

Hotelling T^2 Testinde Kovaryans Matrislerinin Heterojenliğinin I. Tip Hata Üzerine Etkisi: Bir Simülasyon Çalışması

E.Arzu KANIK*

Handan ÇAMDEVİREN*

Fikret GÜRBÜZ**

ÖZET

Bu çalışmada, Hotelling T^2 testinde kovaryans matrislerinin homojenliği ön şartının yerine gelmemesi durumunda I.Tip hatadaki değişmelerin araştırılması hedeflenmiştir. Bu amaçla, Hotelling T^2 ile yapılan hipotez testlerinde kovaryans matrislerinin heterojenliğinin I.Tip hatayı ne kadar etkilediği Simülasyon denemeleriyle saptanmaya çalışılmıştır. Simülasyon çalışmalarında standardize edilmiş p değişkenli normal dağılımdan örnekler çekilmiştir. Farklı örnek genişlikleri, farklı değişken sayıları ve populasyon kovaryans matrislerinin farklı heterojenlik durumları için toplam 5985 kombinasyon simule edilmiş ve her kombinasyon 10000 kere denenmiştir. Bu kombinasyonlardan elde edilen 5985 I.tip hatada gözlenen değişim kombinasyonlarına göre ayrı ayrı incelenmiştir.

Sonuç olarak kovaryans matrislerinin heterojenliğinin tüm seviyeleri değişken sayısı 5' e kadar sadece gruplarda gözlem sayısının eşit olmadığı durumlarda I.Tip hatayı etkilemektedir. Gruplarda gözlem sayılarının yaklaşık eşit ($n_1/n_2 \leq 1.5$) olduğu durumlarda ise kovaryans matrislerinin heterojenliğinin I.tip hataya olan etkisi $\%5 \pm \%2$ sınırında kalmaktadır. Değişkenler arasındaki korelasyonun yüksek olduğu grupta örnek genişliğinin diğer gruba göre artması I.Tip hatayı artırmakta, korelasyonun düşük olduğu grupta örnek genişliğinin artması I.Tip hatayı azaltmaktadır. Değişken sayısının 5'den fazla olması ise bu istenmeyen durumların ortaya çıkmasını hızlandırmaktadır.

Hipotez testleri sonunda gerçekleşen I. Tip hataların önceden tahmin edilebilmesi amacıyla Kanık tarafından K adı verilen özgün bir katsayı geliştirilmiştir. Hipotez testleri sonucunda gerçekleşen I. Tip hatalar ile K katsayısı arasında oldukça yüksek korelasyon saptanmış ve gerçekleşen I.Tip hataların $\% 90$ 'a ($R^2 = \%88$) yakın bir determinasyon katsayısıyla önceden tahmin edilebileceği bir regresyon denklemi geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kovaryans matrisi, Hotelling- T^2 testi, heteronejlik, I.Tip hata, simülasyon

* Mersin Üniversitesi Tıp Fakültesi Biyoistatistik Anabilim Dalı Yenişehir Kampüsü 33160 Mersin
Email: hcamdeviren@ixir.com, Tel: 0 324 3412311 (Haberleşme adresi)

** Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi Biyometri ve Genetik Anabilim Dalı

1. GİRİŞ

Tek değişkenli istatistik analizden tanıdığımız ve birbirinden bağımsız iki örnek ortalamasının karşılaştırılmasında kullanılan Student t test istatistiği yerine

bilindiği gibi çok değişkenli analizlerde benzer hipotez testlerinde, Hotelling T^2 istatistiği kullanılmaktadır.

Bu çalışmada bağımsız iki ortalama vektörünün karşılaştırılmasında kullanılan Hotelling T^2 istatistiğinin kovaryans matrislerinin heterojenliği ön şartına karşı robust olup olmadığı ve gruplarda gözlem sayılarının eşitsizliğinin bu duruma olan etkisi ayrıntılı olarak incelenmesi hedeflenmiştir.

Hotelling T^2 testinde H_0 kontrol hipotezi, ortalamaları birbirleriyle karşılaştırılan 2 grubun aynı populyondan rasgele alınmış örnekler olduğunu ifade eder. Hipotez testlerinde kullanılan test istatistiği için tüm ön şartlar sağlandığında ve yeterli büyüklükteki gözlem sayısı bulunduğu teorik olarak gerçekte geçerli olan H_0 hipotezinin test edilmesi sonucunda, başlangıçta kabul edilen I.Tip hata olasılığı kadar örneğin $\alpha=0.05$ ise 100 hipotez testinden 5 tanesinin reddilmesi beklenir. Bu sayısının 5 den fazla olması I.Tip hatayı, az olması ise II.Tip hatayı artırır. II.Tip hatanın artması kullanılan testin gücünün düşmesi anlamına gelmektedir. Ön şartların yerine gelmeme durumunun hipotez testleri sonucunda gerçekleşen I.Tip hataya olan etkisi; ön şartların tek tek yerine gelmemesine, tüm ön şartların birlikte yerine gelmemesine, özellikle varyans analizi tekniğinde gruplardaki gözlemlerin sayısına ve eşit olup olmamasına göre değişmektedir.

Hotelling T^2 testinde ön şartlar;

1. Ortalama vektörleri birbiriyle karşılaştırılacak her bir grupta $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ olmak üzere n adet bireyde ölçülen p adet değişkene verilerin p değişkenli normal dağılımdan rasgele alınmış örnekler olması.
2. Bu veri matrislerinin alındığı populyonlarda kovaryans matrislerinin eşitliği ($\Sigma_1=\Sigma_2$)
3. Gruplardaki gözlemlerin bağımsızlığı şeklinde özetlenebilir.

Tek değişkenli analizde, gruplardaki gözlem sayıları yaklaşık eşit olduğunda, yani (büyük örnek genişliği / küçük örnek genişliği) < 1.5 olduğunda, student's t testinin bu ön şarttan fazla etkilenmediği bilinmektedir. Populyon varyanslarının oranı 1:10 olduğu bir durumda gruplardaki gözlemler eşit ve her bir grupta n=30 olduğu durumda gerçekleşen I.Tip hata $\alpha=0.053$ olarak saptanmıştır (Tekindal, 1998).

Tek değişkenli varyans analizinde 2 grup için $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ eşitliği gereklidir. Buna karşın çok değişkenli analizde iki kovaryans matrisinin eşitliğini sağlamak oldukça güçtür. Örneğin, 5 değişkenli bir veri setinde iki kovaryans matrisinin eşitliği, iki kovaryans matrisinin karşılıklı gelen tüm elemanlarının eşit olması anlamına gelmektedir. 5 değişken için kovaryans matrisinin 25 elemanı vardır. İki grup söz

konusu olduğunda her iki matriste simetrik olan elemanlar hariç karşılıklı gelen 15 elemanın eşitliği söz konusudur (Stevens, 1986). Köşegen elemanlar değişkenlerin varyanslarını göstermektedir. Gruplarda varyanslar homojen olsa bile değişkenler arası korelasyonların popülasyonlarda kovaryansların eşit olmamasına sebep olmaktadır.

Hotelling T² testinde grupların alındıkları popülasyonların kovaryans matrislerinin eşit olmama durumu çok değişkenli Behrens- Fisher problemi olarak da bilinmektedir. Kovaryans matrislerinin homojenliği ön şartı sadece çok değişkenli varyans analizi için değil tekrarlanan ölçümlü (repeated measurement) analizler ve diskriminant analizleri için de geçerlidir (Hawkins, 1981).

Popülasyon kovaryans matrislerinin heterojenliği özellikle gruplardaki gözlem sayılarının eşit olmadığı durumda Hotelling T² testi sonucunda gerçekleşen I.Tip hatada iki farklı sonuç oluşturmaktadır. Bu durum Haksitan, vd (1979)' da aşağıdaki gibi açıklanmıştır.

S₁ ve S₂ ortalamaları karşılaştırılacak iki grubun kovaryans matrisleri olsun. Gruplardaki gözlem sayılarının eşit olmadığı durumda popülasyon kovaryans matrislerinin homojenliğine ilişkin hipotez reddedilmiş olsun. S matrislerinden determinantı küçük olan grupta, gözlem sayısı diğer gruba göre fazla ise negatif şartlı durum söz konusudur. Negatif şartlı durumda Hotelling T² ' ile yapılan hipotez testlerinde beklenenden daha fazla hipotezin reddedilmesi, yani I.Tip hatanın artması söz konusudur. Hotelling T² istatistiği negatif şartlı durumdan daha fazla etkilenmektedir. Kovaryans matrisinin determinantı büyük olan grupta gözlem sayısının diğer gruba göre daha fazla olduğu duruma pozitif şartlı durum adı verilir. Pozitif şartlı durumda Hotelling T² ' nin beklenenden daha az hipotezi reddetmesi, I.Tip hatanın azalması, II.Tip hatanın artması ve buna bağlı olarak testin gücünün azalması beklenmektedir. Her iki durumda araştırmacı için istenmeyen durumlardır. Bu durumları belirleyen faktör kısaca büyük gözlem sayısının hangi grupta olduğudur.

Bu konuda son yıllarda yapılan önemli araştırmalardan birisi de Christensen ve Rencher, 1997 dir. Bu çalışmada, Hotelling T² istatistiğinin gruplarda gözlem sayılarının eşit olmadığı durumlarda kovaryans matrislerinin heterojenliğinden oldukça fazla etkilendiğini ve bu test istatistiğine alternatif olarak gösterilen 7 farklı test istatistiğinin olduğunu bildirilmektedir. Yazarlar çalışmalarında Hotelling T² ile birlikte bu 7 farklı test istatistiğini Simülasyon denemeleriyle karşılaştırmışlardır.

Bu çalışmada ; $\alpha=0.05$ için $\Sigma_2 = d \frac{n_2}{n_1} \Sigma_1$ olmak üzere, d=3 ve d=9 olacak

şekilde ve değişkenler arasındaki ilişki A: değişkenler bağımsız ve B: yüksek korelasyon durumlarını içeren sadece 36 kombinasyon denenmiştir. Her kombinasyon için deneme sayısı 10000' dir. Bu Simülasyon çalışması sonucunda A ve B korelasyon yapısının sonuçları fazla etkilemediği, buna karşın değişken sayısı 2 için orta heterojenlikte d=3, gruplarda gözlemler 10:20 olduğunda $\alpha=0.0167$ ve gözlemler: 10:5 olduğunda 0.1229 olduğu, değişken sayısı 5 için orta heterojenlikte d=3, gruplarda gözlemler 20:40 olduğunda $\alpha=0.0108$ ve gözlemler 20:10 olduğunda $\alpha=0.2010$ olduğu bildirilmektedir. Bu çalışmanın Simülasyon sonuçları incelendiğinde negatif

şartlı durumun yani I.Tip hataların arttığı durumun; değişken sayısındaki artıştan pozitif şartlı duruma göre daha çok etkilendiği açıkça görülmektedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Kovaryans matrislerinin heterojenliği, çok değişkenli normal dağılım şartı altında ortalama vektörleri karşılaştırılacak grupların alındıkları populasyonlarda bağımlı değişkenler arasındaki kovaryansların farklı olmasından kaynaklanır.

Değişkenler standardize edildiğinde bu kovaryanslar korelasyonlara eşittir. Bu durumda;

$$\sigma_{ii}=1 \text{ ve } \sigma_{jj}=1 \text{ için } \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} \text{ ise } \rho_{ij}=\sigma_{ij} \text{ ve } \Sigma=\rho \text{ 'dir.}$$

Bu çalışmada Simülasyonlar standardize edilmiş gözlemler üzerinde yürütüldüğünden kovaryans yerine korelasyon katsayıları kullanılmıştır. Değişken sayısı 2 olduğunda, populasyonlardaki kovaryans matrisi;

$$\Sigma = \rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

Bu durumda populasyonlarda değişkenler arasındaki korelasyonlar farklı olduğunda populasyon kovaryans matrisleri de farklı olacaktır.

Bu çalışmada materyal olarak $\mu=0$ ve $\Sigma=\rho$ parametrelili çok değişkenli normal dağılımdan bilgisayar ortamında rasgele üretilen örnekler kullanılmıştır. Bu örneklerin bilgisayar ortamında üretilmesinde ve Simülasyon denemelerinin yürütülmesinde Microsoft Fortran Power Station 4.0 programında E.A. KANIK tarafından yazılan Fortran programları kullanılmıştır. Bu yöntemin algoritmasında kullanılan Z standart normal dağılım değişkenleri Box-Muller transformasyonuna göre üretilmiştir. Box-Muller transformasyonunda kullanılan üniform dağılım değişkenleri ise çarpmalı denklik üreticilerinden (Multiplicative Congruential Pseudo Random Number Generator) olan ve Park ve Miller tarafından (1988) önerilen yöntemle üretilmiştir (Kanık, 1999).

$H_0 : \mu_A = \mu_B$ kontrol hipotezinin test edilmesinde kullanılan Hotelling T^2 istatistiğinin, kovaryans matrislerinin heterojenliğinden, gruplardaki gözlem sayısının eşit olmamasından ve değişken sayısının artmasından ne kadar etkilendiğinin saptanması amacıyla değişik kombinasyonlarda Simülasyon denemeleri yapılmıştır. Her bir Simülasyon denemesi A ve B örneklerinin alındıkları populasyonlardaki korelasyon matrislerinin ve gruplardaki örnek genişliklerinin farklı N_A , N_B kombinasyonlarında olacak şekilde düzenlenen bir denemenin hipotez testinden oluşmaktadır. Bu çalışmada aynı kombinasyon yani her bir Simülasyon denemesi 10000 kere tekrarlanmıştır. Bu 10000 kere yapılan hipotez testlerinde $\alpha=0.05$ olarak kararlaştırıldığında reddedilen hipotezler saydıkları gerçeğe I.Tip hata değerleri % olarak hesaplanmıştır.

Bu Simülasyon denemelerinde özellikle gruplardaki örnek genişliklerinin farklılığının ve kovaryans matrislerinin heterojenliğinin diğer araştırmalara göre daha küçük aralıklarla incelenmesi planlanmıştır.

Bu denemelerde kullanılan örneklerin alındığı çok değişkenli normal populasyonların parametreleri, değişken sayıları ve örnek genişlikleri aşağıda verilmiştir.

Örneklerin alındığı populasyonların ortalama vektörleri aynı olup $\mu_A = \mathbf{0}$ ve $\mu_B = \mathbf{0}$ şeklindedir. Kovaryans matrisleri ise farklı olup $\Sigma_i = \rho_i$ dir ($i=1, 2$ grup sayısı). A ve B gruplarında bağımlı değişken sayısı sırasıyla $p : 2, 3, 5$ ve 10 olarak alınmıştır. Bağımlı değişken sayısı $3, 5$ ve 10 olduğu durumlar için; her bir populasyondaki korelasyon matrisinin köşegen elemanlarının 1 , diğer elemanlarının ise birbirine eşit olduğu yani değişkenler arasında ortak bir ρ olduğu varsayılmıştır. Değişkenler arasında eşit olduğu kabul edilen bu ortak korelasyon katsayıları, populasyondaki korelasyon matrislerini belirler. A ve B örneklerinin alındıkları populasyonlarda değişkenler arasında var olduğu kabul edilen ortak korelasyon katsayılarının aşağıdaki gibi olduğu durumlardaki kombinasyonlar Simülasyonla denenmiştir. Bu çalışmada “bağımlı değişken sayısı” yerine bundan sonra kısaca “değişken sayısı” deyimini kullanılacaktır.

$$\rho_A = 0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80$$

$$\rho_B = 0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80$$

Bu denemelerde $\rho_A < \rho_B$ olan tüm korelasyon kombinasyonların, gruplardaki gözlem sayıları; $N_A = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ ve $N_B = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ olmak üzere tüm gözlem sayısı kombinasyonları kullanılmıştır. Böylelikle 45 farklı kovaryans matrisi kombinasyonu x 36 farklı örnek genişliği x 3 farklı değişken sayısı için toplam 4860 farklı simülasyon denemesi kurulmuştur. Her Simülasyon denemesi 10000 kere tekrarlanmış ve her kombinasyon için gerçekleşen I.Tip hatalar % olarak hesaplanmıştır.

Değişken sayısı 10 için örnek genişlikleri $20'$ den başlatılmıştır. Bu denemelerde yine aynı kovaryans matrisi kombinasyonlar 45×25 farklı örnek genişliği kombinasyonu için toplam 1125 farklı deneme kurulmuştur. Bu denemelerde gerçekleşen I.Tip hatalar ise çizelge $4.1'$ de verilmiştir.

Hotelling T² istatistiğine ait yürütülen toplam 5985 Simülasyon denemesinde kullanılan Fortran programı Ek $1'$ de verilmiştir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

5985 adet farklı denemeden elde edilen I.Tip hatalar incelendiğinde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenmiştir.

Öncelikle A ve B gruplarının alındıkları populasyonlarda korelasyonlar eşit olduğunda, ($\rho_A = \rho_B = 0.$, $\rho_A = \rho_B = 0.10$, $\rho_A = \rho_B = 0.20$, $\rho_A = \rho_B = 0.30$, $\rho_A = \rho_B = 0.40$, $\rho_A = \rho_B = 0.50$, $\rho_A = \rho_B = 0.60$, $\rho_A = \rho_B = 0.70$ ve $\rho_A = \rho_B = 0.80$) gruplarda gözlem sayılarının eşit olmayışının ve populasyonlarda birbirine eşit olmak şartıyla

korelasyonların değerinin büyümesinin I.tip hatayı etkilemediği, gerçekleşen I.tip hataların %5 sınırını koruduğu ve bu durumun değişken sayısına göre değişmediği görülmektedir.

Gözlemlerin eşitliği, 2 değişken için $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.80$ durumunda bile gerçekleşen I.tip hataların %5 sınırında kalmasını sağlamaktadır. Değişken sayısı 3 ve 5 için $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.60$ durumunda gözlemlerim eşit olması $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.70$ ve $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.80$ durumunda ise eşit ve 20'den fazla olması, gerçekleşen I.tip hataların %5 sınırında kalmasını sağlamaktadır. Gruplarda gözlem sayılarının eşit ve 20'den fazla olması, değişken sayısı 10 için; $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.60$ durumuna kadar gerçekleşen I.tip hataların %5 sınırında kalmasını sağlamaktadır.

Populasyonlarda korelasyonların $\rho_A = 0.00$, $\rho_B = 0.50$ ve $N_A = 10$, $N_B = 20$ olması halinde değişken sayısı 2 olduğunda bile gerçekleşen I.tip hata %6.3 olmaktadır. Değişken sayısı 3 olduğunda bu değer %7.2'ye, değişken sayısı 5 olduğunda %8.9'a çıkmaktadır. Değişken sayısı 10 olduğunda ise $N_A = 20$, $N_B = 30$ için gerçekleşen I.tip hata %9.2 olarak saptanmıştır. Aynı korelasyon düzeninde gözlem sayıları $N_A = 10$, $N_B = 60$ olduğunda ise gerçekleşen I.tip hata değerleri daha da artmaktadır. 2 değişken için bu değer %8.3 'e, 3 değişken için % 11.2'ye ve 5 değişken için %15.9 'a çıkmaktadır. Bu sonuçlar böyle bir durumda korelasyonun yüksek olduğu grupta gözlem sayısını artırmanın gerçekleşen I.tip hatayı giderek artırdığını ve değişken sayısındaki artışında buna etkisi olduğunu göstermektedir. Bu durum çizelge 6.1' den de görülmektedir.

Gerçekleşen en yüksek I.tip hatalar populasyonda korelasyonun yüksek olduğu grupta gözlem sayısının 60, düşük olduğu grupta gözlem sayısının 10 olduğu durumda ortaya çıkmakta fakat populasyondaki korelasyonlar arasındaki farklılık örneğin 0.10 olduğunda hep aynı kalmamaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi populasyonlarda birbirlerine eşit kalmak şartıyla korelasyonun değerinin artması gerçekleşen I.tip hatayı değiştirmemektedir Çizelge 4.2 incelendiğinde ise hem değişken sayısının artması hem de populasyonlardaki korelasyonun değerinin büyümesinin gerçekleşen I.tip hataları düzenli bir şekilde artırdığı gözlenmektedir.

Çizelge 1. $\rho_A = 0.$, $\rho_B = 0.50$ durumunda, bazı N_A , N_B kombinasyonlarında Hotelling T^2 testi sonucunda gerçekleşen I.tip (%) hatalar.

N_A, N_B	p=2	p=3	p=5
10, 20	6.3	7.2	8.9
10, 30	6.7	8.5	11.4
10, 40	7.8	9.8	13.5
10, 50	8.2	10.6	15.1
10, 60	8.3	11.2	15.9

Çizelge 2. $N_A = 10$, $N_B = 60$ durumunda Hotelling T^2 testi sonucunda gerçekleşen bazı I.tip (%) hata değerleri

ρ_A, ρ_B	2	3	5
0.00, 0.10	5	4.9	5.2
0.10, 0.20	5.2	5.0	5.6
0.20, 0.30	5.1	5.4	6.1
0.30, 0.40	5.7	5.9	6.4
0.40, 0.50	6.1	6.5	7.1
0.50, 0.60	6.3	7.0	8.1
0.60, 0.70	6.7	7.4	9.4
0.70, 0.80	7.5	8.7	11.5

Sonuç olarak kovaryans matrislerinin heterojenliği değişken sayısı 5'e kadar sadece gruplarda gözlemler eşit olmadığında I.Tip hatayı etkilemektedir. Gruplardaki gözlemlerin eşitsizliği Hotelling T^2 testinde gerçekleşen I.Tip hata üzerinde iki farklı etki yapmaktadır. Değişkenler arasındaki korelasyonun yüksek olduğu grupta örnek genişliğinin diğer gruba göre artması I.Tip hatayı artırmakta, korelasyonun düşük

olduğu grupta örnek genişliğinin artması I.Tip hatayı azaltmaktadır. I.Tip hatalarda artma diğer duruma göre çok daha çabuk ortaya çıkmaktadır. Her iki durumda istenmeyen durumlardır. Değişken sayısının 5'den fazla olması ise bu istenmeyen durumların ortaya çıkmasını hızlandırmakta ve daha tehlikeli bir hale getirmektedir.

4.1. İstatistik Analiz sonuçları

Simülasyon denemelerinde Hotelling T² testiyle yapılan hipotez testleri sonucunda gerçekleşen % I.tip hata değerlerinin tanıtıcı istatistikleri çizelge 3. de verilmiştir.

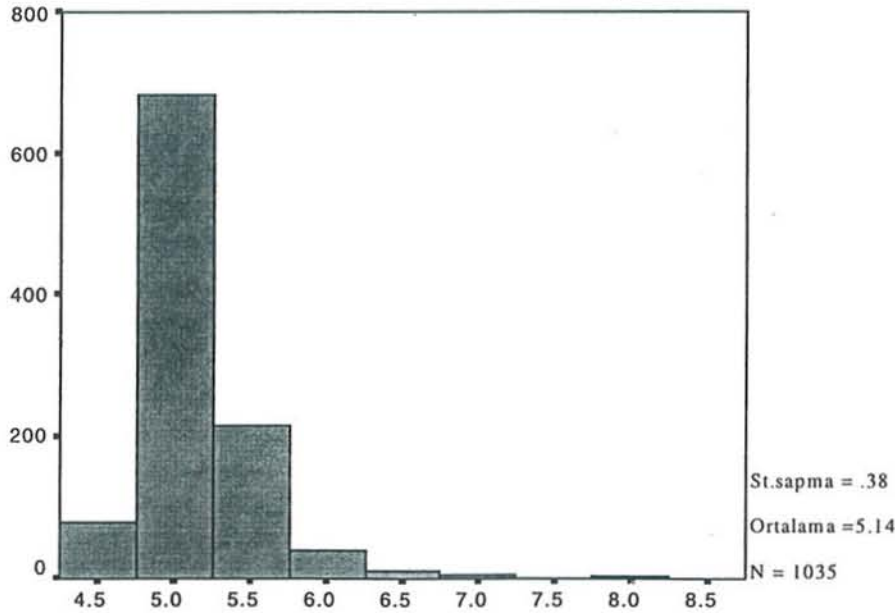
Çizelge 3. Gerçekleşen % I.tip hata değerlerine ait tanıtıcı istatistikler

	N	Minimum	Maksimum	Ortalama	Standart Sapma	Varyans
Gerçekleşen % I.tip hata	5985	.60	46.70	5.8831	3.5719	12.758

Gerçekleşen hata değerlerinin kovaryans matrisleri heterojen fakat gruplarda gözlemler eşit olduğunda dağılımı ise şekil 1. de verilmiştir. Gruplarda gözlemler eşit olduğunda gerçekleşen I.tip hataların maksimum ve minimum değerlerindeki azalmalar şekil 1.den görülmektedir. Bu değerlere ilişkin tanıtıcı istatistikler çizelge 4. de verilmiştir.

Çizelge 4. Gruplarda gözlemler eşit olduğunda gerçekleşen % I.tip hata değerlerine ait tanıtıcı istatistikler

	N	Minimum	Maksimum	Ortalama	Standart Sapma	Varyans
Gerçekleşen % I.tip hata	1035	4.40	8.70	5.1416	.3834	.147



Şekil 1. Gruplarda gözlemler eşit olduğunda gerçekleşen % I.tip hata değerleri

Simülasyon sonuçları incelendiğinde gerçekleşen % I.tip hata değerlerindeki değişim populasyonlardaki korelasyon matrisleri ve gruplardaki gözlem sayıları ile oldukça ilişkili olduğu görülmektedir. Gerçekleşen I.tip hatalardaki değişimi açıklayabilmek amacıyla DP ve K adı verilen iki özgün katsayı hesaplanmıştır. Bu katsayıların hesaplanmasındaki aşamalar aşağıda verilmiştir.

$\text{Det}(\Sigma_A) > \text{Det}(\Sigma_B)$ olacak şekilde ve p değişken sayısını göstermek üzere;

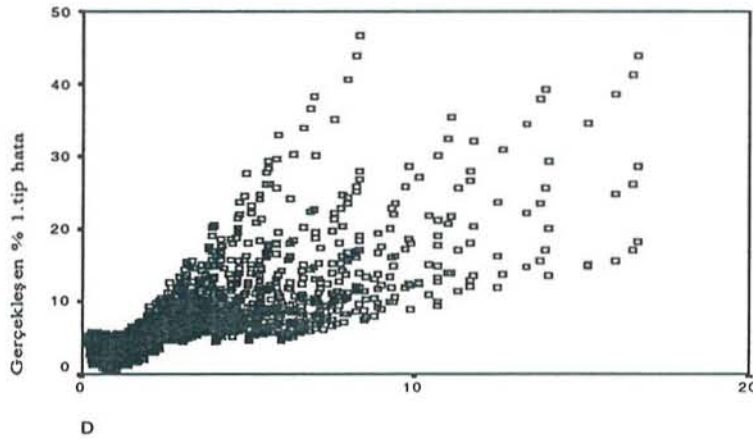
Burada determinantı büyük olan grup A grubu seçilerek bu katsayılar hesaplanacaktır.

$$DP = p \frac{\det(\Sigma_A) N_B}{\det(\Sigma_B) N_A} \quad K = DP(\det \Sigma_A - \det \Sigma_B)(N_B - N_A)$$

A ve B gruplarının alındığı populasyonlardaki kovaryans veya bu çalışmada korelasyon matrislerinin determinantları , gruplardaki örnek genişlikleri ve değişken sayısından yararlanılarak önce

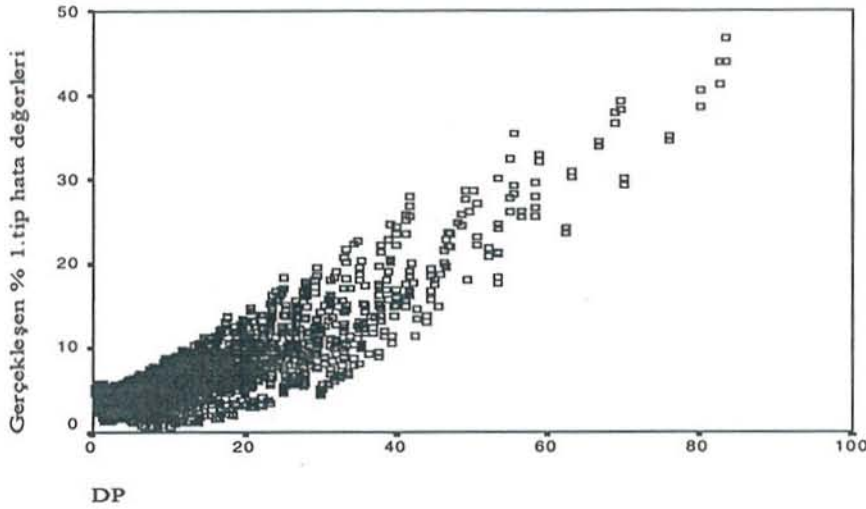
$$D = \frac{\det(\Sigma_A) N_B}{\det(\Sigma_B) N_A} \text{ katsayısı geliştirilmiştir. Bu katsayı ile gerçekleşen \% I.tip hata}$$

değerleri arasındaki korelasyon katsayısı $r=0.744$ olarak hesaplanmıştır ($p < 0.000$). D ile gerçekleşen % I.tip hata değerleri arasındaki ilişkinin grafiği şekil 2. de verilmiştir.



Şekil 2. D ile gerçekleşen % I.tip hata değerleri arasındaki ilişkinin grafiği

Şekil 2. 'den de görüldüğü gibi gerçekleşen I.tip hatalardaki artışlar tam olarak D katsayısı ile açıklanamamaktadır. Ancak bu çalışmada yapılan Simülasyon çalışmalarından elde edilen en önemli sonuçlardan birisi de gerçekleşen % I.tip hatalardaki değişimde kovaryans matrislerinin heterojenliğinin ve gruplardaki gözlem sayısının yanında değişken sayısının da etkisi olduğudur. Bu durum dikkate alınarak D katsayısı p değişken sayısı ile çarpılarak elde edilen DP ile gerçekleşen % I.tip hatalar arasındaki korelasyon katsayısı $r=0.821(p < 0.001)$ olup, DP ile gerçekleşen % I.tip hatalar arasındaki ilişkinin şekli, şekil 3 de verilmiştir.



Şekil 3. DP ile gerçekleşen % I.tip hatalar arasındaki ilişki

DP ile gerçekleşen % I.tip hatalar arasında yapılan basit regresyon analizi sonucunda regresyon denklemi:

$$Y = 3.223 + 0.305 DP \quad \text{şeklindedir}(p < 0.001).$$

Denklemin standart hatası $s = 4.161$ ve determinasyon katsayısı $R^2 = \%67.4$ olarak hesaplanmıştır.

Ancak populasyonlarda kovaryans matrisleri ve gruptaki gözlemler eşit olduğunda bu denklemden tahmin edilen gerçekleşen I.tip hata DP 'nin eşitliğindeki p ile orantılı olarak artacaktır. Oysa ön şartlar yerine geldiği zaman değişken sayısının gerçekleşen I.tip hatalara önemli bir etkisi olmadığı Simülasyon sonuçlarından gözlenmektedir. Bunun yanında Simülasyon sonuçlarından populasyonda korelasyonların değerinin artmasının ve gruptaki örnek sayısının artmasının da gerçekleşen % I.tip hatalara olan etkisidir. Bu bulgular değerlendirilerek DP katsayısının yeniden düzenlenmesiyle ;

$$DP = p \frac{\det(\Sigma_A) N_B}{\det(\Sigma_B) N_A} \quad K = DP(\det \Sigma_A - \det \Sigma_B)(N_B - N_A)$$

K katsayısı elde edilmiştir. Bu katsayı populasyonda kovaryanslar veya grupta gözlemler eşit olduğunda $K=0$ olmaktadır. K ile gerçekleşen % I.tip hatalar arasındaki korelasyon katsayısı $r=0.935$ olarak hesaplanmıştır($p < 0.001$). K ile gerçekleşen % I.tip hata değerleri arasında yapılan basit regresyon analizi sonucunda regresyon denklemi:

$$Y = 4.932 + 0.00423 K \quad \text{şeklindedir}(p < 0.001).$$

Denklemin standart hatası $s = 2.136$ ve determinasyon katsayısı $R^2 = \%87.4$ olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada geliştirilen K katsayısı ile örnekten hesaplanacak olan kovaryans matrislerinin determinantlarından, gruptaki örnek genişliği ve değişken sayısından yararlanılarak yukarıda verilen regresyon denkleminde, yapılan hipotez testinde gerçekleşecek % I.tip hatanın bir tahmini elde edilebilir.

Bu çalışmada sonuç olarak araştırmacılara 5'den fazla değişkenle çalışırken kovaryans matrislerinin homojenlik testini mutlaka yapmalarını eğer kovaryans matrisleri heterojense gruptaki gözlemleri mutlaka eşit tutmaları önerilebilir.

Hotelling T^2 testinde, değişken sayısının 10'dan fazla olduğu durumlarda araştırıcılara değişken sayılarını, faktör analizi, temel bileşenler analizleri gibi uygun çok değişkenli istatistik analiz yöntemleriyle azaltmaları önerilebilir.

KAYNAKLAR

- CHRISTENSEN, W.F. and RENCHER, A.C. (1997), "A Comparison of Type I Error and Power Levels for Seven Solution to the Multivariate Behrens – Fisher Problem", *Comm. Statist. Simula.*, 26(4), 1251-1273.
- HAKSTIAN, A.R., ROED, J.C., LIND, J.C. (1979), "Two – Sample T^2 Procedures and the Assumption of Homogeneous Covariance Matrices", *Psychological Bulletin*, 86(6), 1255-1263.
- HAWKINS, D.M. (1981), "A New Test for Multivariate Normality and Homoscedasticity", *Technometrics*, 23(1), 105-110.
- KANIK, E.A. (1999), "Çok Değişkenli Varyans Analizinde Kovaryans Matrislerinin Homojenliği Ön Şartı", A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi . Ankara.
- PARK, K.S., MILLER, K.W. (1988), "Random Number Generators: Good Ones Are Hard to Find", *Computing Practices*, 31(10); 1192-1201.
- STEVENS, J. (1986). "Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences", Lowrance Erlbaum Associates, Inc., 515s., London.
- TEKİNDAL B. (1998), *Varyans Analizi Teknięinin Önşartları ve Transformasyonlar*. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü. Doktora Tezi, Ankara.

Heterogeneity Of Covariance Matrices Effect On Type-I Error in Hotelling- T^2 Test: A Simulation Study

ABSTRACT

In this study robustness of The Hotelling's T^2 was investigated via simulation study under the assumption violation of homogeneity of covariance matrices, in the case of unequal sample size. It is known that the rate of actual type I error has been affected by this condition. This effect may vary by sample size, the number of dependent variables and covariance matrices structure. To show this changes, 5985 different combinations were simulated and each combination was executed 10000 times. Subsequently each actual type I error rate obtained from that combination was computed.

Conclusively, the effect of heterogeneity of covariance matrices on Type I error rate was not important until the number of dependent variable reaches five. However, a serious problem can occur if the covariance matrices is heterogene, the number of dependent variables more than five and sample size unequal. The bigger the sample size in a group which has strong correlation structure, the bigger type I error rate is. The bigger sample size in a group which has weak correlation structure, however, the smaller type I error rate is. Increase in the number of dependent variable stimulated variation of the actual type I error rate.

The computed 5985 actual type I errors are summarized in several tables. Kanık has developed a coefficient called K. The corelation coefficient between actual type I errors and K is high, and the determination coefficient, R² is 88%.

Key Words : *Covariance matrices, Hotelling-T² test, heterogenity, type-I error, simulation*

EK 1

```

IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
! PROGRAM YENITKARE5
PARAMETER(KK=5)
DIMENSION
TFARK(1, KK), FARK(KK, 1), AINV(KK, KK), A
RA(1, KK), BBB(1, 1)
DIMENSION
COVA(KK, KK), R(1, KK), RSIG(KK, KK), COVB
(KK, KK)
DIMENSION
TA(KK), TB(KK), ORTA(KK, 1), ORTB(KK, 1),
F(1, 1)
DIMENSION
CTA(KK, KK), CTB(KK, KK), CCTB(KK, KK), TK
ARE(1, 1), TABLO(100, 100)
PARAMETER(LDA=KK, LDAINV=KK, N=KK)
EXTERNAL
DCHFAC, DRNMVN, DLINRG, DMACH, DFIN
OPEN(UNIT=3, FILE='LPT1')
OPEN(UNIT=2, FILE='TKAREP5')
TOL=100.0*DMACH(4)
NDEN=2
K=KK
NR=1
LDRSIG=KK
LDR=1
DO 2345 ACOV=0.0, 0.90, 0.10
DO 2345 BCOV=0.0, 0.90, 0.10
IF(ACOV.GT.BCOV)GO TO 2345
DO 2344 NA=10, 60, 10
DO 2344 NB=10, 60, 10
DO 1001 I=1, KK
DO 1001 J=1, KK
COVA(I, J)=ACOV
COVB(I, J)=BCOV
IF(I.EQ.J)COVA(I, J)=1.
IF(I.EQ.J)COVB(I, J)=1.
1001 CONTINUE
NSIG=0
DO 1234 KLM=1, NDEN
DO 25 I=1, KK
TA(I)=0.
TB(I)=0.
DO 25 J=1, KK
CTA(I, J)=0.
CTB(I, J)=0.
25 CONTINUE
DO 77 MA=1, NA
CALL
DCHFAC(K, COVA, KK, TOL, IRANK, RSIG, LDRS
IG)
CALL DRNMVN(NR, K, RSIG, LDRSIG, R, LDR)
DO 15 I=1, K
TA(I)=TA(I)+R(1, I)
DO 15 J=1, K
CTA(I, J)=CTA(I, J)+R(1, I)*R(1, J)
15 CONTINUE
77 CONTINUE
DO 55 I=1, KK
ORTA(I, 1)=TA(I)/NA
DO 55 J=1, KK
CTA(I, J)=CTA(I, J)-TA(I)*TA(J)/NA
55 CONTINUE
DO 87 MB=1, NB
CALL
DCHFAC(K, COVB, KK, TOL, IRANK, RSIG, LDRS
IG)
CALL DRNMVN(NR, K, RSIG, LDRSIG, R, LDR)
DO 95 I=1, K
TB(I)=TB(I)+R(1, I)
DO 95 J=1, K
CTB(I, J)=CTB(I, J)+R(1, I)*R(1, J)
95 CONTINUE
87 CONTINUE
DO 105 I=1, KK
ORTB(I, 1)=TB(I)/NB
DO 105 J=1, KK
CTB(I, J)=CTB(I, J)-TB(I)*TB(J)/NB
105 CONTINUE
CCTB=(CTA+CTB)/(NA+NB-2)
ANA=NA
ANB=NB
CALL
DLINRG(N, CCTB, LDA, AINV, LDAINV)
X=(ANA*ANB)/(ANA+ANB)
FARK=ORTA-ORTB
TFARK= TRANSPOSE(FARK)
ARA=MATMUL(TFARK, AINV)
BBB=MATMUL(ARA, FARK)
TKARE=X*BBB
F=((ANA+ANB-KK-1)/((ANA+ANB-
2)*KK))*TKARE
FF=F(1, 1)
P=0.95
DFN=KK
DFD=NA+NB-KK-1
FFF=DFIN(P, DFN, DFD)
IF(FF.GE.FFF)NSIG=NSIG+1
888 FORMAT(1H ,F15.5)
1234 CONTINUE
XXX=NSIG
YYY=NDEN
ZZZ=XXX/YYY*100

!D=COVB(1, 2)*NA/(NB*COVA(1, 2))
TABLO(NA, NB)=ZZZ
2344 CONTINUE

WRITE(2, 2005) COVA(1, 2), COVB(1, 2), KK,
NDEN
2005 FORMAT(1H
, 'KOVARYANSLAR', 2F7.2, 5X, 'N=10, 60, 10
P=', I3, ' DEN. ADEDI=' I7/)
DO 2007 I=10, 60, 10

WRITE(2, 2008) (TABLO(I, J), J=10, 60, 10)
2007 CONTINUE
2008 FORMAT(1H ,6F8.2)
2345 CONTINUE
END

```