\gamma_0$  normal gravite,  $S^L(\psi)$  modifiye edilmiş Stokes fonksiyonu,  $\psi$  hesap ve entegrasyon noktaları

arasındaki jeosentrik açı,  $\Delta g^h$  Helmert gravite anomalisi,  $\Delta g_n^h$  küresel yerpotansiyel modelden türetilen n. dereceden Helmert gravite anomalisi,  $d\sigma$  sonsuz küçük yüzey elemanı,  $V^t$  topografyanın gerçek çekim potansiyeli,  $V^{ct}$  yoğunlaştırılmış (condensed) topografyanın çekim potansiyelidir. Jeoit yüksekliğini belirleyen bu eşitlikte, eşitliğin sağındaki ilk terim yersel gravite etkisi, ikinci terim küresel yer potansiyel model (KYM) etkisi, üçüncü terim ise topoğrafik etkiyi (PITE'yi) göstermektedir.

### 2.4 PITE

Jeoidin kesin olarak belirlenimin en zor kısmı topoğrafik etkilerin değerlendirilmesindeki eksikliklerdir. Öncelikle yaygın olarak kullanılan düzlemsel yaklaşım yerine topoğrafik etkilerin küresel biçimde formüle edilmesi sonuçların doğruluğunu artırmaktadır. Stokes-Helmert metodunda, doğrudan ve dolaylı topoğrafik etkiler bulunmaktadır. Bu etkileri gidermek için kullanılan topoğrafik kütlelerin yoğunlaşması Helmert'in ikinci yoğunlaşma metodu olarak adlandırılır. Oluşturulan Helmert yüzeyi potansiyelinin gerçek

potansiyelden farklı olmasına neden olur. Sonuç olarak Helmert kojeoidi ile gerçek uzaydaki jeoit, tam olarak aynı değildir. Başka bir deyişle PITE gerçek uzayda jeoit elde etmek için Helmert'in uzayına eklenen bir dönüşüm terimidir. Helmert'in ikinci yoğunlaşma yönteminin en önemli üstünlüğü ise PITE'nin yeryuvarının tamamında 2 m'den daha büyük olmamasıdır. PITE'nin kullanım şekli jeoidin üzerindeki kütlelerin Helmert'in ikinci yoğunlaştırma tabakasıyla sıkıştırılıp jeoidin üzerine eklenmesidir. Özetle, topoğrafya ince bir kâğıt gibi düşünülüp, jeoidin üzerine eklenir.

Küresel yaklaşıma göre modellenen en kapsamlı PITE formülü, [Eşitlik 2](#) ile verilir ([Ellmann ve Vanicek, 2007](#)). [Eşitlik 2](#)'de görüldüğü üzere PITE beş terimden oluşmaktadır. Buradaki son iki terimde yoğunluk değişimi ( $\delta\rho$ ) yer almaktadır. Eşitlikte geçen  $G$  Newton çekim sabiti,  $\Omega$  hesap noktalarının  $\varphi$ ,  $\lambda$  değerleri,  $\Omega'$  entegrasyon noktalarının  $\varphi$ ,  $\lambda$  değerleri,  $\rho_0$  2.67 gr/cm<sup>3</sup> olarak alınan ortalama kabuk yoğunluğunu,  $H^0$  ortometrik yüksekliği,  $R$  yeryuvarının ortalama yarıçapını,  $\gamma_0$  ise normal graviteyi temsil eder. Ayrıca  $l$  hesap noktası ile integral yüzey elemanı  $d\Omega$  arasındaki yatay mesafeyi gösterir ve [Eşitlik 3](#) ile hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{\delta V^t(R, \Omega)}{\gamma_0(\Phi)} = & -4\pi G \rho_0 \frac{[H^0(\Omega)]^2}{\gamma_0} \left[ \frac{1}{2} + \frac{H^0(\Omega)}{3R} \right] + \frac{G}{\gamma_0(\Phi)} \rho_0 \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \int_{r'=R+H^0(\Omega)}^{R+H^0(\Omega')} l^{-1}[R, \psi(\Omega, \Omega'), r'] r'^2 dr' d\Omega' \\ & - \frac{G}{\gamma_0(\Phi)} \rho_0 \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \frac{r_t^3(\Omega') - r_t^3(\Omega)}{3} l^{-1}[R, \psi(\Omega, \Omega'), R] d\Omega' \\ & + \frac{G}{\gamma_0(\Phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \delta\rho(\Omega') \int_{r'=R}^{R+H^0(\Omega')} l^{-1}[R, \psi(\Omega, \Omega'), r'] r'^2 dr' d\Omega' \\ & - \frac{G}{\gamma_0(\Phi)} \iint_{\Omega' \in \Omega_0} \delta\rho(\Omega') \frac{r_t^3(\Omega') - r_t^3(\Omega)}{3} l^{-1}[R, \psi(\Omega, \Omega'), R] d\Omega' \end{aligned} \quad (2)$$

$$l = \sqrt{r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos\psi} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{r'=R+H^0(\Omega)}^{R+H^0(\Omega')} l^{-1}[R, \psi(\Omega, \Omega'), r'] r'^2 dr' d\Omega' \\ & = \left[ \frac{1}{2} r' \right. \\ & \quad + 3R \cos\psi(\Omega, \Omega') l[R, \psi(\Omega, \Omega'), r'] \\ & \quad \left. + \frac{r^2}{2} (3\cos^2\psi(\Omega, \Omega') - 1) \ln|r' - r\cos\psi(\Omega, \Omega') + l[r(\Omega), \psi(\Omega, \Omega'), r'] \right] \Big|_{r'=R}^{R+H^0(\Omega')} \end{aligned} \quad (4)$$

[Eşitlik 1-3](#)'ten anlaşıldığı üzere bir bölgede PITE büyüklüğünü hesaplamak için 2 ve 3 katlı integrallerin çözülerek SYM ve kabuk yoğunluğu ile değerlendirilmelidir.

[Eşitlik 2](#)'deki 3 katlı integral içeren ikinci terim uygulamak zor olduğu için bu terimi 2 katlı integrale dönüştürmek gerekir. Bunun için [Eşitlik 4](#) kullanılmaktadır ([Foroughi, 2009](#)). Burada  $R = 6371000$  m ortalama yeryuvarı yarıçapı ve  $r'$  entegrasyon noktasının radyal bileşeni olarak ifade edilmektedir.

### 3. Uygulama

Bu çalışmanın uygulama kısmında, Fransa'nın Auvergne bölgesinde çalışma sahası olarak seçilmiştir. Bu bölgenin tercih edilmesindeki en büyük etken, daha

önceden bu alanda birçok jeoit belirleme yönteminin sınanmış olmasıdır. Bu sayede daha önceden bu alan için yapılan Stokes-Helmert yöntemi çözümü ([Janak ve ark., 2017](#)) ile kontrollü bir karşılaştırma gerçekleştirilmiştir.

Stokes-Helmert yöntemine göre PITE hesabında iki yol izlenmiştir. Birincisinde yer kabuğunun yoğunluğu değişken olarak ele alınmış, UNBCRUST modelinden interpolasyonla bölge için elde edilen yoğunluk değerleri kullanılmıştır. İkincisinde yer kabuğunun yoğunluğu sabit kabul edilerek (2.67 gr/cm<sup>3</sup>) hesaplama yapılmıştır. Daha sonra bu iki PITE değeri karşılaştırarak sonuçlar tartışılmıştır. Son olarak daha önceden yapılan çalışmadan elde edilen PITE değerleri ile bu çalışmadan elde edilen PITE değerleri arasındaki farklar incelenmiştir. Bu işlemler için yazarlar tarafından C programlama dilinde geliştirilen PITESOFT yazılımı kullanılmıştır.

### 3.1 PITE uygulaması

Öncelikle [Eşitlik 2'nin](#) tüm terimleri (5 adet terim) hesaba katılarak değişken yoğunluklu PITE hesabı

gerçekleştirilmiştir. Buna göre [Şekil 4](#)'te PITE değerinin çalışma bölgesindeki dağılımı görülmektedir. Sayısal sonuçlara göre; PITE çalışma sahasında -43 cm ile -0.8 cm arasında değişen değerler almıştır ([Tablo 1](#)).

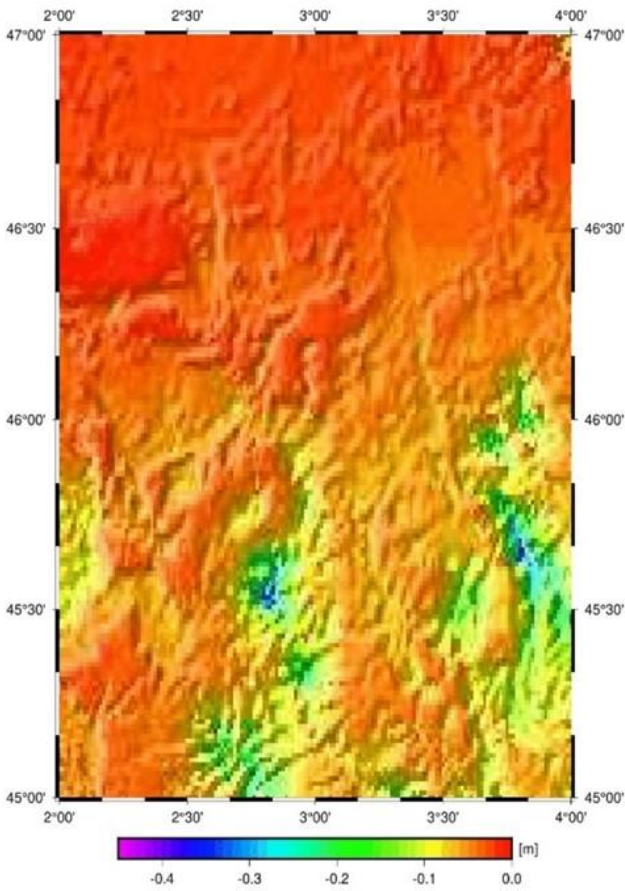
**Tablo 1.** Uygulama sonuçları (cm).

Model	En az	En çok	Ort.	KOH	STD
PITE değişken yoğunluklu	-43.19	-0.08	-5.28	6.89	0.05
PITE sabit yoğunluklu	-39.01	-1.10	-4.69	5.66	0.03
Farkları	-10.02	39.01	-0.06	1.51	1.39

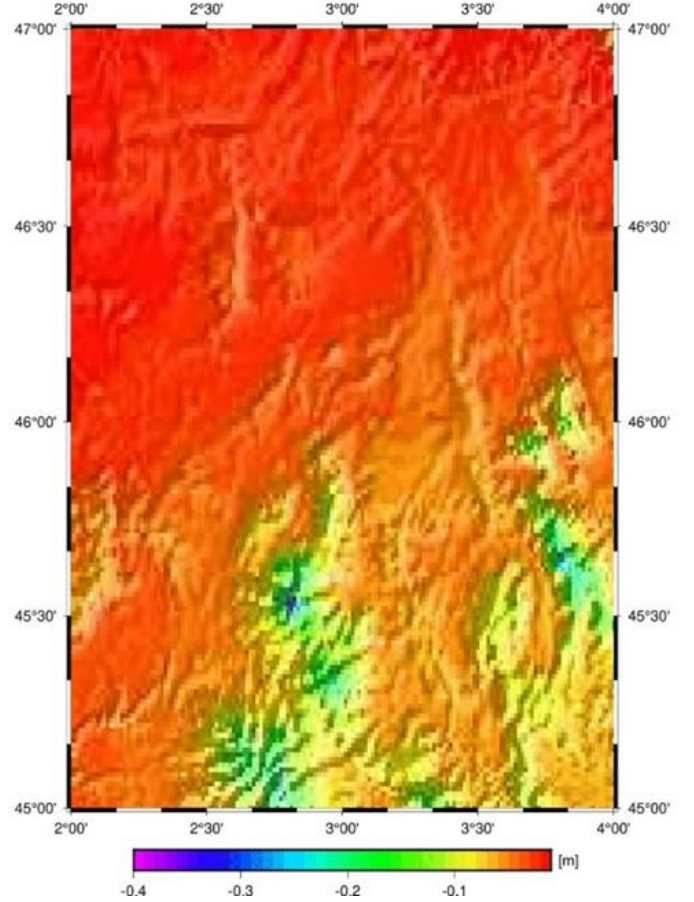
### 3.2 Sabit yoğunluklu PITE uygulaması

İkinci işlem olarak [Eşitlik 2'de](#) verilen ilk üç terim incelenmiştir. Başka bir deyişle bu işlemde yoğunluk

değişimi ele alınmamıştır. Sayısal sonuçların coğrafi dağılımı [Şekil 5](#)'te görülmektedir. PITE, -39.0 cm ile -1.1 cm arasında değerler almıştır ([Tablo 1](#)).



**Şekil 4.** Çalışma bölgesinde değişken yoğunluklu PITE değerleri.



**Şekil 5.** Çalışma bölgesinde Sabit Yoğunluklu PITE.

### 3.3 Değişken yoğunluklu PITE ile Sabit Yoğunluklu PITE Farkı

Son olarak; yoğunluk değişimin PITE değerine ne kadar etki ettiğini belirlemek için iki yöntemle elde edilen PITE değerleri aynı grid noktalarında birbirinden çıkarılmıştır ([Şekil 6](#)). Bu işlemin sonucunda iki tür PITE arasında -10.0 cm ile 39.0 cm değişen farklar gözlenmiştir ([Tablo 1](#)). Bu aralık, santimetre doğruluklu jeoit modeli için kabuk yoğunluğunu hesaba katmanın önemli olduğunu göstermektedir.

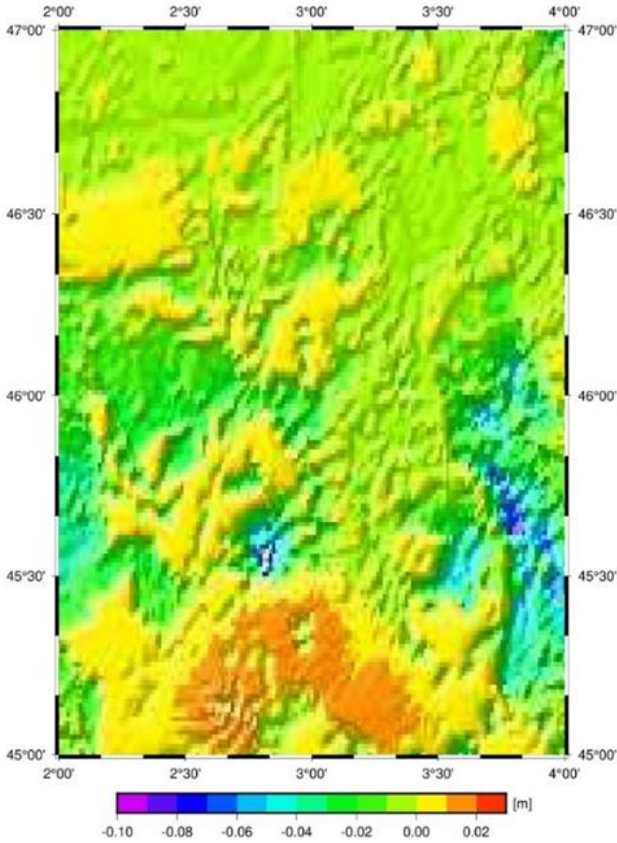
### 3.4 Karşılaştırma

Daha önce bu bölgede çalışma gerçekleştiren ve en güncel yaklaşım olarak ele alınan [Janak ve ark., \(2017\)](#) çalışmasında, sayısal yükseklik modeli için SRTM3 ve yoğunluk için UNBCRUST modelini kullanmıştır.

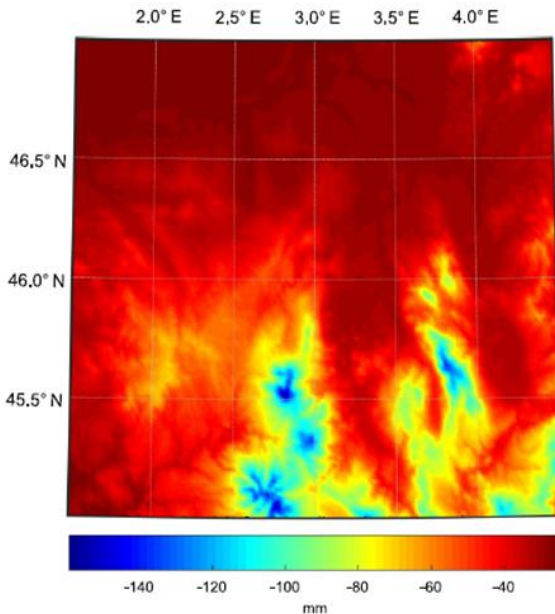
[Janak vd. \(2017\)](#), çalışma alanını  $1.5^{\circ} \leq \lambda \leq 4.5^{\circ}$  doğu meridyenleri  $45^{\circ} \leq \varphi \leq 47^{\circ}$  kuzey paralelleri olarak belirlemiş ve bu alanı integrasyon için  $2^{\circ}$  genişletmiştir. [Janak ve ark. \(2017\)](#) tarafından [Eşitlik 2'nin](#) tüm terimlerinin uyguladığı (değişken yoğunluklu) PITE çözümü [Şekil 7](#)'de görülmektedir. Sayısal sonuçlara göre PITE -16 cm

ile -2.5 cm arasında değişen değerler almıştır. Ayrıca, ortalaması 4.4 cm ve standart sapması 2 cm olarak belirlenmiştir.

Janak ve ark. (2017) tarafından gerçekleştirilmiş olan PITE çözümü ile bu çalışmadaki PITE çözümü arasındaki farkların oluşmasının temel sebeplerinden birisi kullanılan sayısal yükseklik modellerinin farklı olmasıdır. Ayrıca üretilen jeoit modellerinin çözünürlükleri arasında farkın olması diğer bir etkidir. Farkların dağılımı incelendiğinde büyük değerlerin sayısı 10 civarında olduğu da görülmüştür.



Şekil 6. Değişken yoğunluklu PITE ile sabit yoğunluklu PITE farkı.



Şekil 7. PITE değerleri (Janak vd., 2017).

### 3.5 Korelasyon analizi

Korelasyon, iki değişken arasındaki matematiksel ve fiziksel ilişkinin standartlaştırılmış haline denir. Bu ilişki korelasyon katsayısıyla belirlenmektedir. Korelasyon katsayısı, Eşitlik 5 ile hesaplanır. Eşitlikte geçen  $\sigma_{xy}$  iki büyüklük arasında arasındaki kovaryansı,  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  büyüklüklerin standart sapmalarını ifade etmektedir. Korelasyon değeri -1 ile +1 arasında değerler almaktadır. Korelasyon değeri sınırlara yaklaştıkça (+1 ve -1), iki büyüklük arasında kuvvetli pozitif/negatif ilişki olduğunu ifade eder (Abbak, 2020).

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (5)$$

PITE ile grid topoğrafik yükseklik ( $H$ ) değerleri arasındaki ilişkinin derecesini anlamak için korelasyon hesaplanmıştır. Buna göre hesaplanan korelasyon katsayısı -0.53 olup, bu iki büyüklük arasında negatif yönlü orta kuvvetli bir ilişki söz konusudur (Şekil 8). Bir başka deyişle yükseklik arttıkça, PITE değeri azalmaktadır. Bu durum okuyucuyu şaşırtmasın, çünkü PITE mutlak olarak artmakta ancak düzeltme olduğu için - işareti sayesinde küçülmektedir. Şekil 8'deki mavi çizgi, iki büyüklük arasındaki regresyon doğrusudur. Verilerin, regresyon doğrusundan fazlaca yayılmış olması PITE'nin tek bir yükseklik değerinden değil, entegrasyon (1.5 derece yarıçaplı alan) içine giren tüm yükseklik değerlerinden etkilendiğini belirtmektedir.

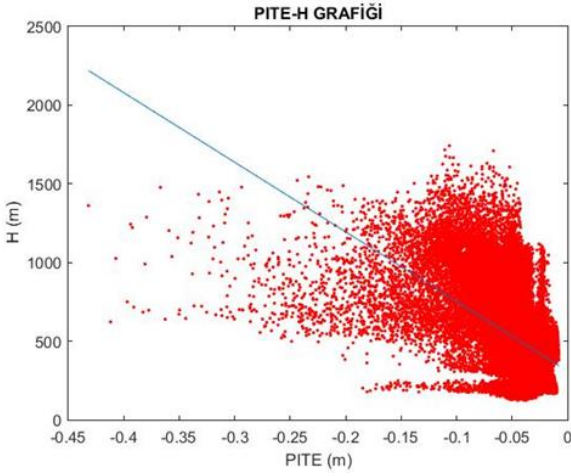
Benzer şekilde PITE ile yoğunluk arasındaki korelasyon da hesaplanmıştır. Buna göre iki büyüklük arasındaki korelasyon katsayısı -0.05 olup, ilişkinin derecesi negatif yönlü çok zayıftır (Şekil 9). Her ne kadar yoğunluk değişimi sonuçlarda anlamlı farklara neden olsa da korelasyon katsayısı çok düşük çıkmıştır. Bunun da nedeni PITE'nin hesabında tek bir noktadaki yoğunluk değerinin değil, entegrasyon (1.5 derece yarıçaplı alan) içine giren tüm yoğunluk değerlerinin etkin olmasından kaynaklanır. Şekil 9'daki mavi çizgi, iki büyüklük arasındaki regresyon doğrusudur. Aynı zamanda UNBCRUST modelinin 30" çözünürlüklü olması sayısal yükseklik modelinin ise 1" çözünürlüğe sahip olması da bu durumu etkilemektedir. Model uyumsuzluğunun sonucu olarak Şekil 9'daki yatay yönlü nokta dağılımı ortaya çıkmaktadır. Başka bir deyişle yükseklik değişse de yoğunluklar yani PITE değerleri hep aynı kalmaktadır. Bu da yoğunluk modellerinin de pek gerçekçi olmadığını yüzeysel kaldığını kanıtlar.

### 4. Sonuçlar

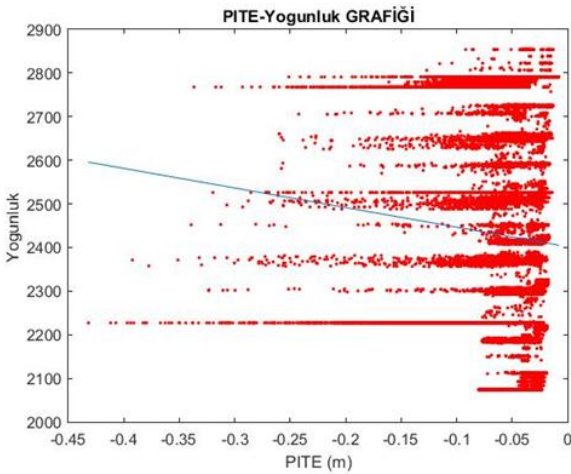
Bu çalışmada gravimetrik jeoit belirleme yöntemi olan Stokes-Helmert yaklaşımının temel teorisi incelenmiştir. Bu yaklaşımı diğer yöntemlerden ayıran en önemli özelliği ise Helmert'in ikinci yoğunlaştırma yöntemini kullanmasıdır. Bu yöntemle beraber topoğrafik kütleler sıkıştırılıp jeoit üzerine eklenmektedir. Jeoit belirlemenin en temel sorunu topoğrafyanın varlığıdır ve bu yöntemde topoğrafya üç farklı biçimde ele alınmaktadır.

Stokes-Helmert yönteminde birincil ve ikinci dolaylı topoğrafik etkinin hesaplanması gerçek ve Helmert

uzayları arasındaki dönüşüm için gereklidir. Birincil topoğrafik etkinin hesaplanmasındaki temel amaç jeoit yüksekliğinin belirlenmesinde doğrudan etkisi olmasıdır. Bu nedenle bu çalışmada birincil topoğrafik etki incelenmiştir.



Şekil 8. PITE ile H değerleri arasındaki ilişki.



Şekil 9. PITE ile yoğunluk değerleri arasındaki ilişki.

Bu çalışmanın uygulaması bir test bölgesi olan Fransa Auvergne'de gerçekleştirilmiştir. Birincil topoğrafik etki için formüller C programlama dilinde kodlanmıştır. Topoğrafik etkinin ilk üç teriminde yoğunluk değişiminin etkisi yoktur. Son iki terimde yoğunluk değişiminin topoğrafik düzeltmeye olan etkisi bulunmaktadır. Yapılan uygulamanın amacı kabuk yoğunluğunun birincil topoğrafik düzeltmeye ne kadar etki ettiğini gözlemektir. Uygulama sonucunda, değişken yoğunluklu birincil topoğrafik etki -43.0 cm ile -0.8 cm arasında değerler almıştır. Topoğrafik etkinin incelenmesinde yoğunluk değişiminin ele alınması ile alınmaması arasındaki fark ise -10 ile 39 cm arasında değişmektedir.

Stokes-Helmert yönteminin üstün tarafı topoğrafyanın varlığını her koşulda hesaba katmasıdır. Zayıf tarafı ise hesaplama işlemlerinin zorluğudur. Stokes-Helmert yönteminde jeoit belirleme diğer yöntemlere göre daha uzun bir sürede belirlenmesine rağmen jeoit belirleme çalışmalarında uygulanması tavsiye edilir. Bu yöntem santimetre altı doğruluk beklenen Türkiye jeoit modeli belirleme çalışmalarında kullanılabilir. Ülkemizde yüksek dağlık bölgelerin olması

ulusal jeoidin yüksek doğrulukla belirlenmesi için önemli bir engeldir. Topoğrafyanın etkisini en aza indirmek için PITE hesabında yoğunluk değişiminin dikkate alınması bizi şu ana kadar üretilen ulusal jeoit modellerinden daha doğruluklu bir sonuca ulaştırabilir.

### Bilgilendirme/Teşekkür

Bu çalışma 120Y246 nolu TÜBİTAK projesi tarafından desteklenmiştir. Yazarlar Stokes-Helmert yaklaşımı konusundaki faydalı tartışmalarından dolayı Harita Genel Müdürlüğü'nde çalışan Doç. Dr. Müh. Alb. Mehmet SİMAV'a teşekkür eder. Yazarlar, editöre ve hakemlere yapıcı eleştirilerinden dolayı teşekkür eder.

### Araştırmacıların katkı oranı

**Aleya Öztop:** Kavramsallaştırma, literatür taraması, verilerin analizi ve değerlendirilmesi, **Ramazan Alpay Abbak:** Verilerin temin edilmesi, yazım denetimi, içerik açısından makalenin kontrol edilmesi, sonuçların incelenmesi, **Aydın Üstün:** Kavramsallaştırma, içerik açısından makalenin kontrol edilmesi, sonuçların incelenmesi.

### Çatışma Beyanı

Herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

### Yazılım Erişebilirliği

Bu çalışma kapsamında C++ programlama dilinde geliştirilen yazılımı, [www.github/aabbak/PITESOFT](http://www.github/aabbak/PITESOFT) adresinden ücretsiz bir şekilde indirilebilir. Yazılımın kullanımına ilişkin bilgilerin yanı sıra test verileri de ilgili sayfada bulunmaktadır.

### Kaynakça

- Abbak, R. A. (2014). Effect of ASTER DEM on the prediction of mean gravity anomalies: a case study over the Auvergne test region. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 49(4), 491-502. <https://doi.org/10.1007/s40328-014-0062-8>
- Abbak, R. A., (2011). Global Yer Potansiyel Modellerin Spektral Yöntemlerle Değerlendirilmesi ve Jeoit Belirleme İçin Yerel Olarak İyileştirilmesi. [Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi].
- Abbak, R. A., (2020). Hata Kuramı ve Parametre Kestirimi, Atlas Akademi Yayınları, Genişletilmiş 2. Baskı, Konya.
- Abbak, R. A., (2021). Fiziksel Jeodezi Teori ve Uygulama, Atlas Akademi Yayınları, Genişletilmiş 4. Baskı, Konya.
- Bildirici, İ. Ö., & Abbak, R. A. (2020). Türkiye ve çevresinde SRTM sayısal yükseklik modelinin doğruluğu. *Geomatik*, 5(1), 1-9. <https://doi.org/10.29128/geomatik.551071>
- Bildirici, İ. Ö., Üstün, A., Uluğtekin, N., Selvi, H. Z., Abbak, R. A., Buğdaycı, İ., & Doğru, Ö. (2007). SRTM Verilerine Dayalı Ülke Bazında 3"x3" Çözünürlüklü Sayısal Yükseklik Modelinin Oluşturulması. *Türkiye Ulusal*



- Fotogrametri ve Uzaktan Algılama Birliği IV. Sempozyumu, 5-7 Haziran 2007.
- Demir, S., Abbak, R. A., & İl, H. T. A. (2018). Global Yerpotansiyel Modellerin Gravimetrik Jeoit Belirlemeye Katkısı. *Geomatik*, 3(3), 213-224. <https://doi.org/10.29128/geomatik.403776>
- Ellmann, A., & Vaníček, P. (2007). UNB application of Stokes-Helmert's approach to geoid computation. *Journal of Geodynamics*, 43(2), 200-213. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2006.09.019>
- Farr, T. G., Rosen, P. A., Caro, E., Crippen, R., Duren, R., Hensley, S., ... & Alsdorf, D. (2007). The shuttle radar topography mission. *Reviews of Geophysics*, 45(2), 1-33. <https://doi.org/10.1029/2005RG000183>
- Foroughi, I. (2009). SHGEO Software package I-II, University of New Brunswick Department of Geodesy and Geomatics Engineering.
- Foroughi, I. (2018). Accuracy of the classical height system. [Doctoral Thesis, The University of New Brunswick].
- Gauss, C. F. (1828). Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen
- Guo, D., He, H., & Sang, P. (2019). Precise geoid computation using Stokes-Helmert's scheme and strict integrals of topographic effects. *Geodesy and Geodynamics*, 10(4), 290-296. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2019.04.005>
- Heiskanen, W. A. & Moritz, H., (1967). *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco and London.
- İl, H. T. A., Abbak, R. A., Bildirici, I. Ö., & Demir, S. (2018). SRTM1 ve ASTER Sayısal Yükseklik Modellerinin Gravimetrik Jeoit Belirlemeye Katkısı. *Geomatik*, 3(3), 203-212. <https://doi.org/10.29128/geomatik.402331>
- Janák, J., Vaníček, P., Foroughi, I., Kingdon, R., Sheng, M. B., & Santos, M. C. (2017). Computation of precise geoid model of Auvergne using current UNB Stokes-Helmert's approach. *Contributions to Geophysics & Geodesy*, 47(3), 201-229. <https://doi.org/10.1515/congeo-2017-0011>
- Martinec, Z. (1994a). Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical approximation of the geoid. *Manuscript Geodesy*, 19, 257-268.
- Martinec, Z., & Vaníček, P., (1994b). Indirect effect of topography in the Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid. *Manuscript Geodesy*, 19, 417-421.
- Novak, P., (2000). Evaluation of Gravity Data for the Stokes-Helmert Solution to the Geodetic Boundary-Value Problem. Technical Report, no. 207, UNB, Fredericton.
- Sheng, M. B., Shaw, C., Vaníček, P., Kingdon, R. W., Santos, M., & Foroughi, I. (2019). Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model. *Tectonophysics*, 762, 45-60. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2019.04.005>
- Sjöberg, L. E. (2005). A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in regional geoid modelling. *Journal of Geodesy*, 78, 645-653. <https://doi.org/10.1007/s00190-004-0430-1>
- Tenzer, R., Novák, P., Janák, J., Huang, J., Najafi, M., Vajda, P., & Santos, M. (2003). A review of the UNB approach for precise geoid determination based on the Stokes-Helmert method. *Honouring the academic life of Petr Vanicek. Rep*, 218, 132-178.
- Vajda, P., Foroughi, I., Vaníček, P., Kingdon, R., Santos, M., Sheng, M., & Goli, M. (2020). Topographic gravimetric effects in earth sciences: Review of origin, significance and implications. *Earth-Science Reviews*, 211, 103428. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103428>
- Vanicek, P. (1987). The Canadian geoid-stokesian approach. *Manuscript Geodaet.*, 12, 86-98.
- Vaníček, P., Kingdon, R., Kuhn, M., Ellmann, A., Featherstone, W. E., Santos, M. C., ... & Avalos-Naranjo, D. (2013). Testing Stokes-Helmert geoid model computation on a synthetic gravity field: experiences and shortcomings. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 57, 369-400. <https://doi.org/10.1007/s11200-012-0270-z>
- Yilmaz, N. (2023). Assessment of latest global gravity field models by GNSS/Levelling Geoid. *International Journal of Engineering and Geosciences*, 8(2), 111-118. <https://doi.org/10.26833/ijeg.1070042>



© Author(s) 2024. This work is distributed under <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>