Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1374733
AKÜ FEMÜBİD **24** (2024) 031305 (574-582) AKU J. Sci. Eng. **24** (2024) 031305 (574-582)

Rasyonel Regle Yüzeylerin Afin Denklikleri ve Simetrilerinin Tespiti Üzerine Yeni ve Etkili Bir Algoritma

A New and Efficient Algorithm for Detecting Affine Equivalences and Symmetries of Ruled Rational Surfaces

***Makale Bilgisi / Article Info**
Alındı/Received: 11.10.2023
Kabul/Accepted: 06.05.2024
Yayımlandı/Published: 27.06.2024

Hüsnü Anıl ÇOBAN[1*], Uğur GÖZÜTOK[2]

[1] *Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Trabzon, Türkiye*
[2] *Milli Savunma Üniversitesi, Hava Harp Okulu, Temel Bilimler Bölümü, İstanbul, Türkiye*

Öz
Bu çalışmada, rasyonel parametrizasyonlar yardımıyla verilen iki regle yüzey arasındaki tüm afin denklikleri hesaplayan yeni ve etkili bir yöntem sunulmaktadır. Yöntem, temelde, afin diferansiyel invaryantları kullanılarak denklikleri tespit etmektedir. Bu sayede, benzer problemi çözen metotlardan farklı olarak hesaplamayı zorlaştıran ve hesaplama süresinin uzamasına sebep olan polinom sistemi çözümlerine ihtiyaç duymamaktadır. Bu yöntem bir algoritma haline getirilmiş ve yöntemin performansı $Maple^{TM}(2021)$ bilgisayar cebir sistemi kullanılarak, geniş kapsamlı testlerle incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Regle yüzeyler; Afin denklik; Afin simetri; Algoritma.*

Abstract
A novel and efficient method for computing all affine equivalences between two ruled surfaces using rational parameterizations is presented in this paper. The technique essentially uses affine differential invariants to find equivalences in contrast to other methods, our method does not require polynomial system solutions, which complicate computations and increase computation time. The performance of the method was thoroughly tested using the $Maple^{TM}$ (2021) computer algebra system after it had been transformed into an algorithm.

Keywords: *Ruled surfaces; Affine equivalence; Affine symmetry; Algorithm.*

1. Giriş

Bir yüzeye, bir afin dönüşüm uygulanarak elde edilen ikinci yüzeye birinci yüzeyin afin dengidir, ya da iki yüzey afin denktir denir. Afin denkliklerin belirlenmesi, Bilgisayarlı Görü ve Örüntü Tanıma gibi alanlarda oldukça önemlidir. Çünkü bu alanlarda nesneler bir veri tabanında depolanır. Daha az depolama kapasitesi kullanmak için nesneleri, belli bir dönüşüm altında bilinen nesne ile ilişkilendirmeye ihtiyaç duyulur. Dahası Afin denkliklerin/simetrilerin tespiti ile iki nesne arasındaki tüm izometriler, simetriler (merkezi simetriler, bir düzleme göre yansımalar, dönel simetriler) de belirlenmiş olur. Örneğin bir yüzeyin simetrilerinin bilinmesi, yüzeyin geometrisini anlamak için ve hatta yüzeyi doğru bir şekilde görselleştirebilmek için oldukça faydalıdır. Bundan dolayı görüntü depolama, nesne tespiti gibi işlemlerde etkin olarak kullanılır. Bu durum, birçok metodun geliştirilmesine yol açmıştır. Son yıllarda birçok makale, eğriler ve yüzeyler için benzer problemleri ele almıştır (Alcázar vd. 2015, Alcázar ve Hermoso 2016, Alcázar ve Goldman 2017, Alcázar ve Quintero 2020, Alcázar vd. 2022, Bizzarri et al. 2020, Chen et al. 2001, Chen and Wang 2003, Gözütok vdl. 2023, Hauer ve Jüttler 2018, Hauer vd. 2018, Perez-Diaz ve Shen 2014).

Bunlardan Alcázar ve Quintero (2020), Chen vd. (2001), Chen ve Wang (2003), Perez-Diaz ve Shen (2014)' in çalışmalarında doğrudan regle yüzeyler araştırılmıştır.
Bu çalışmada, Alcázar ve Quintero (2020)' de elde edilen bulgulardan yararlanarak geliştirilen yeni ve etkili bir yöntem sunulmaktadır. Yöntem, benzer problemi ele alan diğer çalışmalardan farklı olarak, Alcázar vd. (2015) çalışmasından esinlenilerek ilk kez Gözütok vd. (2023) çalışmasında sunulan, denklik problemine diferansiyel invaryantlar yardımıyla çözüm arayan bir yaklaşıma dayanmaktadır. Bu yaklaşım sayesinde çok bilinmeyenli, yüksek dereceli, zorlu denklem sistemi çözümünden kaçınılmış olunmaktadır.
Her denklik problemi, dönüşümün kendine has özelliklerinden dolayı farklı bir diferansiyel invaryant fonksiyon kümesine ihtiyaç duymaktadır. Bu da elde edilen invaryantların diğer denklik problemlerinde elde

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Hüsnü Anıl ÇOBAN e-posta/e-mail: hacoban@ktu.edu.tr

edilenlerden farklı ve yeni olmasını sağlamaktadır. Ayrıca oluşturulan algoritma yardımıyla elde edilen test sonuçları da yöntemin bu konudaki benzer çalışmalara oranla ne kadar etkili olduğunu kanıtlamaktadır.

2. Materyal ve Metot

2.1. Ön bilgiler

S_1, S_2, aşağıda verildiği gibi, standart formda reel rasyonel parametrizasyonlar r_1, r_2 yardımıyla tanımlanan iki regle yüzey olsun.

$$r_i(t,s) = x_i(t) + s y_i(t) \tag{1}$$

Perez-Diaz ve Shen (2014) çalışmasında verilen bir algoritma ile, standart formda verilmemiş bir regle yüzeyin standart forma dönüştürülmesi sağlanmıştır. Burada, $x_i(t)$ taban eğrisi (the base curve) ve $y_i(t)$ ise gösterge eğrisi (the director curve) olarak adlandırılır (O' Neill 2006).

Bu aşamasından sonra, S regle yüzeyinin çift katlı regle yüzey (düzlem, hiperbolik paraboloit ve tek kanatlı hiperboloit) olmadığını varsayacağız. Çünkü, paraboloitlerin ve hiperboloitlerin afin denklikleri, onların kapalı denklemleri yardımıyla kolayca belirlenebilmektedir. Ayrıca her bir regle yüzey parametrizasyonu uygun, yani en fazla yüzeyin bir boyutlu alt kümesi hariç birebir, olduğunu kabul edeceğiz. Bunların yanında, $y_i(t)$ nin bileşeni olan üç polinomun en büyük ortak böleninin 1 olduğunu varsayacağız. Böylece, parametre değişimi tersinir olduğundan, bir parametrizasyon uygun ise diğeri de uygun olacaktır.

Eğer $f(S_1) = S_2$ olacak şekilde $f(r) = Mr + B$, $M \in \mathbb{R}^{3x3}$ bir regüler kare matris ($\det(M) \neq 0$), $r \in \mathbb{R}^3$ ve $B \in \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlanan bir $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tersinir afin dönüşümü varsa S_1, S_2 yüzeylerine afin denktirler denir. Burada, M matrisi bir ortogonal matris ise f dönüşümü yüzeyler arasındaki izometriyi; $\lambda \neq 0$ ve N bir ortogonal matris olmak üzere $M = \lambda N$ ise f dönüşümü yüzeyler arasındaki benzerliği tanımlar. Eğer $S_1 = S_2$ ise, bu takdirde birimden farklı f dönüşümü S_1 in simetrisini tanımlar.

2.2. Regle yüzeylerin afin denklikleri

S_1 ve S_2, (1) denklemindekine benzer şekilde, sırasıyla, r_1 ve r_2 ile parametrelenmiş ve *2.1. Ön bilgiler* bölümünde verilen şartları sağlayan iki reel rasyonel regle yüzey olsun. Aşağıda verilen teorem iki regle yüzey arasındaki afin denkliği parametrelenişleri arasındaki denkliğe indirgediği için çok önemlidir.

Teorem. S_1 ve S_2 reel rasyonel regle yüzeyleri, (1) denklemindekine benzer şekilde, sırasıyla, r_1 ve r_2 ile parametrelenmiş olsun. Bir $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r) = Mr + B$, burada M, $3x3$ tipinde bir regüler matris ve $B \in \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlanan dönüşüm için $f(S_1) = S_2$ (S_1, S_2 afin denk) dir ancak ve ancak bir $\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ birasyonel dönüşümü vardır öyle ki aşağıda verilen diyagram değişmelidir (commutative).

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] & S_2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "r_1"] \arrow[r, "\mu"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "r_2"'] \end{tikzcd}$$

Bir başka değişle,

$$f\big(r_1(t,s)\big) = r_2(\,\mu(t,s)) \tag{2}$$

dir.

İspat. Bu teoremin bir ispatı Alcázar ve Quintero (2020) makalesinde verilmiştir. ■

Buradaki birasyonel μ dönüşümü Cremona dönüşümü olarak isimlendirilir. Alcázar ve Quintero (2020) makalesinin 3. Bölüm' ünde S_1 ve S_2 yüzeylerinin afin denk ve regle olmalarını kullanarak μ Cremona dönüşümünün

$$\mu(t,s) = (\varphi(t), k(\gamma t + \delta)^n s + c(t)) \tag{3}$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Burada $\varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ şeklinde tanımlanan iyi bilinen Möbius dönüşümü; k, bir sabit; $c(t)$, bir rasyonel fonksiyon; n ise q_i yi oluşturan polinomların derecelerinin en büyüğüdür. Böylece, (2) ve (3) denklemlerini kullanarak,

$$M\big(x_1(t) + s y_1(t)\big) + B =$$

$$= x_2\big(\varphi(t)\big) + (k(\gamma t + \delta)^n s + c(t))y_2(\varphi(t))$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı s ye göre lineer olduğundan,

$$M x_1(t) + B = x_2\big(\varphi(t)\big) + c(t) y_2(\varphi(t)) \tag{4}$$

ve

$$M y_1(t) = \; k(\gamma t + \delta)^n y_2(\varphi(t)) \tag{5}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece iki regle yüzeyin afin denkliği, bu iki regle yüzeyin dayanak ve gösterge eğrilerinin afin denkliğine indirgenmiş olur.

2.3. Metot ve strateji

Dolayısı ile problem, *2.1. Ön bilgiler* bölümündeki şartları sağlayan iki rasyonel regle yüzeyin denkliğinden (4) ve (5) denklemleri ile verilen iki farklı eğrinin afin denkliğine dönüşür. Fakat, burada (4) denklemi ile verilen denklik, $c(t)$ rasyonel fonksiyonunun bilinmemesinden ve eşitliğin bir tarafında sadece dayanak eğrisi verisi varken diğer tarafında hem dayanak hem de gösterge eğrisi verisi bulunmasından dolayı incelenmesi zor bir denkliktir. Bundan dolayı öncelikle (5) denklemi ile verilen yani sadece gösterge eğrileri arasındaki denklik ifadesini ele alacağız. Alcázar ve Quintero (2020) da uygulanan metottan bu aşamadan sonra ayrışmaktayız. Bunun için;

1. *İnvaryant (değişmez) fonksiyonlar*. Bir parametrizasyonun kendisi ve türevlerini içeren determinantlar yardımıyla yazılan altı rasyonel fonksiyon ile yola çıkıyoruz. Bu fonksiyonları I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 ile gösterelim. Bu sayede, $1 \leq i \leq 6$ için,
$$I_i\big(y_1(t)\big) = I_i(k(\gamma t+\delta)^n y_2(\varphi(t))) \qquad (6)$$
elde edilir. Burada, $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ olacak şekilde $\varphi(t) = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ ve n ise y_i yi (Afin denk olduklarından $derece\big(y_1(t)\big) = derece\big(y_2(t)\big)$ dir.) oluşturan polinomların derecelerinin en büyüğüdür. Denklem (6)'daki değişkenleri k ve $\varphi(t)$ nin katsayıları olan bir denklem sistemi ortaya çıkarır. Fakat, bu sistem yüksek derecelidir ve çözümde kaçındığımız uzun hesaplama süreleriyle karşılaşmamıza sebep olur.

2. *Möbius dönüşümünden etkilenmeyen afin invaryant fonksiyonlar.* Büyük polinom sistemlerinin çözümü ile uğraşmamak için, I_i lerden iki rasyonel fonksiyon üreteceğiz. Bu invaryant fonksiyonları $R\kappa_1$ ve $R\kappa_2$ ile göstereceğiz. $i \in \{1,2\}$ için bu invaryantlar aşağıda verilen eşitliği sağlarlar;
$$R\kappa_i\big(y_1(t)\big) = R\kappa_i(\,k(\gamma t+\delta)^n y_2(\varphi(t))).$$
Burada elde edilen yeni fonksiyonların getirdiği avantaj,
$$I_i\big(k(\gamma t+\delta)^n y_2(\varphi)\big) \neq I_i(y_2)\circ\varphi(t)$$
iken
$$R\kappa_i\Big(\,k(\gamma t+\delta)^n y_2\big(\varphi(t)\big)\Big) = R\kappa_i(y_2)\circ\varphi(t)$$
eşitliğini sağlamasıdır. Devamında, $R\kappa_i$ lerden elde edilen iki polinomun *gcd (greatest common divisor)* si hesaplanır. Elde edilen polinomu çarpanlara ayırarak istenilen sonuç, yani φ nin katsayıları elde edilir.

3. φ Möbius dönüşümünü (5) denkleminde yerine yazarak k ya bağlı $\mathcal{M}$ matrisi elde edilir. Geriye, (4) denklemini kullanarak k, $c(t)$ ve B nin bulunması kalır. Bunun için de (4) denkleminin her iki tarafının t ye göre türevi alınır ve ortaya çıkan eşitliklerinden sırasıyla k sabiti ve $c(t)$ fonksiyonu elde edilir. Elde edilenlerin hepsi (4) denkleminde yerine yazılarak B vektörü hesaplanır.

3. Bulgular

3.1. Afin invaryantların belirlenmesi

I_i afin invaryantların inşası Gözütok vd. (2023) makalesi Bölüm 3.2. dekine benzerdir. Bu takdirde, (5) denklemine geri dönerek, $z := y_1(t)$ ve $w := (\gamma t+\delta)^n y_2(\varphi(t))$, yazalım. Böylece (5) denklemi, $\mathcal{M} := \frac{1}{k}M$ şeklinde bir tanımlamayla, $\mathcal{M}z = w$ olarak yazılabilir. Bu denklemin art arda t ye göre türevinin alınmasıyla $D(z) = [z\, z'\, z'']$ ve $D(w) = [w\, w'\, w'']$ olmak üzere $\mathcal{M}D(z) = D(w)$ eşitliği elde edilir. $D(z)$ ve $D(w)$ tersinir olduğundan, $\mathcal{M} = D(w)D(z)^{-1}$ yazılabilir. Denklemin t ye göre türevini alarak ve $\mathcal{M}$ matrisinin bileşenlerinin sabit olduğunu da hesaba katarak,

$$\frac{d(D(w)D(z)^{-1})}{dt} = 0 \qquad (7)$$

elde edilir. (7) eşitliğinin sol tarafındaki türevi açarak

$$D(z)^{-1}\frac{dD(a)}{dt} = D(w)^{-1}\frac{dD(w)}{dt} \qquad (8)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğin sol taraf Z ile, sağ tarafı W ile işaretlenirse,

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\|z'''\, z'\, z''\|}{\|z\, z'\, z''\|} \\ 0 & 1 & \frac{\|z\, z'''\, z''\|}{\|z\, z'\, z''\|} \\ 0 & 0 & \frac{\|z\, z'\, z'''\|}{\|z\, z'\, z''\|} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\|w'''\, w'\, w''\|}{\|w\, w'\, w''\|} \\ 0 & 1 & \frac{\|w\, w'''\, w''\|}{\|w\, w'\, w''\|} \\ 0 & 0 & \frac{\|w\, w'\, w'''\|}{\|w\, w'\, w''\|} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

elde edilir. Z matrisinin son sütununda ortaya çıkan rasyonel ifadeleri sırasıyla $I_1(u) := \frac{\|z'''\, z'\, z''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$, $I_2(u) :=$

$\frac{\|z\, z'''\, z''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$ ve $I_3(u) := \frac{\|z\, z'\, z'''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$ ile gösterelim. Burada, $\|z\, z'\, z''\|$, özdeşçe sıfır olmadığından (*2.1. Ön Bilgiler* bölümündeki şartlar sağlandığında) $1 \le i \le 3$ için I_i ler iyi tanımlıdırlar. (8) denkleminden, yani Z ve W matrislerinin eşitliğinden $1 \le i \le 3$ için $I_i(z) = I_i(w)$ dir, yani $I_i\big(y_1(t)\big) = I_i\big((\gamma t + \delta)^n y_2(\varphi(t))\big)$ dir. Fakat, burada özel yapısından dolayı afin denklik için ek olarak $I_4 := \frac{\|z\, z''''\, z''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$, $I_5 := \frac{\|z\, z'\, z''''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$ ve $I_6 := \frac{\|z\, z'\, z'''''\|}{\|z\, z'\, z''\|}$ şeklinde tanımlı üç tane daha invaryant fonksiyona ihtiyaç duyulmaktadır.

3.2. Möbiüs dönüşümünden etkilenmeyen $R\kappa_1$ ve $R\kappa_2$ afin invaryant fonksiyonlar

Bu fonksiyonları elde etmek için öncelikle, Möbius dönüşümünün paydası $\hbar := \gamma t + \delta$, $\Delta := \alpha\delta - \beta\gamma$ ve $\tilde{y}_2(t) := \hbar^n y_2\big(\varphi(t)\big)$ ile gösterilip, $\tilde{y}_2(t)$ nin t ye göre türevi alınırsa zincir kuralından,

$$\big(\tilde{y}_2(t)\big)' = n\gamma\, \hbar^{n-1} y_2\big(\varphi(t)\big) + \Delta \hbar^{n-2} y_2'\big(\varphi(t)\big)$$

$$\begin{aligned}\big(\tilde{y}_2(t)\big)'' = {} & n(n-1)\gamma^2 \hbar^{n-2} y_2\big(\varphi(t)\big) \\ & + 2(n-1)\gamma\Delta\hbar^{n-3} y_2'\big(\varphi(t)\big) \\ & + \Delta^2 \hbar^{n-4} y_2''\big(\varphi(t)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\tilde{y}_2(t)\big)''' = {} & n(n-1)(n-2)\gamma^3 \hbar^{n-3} y_2\big(\varphi(t)\big) \\ & + 3(n-1)(n-2)\gamma^2\Delta\hbar^{n-4} y_2'\big(\varphi(t)\big) \\ & + 3(n-2)\gamma\Delta^2\hbar^{n-5} y_2''\big(\varphi(t)\big) \\ & + \Delta^3 \hbar^{n-6} y_2'''\big(\varphi(t)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\tilde{y}_2(t)\big)'''' = {} & n(n-1)(n-2)(n-3)\gamma^4 \hbar^{n-4} y_2\big(\varphi(t)\big) \\ & + 4(n-1)(n-2)(n \\ & - 3)\gamma^3\Delta\hbar^{n-5} y_2'\big(\varphi(t)\big) \\ & + 6(n-2)(n-3)\gamma^2\Delta^2\hbar^{n-6} y_2''\big(\varphi(t)\big) \\ & + 4(n-3)\gamma\Delta^3\hbar^{n-7} y_2'''\big(\varphi(t)\big) \\ & + \Delta^4 \hbar^{n-8} y_2''''\big(\varphi(t)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\tilde{y}_2(t)\big)''''' = {} & n(n-1)(n-2)(n-3)(n \\ & - 4)\gamma^5 \hbar^{n-5} y_2\big(\varphi(t)\big) \\ & + 5(n-1)(n-2)(n-3)(n \\ & - 4)\gamma^4\Delta\hbar^{n-6} y_2'\big(\varphi(t)\big) \\ & + 10(n-2)(n-3)(n \\ & - 4)\gamma^3\Delta^2\hbar^{n-7} y_2''\big(\varphi(t)\big) \\ & + 10(n-3)(n \\ & - 4)\gamma^2\Delta^3\hbar^{n-8} y_2'''\big(\varphi(t)\big) \\ & + 5(n-4)\gamma\Delta^4\hbar^{n-9} y_2''''\big(\varphi(t)\big) \\ & + \Delta^5 \hbar^{n-10} y_2'''''\big(\varphi(t)\big)\end{aligned}$$

elde edilir.

I_i invaryant fonksiyonlarının tanımından,

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_1(\tilde{y}_2(t)) = {} & n(n-1)(n-2)\gamma^3\hbar^3 \\ & + n(n-1)\gamma^2\Delta\hbar^2 I_3(y_2(t)) \circ \varphi(t) \\ & - n\gamma\Delta^2\hbar I_2(y_2(t)) \circ \varphi(t) \\ & + \Delta^3 I_1(y_2(t)) \circ \varphi(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^4 I_2(\tilde{y}_2(t)) = {} & -3(n-1)(n-2)\gamma^2\hbar^2 \\ & - 2(n-1)\gamma\Delta\hbar I_3(y_2(t)) \circ \varphi(t) \\ & + \Delta^2 I_2(y_2(t)) \circ \varphi(t)\end{aligned}$$

$$\hbar^2 I_3(\tilde{y}_2(t)) = 3(n-2)\gamma\hbar + \Delta I_3(y(t)) \circ \varphi(t)$$

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_4(\tilde{y}_2(t)) = {} & -8n(n-1)(n-2)(n-3)\gamma^3\hbar^3 \\ & - 8(n-1)(n-3)\gamma^2\Delta\hbar^2 I_3(y_2(t)) \\ & \circ \varphi(t) + 4(n-3)\gamma\Delta^2\hbar I_2(y_2(t)) \\ & \circ \varphi(t) - 2(n-1)\gamma\Delta^2\hbar I_5(y_2(t)) \\ & \circ \varphi(t) + \Delta^3 I_4(y_2(t)) \circ \varphi(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^4 I_5(\tilde{y}_2(t)) = {} & 6(n-2)(n-3)\gamma^2\hbar^2 \\ & + 4(n-3)\gamma\Delta\hbar I_3(y_2(t)) \circ \varphi(t) \\ & + \Delta^2 I_5(y_2(t)) \circ \varphi(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_6(\tilde{y}_2(t)) = {} & 10(n-2)(n-3)(n-4)\gamma^3\hbar^3 \\ & + 10(n-3)(n-4)\gamma^2\Delta\hbar^2 I_3(y_2(t)) \\ & \circ \varphi(t) + 5(n-4)\gamma\Delta^2\hbar I_5(y_2(t)) \\ & \circ \varphi(t) + \Delta^3 I_6(y_2(t)) \circ \varphi(t)\end{aligned}$$

ifadelerine ulaşılır. Elde edilen bu ifadelere $I_i\big(y_1(t)\big) = I_i(\tilde{y}_2(t))$ eşitliği uygulanırsa ve kısalık için $I_i\big(y_1(t)\big) := I_i(y_1)$ ve $I_i\big(y_2(t)\big) \circ \varphi(t) := J_i(y_2)$ gösterimleri seçilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_1(y_1) = {} & n(n-1)(n-2)\gamma^3\hbar^3 \\ & + n(n-1)\gamma^2\Delta\hbar^2 J_3(y_2) \\ & - n\gamma\Delta^2\hbar J_2(y_2) + \Delta^3 J_1(y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^4 I_2(\tilde{y}_2(t)) = {} & -3(n-1)(n-2)\gamma^2\hbar^2 \\ & - 2(n-1)\gamma\Delta\hbar J_3(y_2) + \Delta^2 J_2(y_2)\end{aligned}$$

$$\hbar^2 I_3(\tilde{y}_2(t)) = 3(n-2)\gamma\hbar + \Delta J_3(y_2)$$

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_4(\tilde{y}_2(t)) = {} & -8n(n-1)(n-2)(n-3)\gamma^3\hbar^3 \\ & - 8(n-1)(n-3)\gamma^2\Delta\hbar^2 J_3(y_2) \\ & + 4(n-3)\gamma\Delta^2\hbar J_2(y_2) \\ & - 2(n-1)\gamma\Delta^2\hbar J_5(y_2) + \Delta^3 J_4(y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^4 I_5(\tilde{y}_2(t)) = {} & 6(n-2)(n-3)\gamma^2\hbar^2 \\ & + 4(n-3)\gamma\Delta\hbar J_3(y_2) + \Delta^2 J_5(y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hbar^6 I_6(\tilde{y}_2(t)) = {} & 10(n-2)(n-3)(n-4)\gamma^3\hbar^3 \\ & + 10(n-3)(n-4)\gamma^2\Delta\hbar^2 J_3(y_2) \\ & + 5(n-4)\gamma\Delta^2\hbar J_5(y_2) + \Delta^3 J_6(y_2)\end{aligned}$$

$\Delta u = 1$ olacak şekilde $u \neq 0$ sayısı Δ ları yok edecek şekilde yukarıdaki denklemlere uygulanırsa,

$$u^3\hbar^6 I_1(y_1) = n(n-1)(n-2)(\gamma u)^3\hbar^3 + n(n-1)(\gamma u)^2\hbar^2 J_3(y_2) - n(\gamma u)\hbar J_2(y_2) + J_1(y) \quad (11)$$

$$u^2\hbar^4 I_2(y_1(t)) = -3(n-1)(n-2)(\gamma u)^2\hbar^2 - 2(n-1)(\gamma u)\hbar J_3(y_2) + J_2(y_2) \quad (12)$$

$$u\hbar^2 I_3(y_1(t)) = 3(n-2)(\gamma u)\hbar + J_3(y_2) \quad (13)$$

$$u^3\hbar^6 I_4(y_1(t)) = -8n(n-1)(n-2)(n-3)(\gamma u)^3\hbar^3 - 8(n-1)(n-3)(\gamma u)^2\hbar^2 J_3(y_2) + 4(n-3)(\gamma u)\hbar J_2(y_2) - 2(n-1)(\gamma u)\hbar J_5(y_2) + J_4(y_2) \quad (14)$$

$$u^2\hbar^4 I_5(y_1(t)) = 6(n-2)(n-3)(\gamma u)^2\hbar^2 + 4(n-3)(\gamma u)\hbar J_3(y_2) + J_5(y_2) \quad (15)$$

$$u^3\hbar^6 I_6(y_1(t)) = 10(n-2)(n-3)(n-4)(\gamma u)^3\hbar^3 + 10(n-3)(n-4)(\gamma u)^2\hbar^2 J_3(y_2) + 5(n-4)(\gamma u)\hbar J_5(y_2) + J_6(y_2) \quad (16)$$

denklemleri elde edilir. (13) denkleminden

$$\gamma u = \frac{u\hbar^2 I_3(y_1) - J_3(y_2)}{3(n-2)\hbar}$$

elde edilip, (11), (12), (14), (15) ve (16) denklemlerinde yerine yazıldığında, (12) denkleminden

$$u^2\hbar^4 = \frac{3(n-2)J_2(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}{3(n-2)I_2(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2},$$

(15) denkleminden de

$$u^2\hbar^4 = \frac{3(n-2)J_5(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}{3(n-2)I_5(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2},$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen denklemlerin sol taraflarının eşit olmasından dolayı,

$$\frac{3(n-2)J_2(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}{3(n-2)I_2(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2} = \frac{3(n-2)J_5(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}{3(n-2)I_5(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2}$$

ve buradan da,

$$\frac{3(n-2)I_5(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2}{3(n-2)I_2(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2} = \frac{3(n-2)J_5(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}{3(n-2)J_2(y_2) + (n-1)J_3(y_2)^2}$$

simetrik ifadesi elde edilimiş olur. Böylelikle de aradığmız rasyonel invaryantlardan ilkini elde etmiş oluruz. Bu invaryantı $R\kappa_1$ ile gösterirsek,

$$R\kappa_1(y_1) := \frac{3(n-2)I_5(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2}{3(n-2)I_2(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2} \quad (17)$$

dir. Benzer işlemler (11), (15) ve (16) denklemlerine uygulandığında ikinci invaryant,

$$R\kappa_2(y_1) := \frac{\left(\begin{array}{c} 540(n-2)^2[(I_1(y_1) + \frac{I_4(y_1)}{4} + \frac{I_6(y_1)}{10})n^2 \\ +(-7I_1(y_1) - I_4(y_1) - \frac{I_6(y_1)}{10})n + 12I_1(y_1)] \end{array}\right)^2}{(3(n-2)I_2(y_1) + (n-1)I_3(y_1)^2)^3} \quad (18)$$

elde edilir.

3.2.1. Not $R\kappa_1(y_1)$ ve $R\kappa_2(y_1)$ invaryantları ile çalışabilmek için $n > 3$ yani $degree(y_i) > 3$ olmalıdır. Bu şart yüzünden yöntemimiz ile bazı regle yüzeylerin afin denklikleri incelenemese de burada yalnızca denkliği kolayca hesaplanabilenler incelenememiş olacağı için önemli bir sorun ortaya çıkmamaktadır.
Böylece (5) denklemiyle verilen gösterge eğrilerinin merkezil afin denkliği için aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

3.2.2. Teorem $i \in \{1,2\}$ ve $n > 3$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$R\kappa_i(y_1) = R\kappa_i(y_1)(\varphi) \quad (19)$$

3.2.3 Teorem S_1, S_2 sırasıyla (1) denkleminde verilen r_1, r_2 uygun parametrizasyonlarına sahip, çift katlı olmayan ve gösterge eğrilerinin (q_i) dereceleri 3 den büyük iki rasyonel regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_1 ve S_2 afin denk ise aşağıdakiler sağlanır:

$$R\kappa_1(y_1) = R\kappa_1(y_2)(\varphi)$$
$$R\kappa_2(y_1) = R\kappa_2(y)(\varphi). \quad (20)$$

3.3. Afin denkliklerin hesaplanması

Bu bölümde bir önceki bölümde elde edilen bulgular hesaplamalı sonuçlara dönüştürülecektir. İlk olarak,

$$R\kappa_1(q_1) = \frac{U_1}{V_1}, \qquad R\kappa_2(q_1) = \frac{U_2}{V_2},$$
$$R\kappa_1(q_2) = \frac{\widetilde{U_1}}{\widetilde{V_1}}, \qquad R\kappa_2(q_2) = \frac{\widetilde{U_2}}{\widetilde{V_2}}$$

alalım. Burada, U_i, V_i ile $\widetilde{U_i}, \widetilde{V_i}$ ifadeleri t parametresine bağlı $\gcd(U_i, V_i) = gcd(\widetilde{U_i}, \widetilde{V_i}) = 1$ şartını sağlayan polinomlardır. Buradan keyfi $\mathcal{L} = \varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ Möbius dönüşümüne karşılık gelen Möbius çarpanı olmak üzere, aşağıdaki polinomları tanımlayalım.

$$\mathcal{P}_1(t, \mathcal{L}) := U_1(t)\widetilde{V_1}(\mathcal{L}) - V_1(t)\widetilde{U_1}(\mathcal{L})$$
$$\mathcal{P}_2(t, \mathcal{L}) := U_2(t)\widetilde{V_2}(\mathcal{L}) - V_2(t)\widetilde{U_2}(\mathcal{L}) \quad (21)$$

Bu polinomların en büyük ortak çarpanını da

$$G := \gcd(\mathcal{P}_1(t, \mathcal{L}), \mathcal{P}_2(t, \mathcal{L})) \quad (22)$$

şeklinde gösterelim. Bununla birlikte, Möbius çarpanını da

$$\mathcal{C}(t, \mathcal{L}) := (\alpha t + \beta) - \mathcal{L}(\gamma t + \delta) \quad (23)$$

olarak tanımlayalım.

3.3.1. Teorem S_1, S_2 sırasıyla (1) denkleminde verilen r_1, r_2 uygun parametrizasyonlarına sahip, çift katlı olmayan ve gösterge eğrilerinin (q_i) dereceleri 3 den büyük iki regle yüzey olsun. S_1, S_2 afin denk ise $\mathcal{C}$ polinomu G polinomunu böler.

İspat. S_1, S_2 regle yüzeyler afin denk ise bu yüzeylerin gösterge eğrilerinin q_1, q_2 parametrizasyonları (5) denklemindeki afin denkliğe indirgenir. Bu takdirde, 3.2.3 Teorem ve (21) denklemlerinden $i \in \{1,2\}$ için $\mathcal{P}_i(t,\mathcal{L}) = 0$ olacak şekilde bir $\mathcal{L}$ Möbius dönüşümü vardır. Bu Möbius dönüşümüne karşılık gelen Möbius çarpanı $\mathcal{C}(t,\mathcal{L})$ olsun. $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_i(t,\mathcal{L}) = 0$ sisteminin çözümü olduğundan, $\mathcal{C}(t,\mathcal{L})$ polinomunun sıfır yerleri olan $(t,\mathcal{L})$ ikilileri $G(t,\mathcal{L})$ polinomunun sıfır yerinde içerilir. Diğer taraftan $\mathcal{C}(t,\mathcal{L})$ indirgenemez olduğundan Bezout Teoremi' ne göre $\mathcal{C}(t,\mathcal{L})$, $G(t,\mathcal{L})$ nin bir çarpanı olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç olarak $G(t,\mathcal{L})$ polinomunun çarpanlarından $\mathcal{C}(t,\mathcal{L})$ tipinde çarpanlar belirlenir. Bu çarpanlarda, $\mathcal{L}$ yalnız bırakılarak Möbius çarpanları elde edilir.

Daha sonra, elde edilen her bir Möbius dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{M}$ matrisi *3.1. Afin invaryantların belirlenmesi* bölümünde anlatıldığı şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{M} = D((\gamma t + \delta)^n y_2(\mathcal{L}))D(y_1)^{-1} \quad (24)$$

Burada, $\mathcal{M}$ matris, k sabitine bağlı, bileşenleri sabit sayılardan oluşan ve $\mathcal{M} = \frac{1}{k}M$ şeklinde tanımlı bir regüler matristir.

Daha sonra, elde edilen bütün bilgiler (4) denkleminde yerine yazılarak (4) denklemi, k sabiti, $c(t)$ rasyonel fonksiyonu ve $B \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörden oluşan bilinmeyenlere sahip iki rasyonel bileşenli vektör eşitliğine dönüşmüş olur. İlk olarak denklemin her iki tarafının t ye göre türevi alınarak $B \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörü yok edilir. Elde edilen yeni vektör eşitliğinin bileşenleriyle oluşturulan denklem sisteminden $Maple^{TM}$(2021) bilgisayar cebir sistemindeki "*eliminate*" komutu kullanılarak önce k sabiti, daha sonra da $c(t)$ rasyonel fonksiyonu belirlenir. Son olarak, (4) eşitliğinde elde edilenler yerine yazılarak $B \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörü bulunur. Böylece, (2) eşitliği ile verilen, iki rasyonel regle yüzey arasındaki tüm afin denklikler elde edilmiş olur.

3.4. Algoritma

Önceki bölümlerde ulaşılan sonuçlar yardımıyla aşağıdaki RSAff isimli algoritma (bkz. **Algoritma 1**), verilen iki rasyonel regle yüzey arasındaki tüm afin denklikleri belirlemektedir.

Algoritma 1: RSAff

Input:	Çift katlı olmayan S_1, S_2 regle yüzeylerinin, sırasıyla, (1) denkleminde verilen ve gösterge eğrilerinin dereceleri 4 den büyük olan r_1, r_2 uygun parametrizasyonları.
Output:	S_1, S_2 regle yüzeyleri arasındaki tüm afin denklikler. Denklik olmaması durumunda ise "Afin denk değillerdir." Uyarısı.
Procedure: RAff(S_1, S_2)	
1.	(21) de verilen $\mathcal{P}_i(t,\mathcal{L})$ polinomlarını hesapla.
2.	(22) de tanımlanan G polinomunu hesapla.
3.	G polinomunun FC çarpanlarını hesapla.
4.	(23) de tanımlanan phi Möbius çarpanlarının kümesini oluşturmak için FC yi kontrol et.
5.	Eğer $phi = \emptyset$ ise "Afin denk değillerdir." yaz
6.	Aksi takdirde her bir Möbius çarpanı için $M = kD((\gamma t + \delta)^n y_2(\mathcal{L}))D(y_1)^{-1}$ matrisini bul.
7.	(4) denkleminde elde edilen Möbius dönüşümlerini ve bunlara karşılık gelen M matrislerini yerlerine yaz.
8.	7. adımda elde edilen eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak elde edilen eşitliklerden k sabiti ve $c(t)$ yi hesapla.
9.	8. adımda elde edilen bilgileri de kullanarak 7. adımda ortaya çıkan eşitliklerden B öteleme vektörünü bul.

Algoritma adımlarının daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

3.4.1 Örnek Aşağıda sırasıyla $r_1(t,s) = x_1(t) + s y_1(t)$ ve $r_2(t,s) = x_2(t) + s y_2(t)$ yardımıyla parametrelenmiş S_1 ve S_2 regle yüzeylerin afin denkliğini inceleyelim. Burada,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (t^4 + t^2 + t, t^6 + t^3, t^5 + t^3 + t^2 + 3t) \\
y_1(t) &= (t^3 + t, t^5, t^4 + t^2 + 3) \\
x_2(t) &= (5t^4 + 5t^2 + 5t - 1{,}3t^5 + 3t^3 + 3t^2 \\
&\qquad +9t + 5, -t^6 + t^4 - t^3 + t^2 + t) \\
y_2(t) &= (5t^3 + 5t, 3t^4 + 3t^2 + 9, -t^5 + t^3 + t)
\end{aligned}$$

olsun. Böylece (21) denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(t,\mathcal{L}) = (6t^{10} - 152t^8 - 574t^6 + 400t^4 + 2910t^2 \\
+ 900)(3\mathcal{L}^{10} + 89\mathcal{L}^8 - 137\mathcal{L}^6 \\
+ 2570\mathcal{L}^4 + 3300\mathcal{L}^2 + 1800) \\
- (3t^{10} + 89t^8 - 137t^6 + 2570t^4 \\
+ 3300t^2 + 1800)(6\mathcal{L}^{10} - 152\mathcal{L}^8 \\
- 574\mathcal{L}^6 + 400\mathcal{L}^4 + 2910\mathcal{L}^2 + 900),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2(t,\mathcal{L}) = 524880000((t^6 + 3t^4 - 39t^2 - 30)^4(t^2 \\
- 1)^2(3\mathcal{L}^{10} + 89\mathcal{L}^8 - 137\mathcal{L}^6 \\
+ 2570\mathcal{L}^4 + 3300\mathcal{L}^2 + 1800)^3 \\
- (3t^{10} + 89t^8 - 137t^6 + 2570t^4 \\
+ 3300t^2 + 1800)^3(\mathcal{L}^6 + 3\mathcal{L}^4 \\
- 39\mathcal{L}^2 - 30)^4(\mathcal{L}^2 - 1)^2).
\end{aligned}$$

Bu iki polinomun en büyük ortak çarpanı (gcd),

$$G = \mathcal{L}^2 - t^2$$

dir. Bu polinomu çarpanlara ayırırsak,

$$FC = (\mathcal{L} - t)(\mathcal{L} + t)$$

elde edilir. Buradan da Möbius dönüşümleri kümesi

$$phi = \{\mathcal{L} = t, \mathcal{L} = -t\}$$

ye ulaşılır. Her bir Möbius dönüşümüne karşılık sırasıyla,

$$\mathcal{L} = t, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \\ k & -k & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{L} = -t, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \\ -k & k & 0 \end{pmatrix},$$

matrisleri elde edilir.

Sırasıyla elde edilen bu bilgiler (4) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}(5k(t^4 + t^2 + t) + b_{11}, 3k(t^5 + t^3 + t^2 + 3t) \\ - b_{12}, k(t^4 + t^2 + t) - k(t^6 + t^3) \\ + b_{13}) \\ = (-s(5t^4 + 5t^2 + 5t - 1) \\ - c(t)(5t^3 + 5t), -s(3t^5 + 3t^3 \\ + 3t^2 + 9t + 5) \\ - c(t)(3t^4 + 3t^2 + 9), -s(-t^6 \\ + t^4 - t^3 + t^2 + t) \\ - c(t)(-t^5 + t^3 + t)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-5k(t^4 + t^2 + t) + b_{21}, 3k(t^5 + t^3 + t^2 + 3t) \\ + b_{22}, -k(t^4 + t^2 + t) \\ + k(t^6 + t^3) + b_{23}) \\ = (-s(-3t^5 - 3t^3 + 3t^2 - 9t \\ + 5) \\ - c(t)(3t^4 + 3t^2 + 9), -s(5t^4 \\ + 5t^2 - 5t - 1) \\ - c(t)(-5t^3 - 5t), \\ -s(-t^6 + t^4 + t^3 + t^2 - t) \\ - c(t)(t^5 - t^3 - t)),\end{aligned}$$

vektör eşitlikleri karşımıza çıkar. Burada, $B_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13})^T$, $\mathcal{L} = t$ Möbius dönüşümüne karşılık gelen sabit vektör, $B_2 = (b_{21}, b_{22}, b_{23})^T$ ise $\mathcal{L} = -t$ e karşılık gelen sabit vektördür. Eşitliklerin her iki tarafının türevleri alınarak oluşturulan yeni eşitliklerden, sırasıyla,

$k = 1, \qquad c(t) = 0,$
$k = 1, \qquad c(t) = 2t$

elde edilir. Bütün bu bilgiler (4) denkleminde yerlerine yazıldığında oluşan eşitliklerden de sırasıyla, B_1 ve B_2 sabit vektörleri hesaplanır. Böylece, S_1 ve S_2 regle yüzeyleri arasındaki afin dönüşümün matrisi, öteleme vektörü ve (3) denkleminde verilen *Cremona* dönüşümünden oluşan çözüm kümeleri, sırasıyla, aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\left\{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_1(t,s) = (t,s)\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_2(t,s) = (-t, s + 2t)\right\}.$$

Bu örnekteki tüm hesaplamalar 0.141 saniyede tamamlanmıştır.

3.5. *Testler ve Performans*

Bir önceki bölümde verilen algoritma RSAff, bilgisayar cebir sistemi $Maple^{TM}$(2021) kullanılarak uygulanmıştır. Bunun için 2.4 Ghz Intel Core i5 işlemciye ve 8 GB belleğe sahip bir bilgisayar kullanılmıştır. Bu çalışmada sunulan algoritmaya ait $Maple^{TM}$(2021) uygulaması, birinci yazarın resmi web sayfasında (İnt. Kyn. 1) tüm araştırmacılara açık bir şekilde sunulmuştur.

Çizelge 1′ de verilen parametrizasyonlar Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasından alınmıştır.

Çizelge 1 Çeşitli rasyonel regle yüzeylerin parametrizasyonları.

	Der.	Rasyonel regle yüzey parametrizasyonu
1	4	$(t^4 + t^2, t^2 - 3, t^3 + t)$ $+s \cdot (-t^4 + 2, t^2 - 8{,}2t)$
2	4	$(\frac{t^4 + t^2}{t^2 + 3}, \frac{t^2 - 3}{t^2 + 3}, \frac{t^3 + t}{t^2 + 3})$ $+s \cdot (-t^4 + 2, t^2 - 8{,}2t)$
3	6	$(t^4 + t^2 + t, t^6 + t^3, t^5 + t^3 + t^2 + 3t)$ $+s \cdot (t^3 + t, t^5, t^4 + t^2 + 3)$
4	6	$s \cdot (2t(t^4 - 6t^2 + 1),$ $(t^2 + 1)(t^4 - 6t^2 + 1), (t^2 + 1)^3)$
5	7	$(t^6 - 6t^4 + t^2 + 2t, -t^7$ $+6t^5 - t^3 + t^2 + t, t^3 + t)$ $+s \cdot (t^5 - 6t^3 + t, -t^6 + 6t^4$ $-t^2 + 1, t^2 + 1)$
6	7	$(\frac{t^3}{t^2 + 1}, \frac{t^5}{t^2 + 1}, \frac{t^7}{t^2 + 1})$ $+s \cdot (-t^5 + t, 3t^7, -2t^3)$
7	9	$(\frac{2t^8 - 10t^6 - 10t^4 + 5t^2 + 1}{t^2 + 1},$ $-\frac{t^9 - 6t^7 + 6t^3 + t^2 - 3t + 1}{t^2 + 1},$ $t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t + 5)$ $+s \cdot (2t(t^4 - 6t^2 + 1, -t^6 + 7t^4 - 7t^2 + 1,$ $(t^2 + 1)^3)$
8	17	$(-\frac{t^{17} - 6t^{15} + 6t^{11} - 6t^7 + 6t^3 - t^2 - t + 1}{t^2 + 1},$ $\frac{2t(t^{15} - 5t^{13} - 5t^{11} + t^9 + t^7 - 5t^5 - 5t^3 + t +}{t^2 + 1}$ $t(t^2 + 1)^3(t^8 + 1)) + s \cdot (-t^6 + 7t^4$ $-7t^2 + 1{,}2t(t^4 - 6t^2 + 1), (t^2 + 1)^3)$

Çizelge 2’ de yapılan hesaplamalar, **Çizelge 1**’ de verilen her bir regle yüzey parametrizasyonuna,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisi uygulanarak elde edilen ikinci bir regle yüzey parametrizasyonu arasında olmuştur. Bununla birlikte, **Çizelge 3**’ deki izometri hesaplamaları ise, yine **Çizelge 1**’ de verilen her bir regle yüzey parametrizasyonuna,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

matrisi uygulanarak elde edilen ikinci bir regle yüzey parametrizasyonu arasında olmuştur.

Bu da, **Çizelge 2** ve **Çizelge 3**’ de Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasında sunulan yöntem ile bu çalışmada sunulan yöntemin karşılaştırılmasını sağlamıştır. Bu çizelgelerde t_a, Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasında elde edilen hesaplama sürelerini, t_b ise bu çalışmada elde edilen hesaplama sürelerini göstermektedir.

Yöntemimiz rasyonel regle yüzeylerin gösterge eğrilerinin dereceleri $n > 3$ olanlarını inceleyebildiğinden, **Çizelge 2**’ de Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasından sadece üç rasyonel regle yüzeyin afin denkliğine ait süreler karşılaştırılabilmiştir. Buna karşın **Çizelge 3**’ de ise daha fazla rasyonel regle yüzeyin simetri ve izometrilerinin hesaplanması için geçen süreler karşılaştırılmıştır.

Karşılaştırma yapılabilen her bir örnek için en iyi zamanlama mavi renkte verilmiştir.

Çizelge 2 Çizelge 1’ de verilen rasyonel regle yüzeylerin afin denkliklerinin hesaplanması için geçen süreler saniye cinsinden verilmiştir.

	Derece	Hesaplama süresi (t_a/t_b)	Afin denklik sayısı
1	4	0.452/0.047	2
2	4	0.608/0.063	2
3	6	/0.063	2
4	6	/0.094	8
5	7	11.563/0.062	2
6	7	/0.062	2
7	7	/0.093	8
8	17	/0.547	8

Çizelge 3 Çizelge 1’ de verilen rasyonel regle yüzeylerin simetrilerinin ve izometrilerinin hesaplanması için geçen süreler saniye cinsinden verilmiştir.

	Derece	Simetri için hesaplama süresi (t_a/t_b)	İzometri için hesaplama süresi (t_a/t_b)
1	4	/0.110	/0.172
2	4	/0.047	/0.078
3	6	1.716/0.047	2.200/0.078
4	6	4.587/0.312	10.280/0.125
5	7	1.888/0.062	2.184/0.078
6	7	1.935/0.063	2.372/0.063
7	7	9.640/0.266	9.267/0.281
8	17	9.828/0.218	10.124/0.250

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada iki rasyonel regle yüzey arasındaki afin denklikleri, simetrileri ve izometrileri hesaplayan yeni ve etkili bir yöntem sunulmuştur. Bunun için, (2) denklemiyle verilen, regle yüzeylerin afin denkliğini (simetrisini ve izometrisini), bu yüzeylerin parametreleri arasındaki denkliğine indiren $\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ birasyonel dönüşümünün, Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasında elde edilen bu çalışmada ise (3) denklemi ile verilen karakterizasyonu kullanılmıştır. Geliştirilen yöntem, Möbius dönüşümünden etkilenmeyen afin invaryant fonksiyonlar yardımıyla iki rasyonel regle yüzey arasındaki afin denklik problemine, çok bilinmeyenli doğrusal olmayan sistem çözümlerinden kaçınılarak, tam bir çözüm getirmiştir. Elde edilen sonuçlar bir algoritma yardımıyla Maple bilgisayar cebir sistemine aktarılmış, elde edilen test sonuçları Çizelge 2 ve Çizelge 3’ de Alcázar ve Quintero (2020) çalışmasında elde edilen hesaplama süreleri ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların ne kadar başarılı ve algoritmamızın ne kadar etkili olduğu görülmektedir.
Bu çalışmadan edinilen bilgiler ışığında gelecek çalışmalarda, yöntemin rasyonel regle yüzeyler arasındaki projektif denklik ve simetrileri bulacak şekilde geliştirilmesi planlanmaktadır.

Etik Standartlar Bildirgesi
Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Yazarlık Katkı Beyanı
Yazar 1: Kavramsallaştırma, Metodoloji/Çalışma, Doğrulama, Analiz ve yorumlama, Araştırma, Yazma/orijinal taslak, Yazma/inceleme ve düzenleme, Görselleştirme
Yazar 2: Kavramsallaştırma, Metodoloji/Çalışma, Doğrulama, Analiz ve yorumlama, Araştırma, Kaynak sağlama, Yazma/inceleme ve düzenleme, Denetleme/danışmanlık

Çıkar Çatışması Beyanı
Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği

Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

Teşekkür

Yazarlar, Prof. Juan Gerardo Alcazár' a hiçbir zaman esirgemediği yardımı için teşekkürlerini sunar.

5. Kaynaklar / References

Alcázar, J.G., Hermoso, C. and Muntingh, G., 2015. Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion. *Comput. Aided. Geom. Design,* **33**, 51-65. https://doi.org/10.1016/j.cagd.2015.01.003

Alcázar, J.G. and Hermoso, C., 2016. Involutions of polynomially parametrized surfaces. *J. Comput. Appl. Math.,* **294**, 23-38. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.002

Alcázar, J.G. and Goldman, R., 2017. Detecting when an implicit equation or a rational parametrization defines a conical or cylindrical surface, or a surface of revolution. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics,* 12 (**23)**, 2550-2559. https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/tvcg.2016.2625786

Alcázar, J.G. and Quintero, E., 2020. Affine equivalences, isometries and symmetries of ruled rational surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **364**, 112339. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.07.004

Alcázar, J.G., Gözütok, U., Çoban, H.A. and Hermoso, C., 2022. Detecting affine equivalences between implicit planar algebraic curves. *Acta Applicandae Mathematicae,* 2 (**182**), 23-38. https://doi.org/10.1007/s10440-022-00539-1

Bizzarri, M., Làviˇcka, M., Vrˇsek, J., 2020. Computing projective equivalences of special algebraic varieties. *J. Comput. Appl. Math,* **367**, 112438. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112438

Chen, F., Zheng J. and Sederberg, T.W., 2001. The μ-basis of a rational ruled surface. *Comput. Aided. Geom. Design,* **18**, 61-72. https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00012-7

Chen, F., Wang W., 2003. Revisiting the μ-basis of a rational ruled surface. *J. Symbolic Comput,* **36**, 699-716. https://doi.org/10.1016/S0747-7171(03)00064-6

Gözütok, U., Çoban, H.A., Sağıroğlu, Y., Alcázar, J.G., 2023. A new method to detect projective equivalences and symmetries of rational 3D curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **419**, 114782. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114782

Hauer, M., Jüttler, B., 2018. Projective and affine symmetries and equivalences of rational curves in arbitrary dimension. *J. Symbolic Comput.,* **87**, 68-86. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2017.05.009

Hauer, M., Jüttler, B. and Schicho, J., 2018. Projective and affine symmetries and equivalences of rational and polynomial surfaces. *J. Comput. Appl. Math.,* **349**, 424-437. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.06.026

O' Neill, B., 2006. Elementary Differential Geometry. Revised Second Eddition. NY, USA, 145-146.

Perez-Diaz, S., Shen, L-Y., 2014. Characterization pf rational ruled surfaces. *J. Symbolic. Comput.,* **63**, 21-45. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.11.003

İnternet Kaynakları

1- https://avesis.ktu.edu.tr/hacoban/dokumanlar, (10.10.2023)