Varyansı Bilinmeyen Normal Dağılımlı Kitlenin Ortalamasının Ardışık Tahmini

Güler KOÇBERBER* Hülya ÇINGI**

ÖZET

Bu çalışmada, normal dağılımlı kitlenin ortalamasını tahmin etmek için durdurma kuralları güven aralıklarından ve kayıp ve risk fonksiyonlarından belirlenen ardışık süreçler incelenmiş ve süreçlerin durdurma noktalarının olasılık dağılımı belirlenerek, sabit örneklem genişlikli süreç ile çeşitli etkinlik ölçütleri yönünden karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Ardışık tahmin, durdurma kuralları, kayıp ve risk fonksiyonları, risk etkinliği*

1. GİRİŞ

"Ardışık" sözcüğü, ilk kez Abraham Wald ve arkadaşları tarafından, gözlem sayısının sabit olmadığı durumlarda istatistiksel hipotezleri test etmek için geliştirilen örnekleme süreçlerini tanımlamakta kulanılmıştır. Bu süreçlerin derlenmesi sırasında, bazen gözlemciler, gözlemlerin olasılık dağılımında meydana gelen bir ya da daha çok parametreyi tahmin etmek istemişler ve böylece ardışık süreç ile parametre tahmin problemi ortaya konmuştur.

$f_\theta(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X raslantı değişkeni ardı ardına gelen $x_1,x_2,..$ değerlerini alsın. İlk $n_0\geq 2$ gözlem elde edildikten sonra, her bir gözlem ya da gözlem grubunun alınması olarak tanımlanan tüm aşamalarda, önceden belirlenen koşul(lar)a dayanarak oluşturulan durdurma kuralına göre,

- Örneklemeye son verilerek kitle parametrelerini tahmin etme,
- Bir gözlem ya da gözlem grubu daha alınarak örneklemeye devam etme

kararlarından birinin alındığı sürece **ardışık tahmin süreci** denir(Anscombe,1953). R ile gösterilen bu süreç, matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N = \text{İlk kez } \{ n \geq n_0 \mid \text{durdurma kuralı} \},\ n_0 \geq 2\,. \qquad (1)$$

Burada N, durdurma noktasını; n_0, başlangıç örneklem genişliğini; n ise her adımda alınan gözlem sayısını göstermektedir. Çalışmamızda her adımda bir gözlemin alındığı durum incelendiğinden, n aynı zamanda adım sayısı olarak tanımlanabilmektedir.

* T.C. Başbakanlık Devlet İstatistik Enstitüsü, Necatibey cd. No:114/7 Ankara/TÜRKİYE
** Profesör, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Beytepe-Ankara/TÜRKİYE

N durdurma noktası önceden belirlenen sabit bir değer değil, deneme boyunca giderek artan değerler alan bir raslantı değişkenidir. Bu nedenle ardışık süreçte örneklem genişliği beklenen değer olarak ifade edilir. Ayrıca ardışık süreç ile parametre tahmini yapabilmek için denemenin sonuna kadar beklemek gerekmez. Bunun yerine deneme sürerken veriler çözümlemeye alınabilir. Dolayısıyla, bazı araştırmaların yapısı gereği ardışık sürecin uygulandığı durumlar da olmaktadır.

(1) eşitliğinde görüldüğü gibi, ardışık süreçlerin oluşturulmasında amaç, olabilecek en az gözlem ile önceden belirlenen koşulları sağlayacak örneklemeyi durdurma kuralını belirlemektir. Lehman'a göre önceden belirlenen koşullar,

i. Güvenilirlik koşulları (güven düzeyi, güven aralığı genişliği, standart hata vb.)
ii. Ekonomik koşullar (tahmin maliyeti, gözlem maliyeti, zaman vb.) olarak belirtilmiştir(Gavindarajulu,1981).

Eşitlik (1)'de tanımlanan ardışık sürecinin elde edilebilmesi için örneklemeyi durdurma kuralının belirlenmesi gerekmektedir. Önceden belirlenen koşullara göre (belirli bir güven katsayısı, güven aralığı genişliği, tahmin maliyeti, vb. olarak) belirlenen örneklemi durdurma kuralları,

- Güven aralıklarından,
- Kayıp ve risk fonksiyonlarından

olmak üzere iki farklı şekilde oluşturulur. Her iki durumda da başlangıç noktası, en iyi sabit örneklem genişliğinin belirlenmesidir. Çalışmamızda en iyi sabit örneklem genişliği n* ile gösterilmiştir. n*, θ'ya bağlı bir değer olduğundan, θ bilinmediği zaman, her n için θ yerine θ'nın tahmin edicisi olan $\hat{\theta}_n = T(X_1, X_2, .., X_n)$ alınarak, parametre tahmini için ardışık süreç aşağıda verildiği gibi oluşturulur:

$$N = \text{İlk kez } \{ n \geq n_0 \mid n > n^*(\hat{\theta}_n) \},\ n_0 \geq 2 . \qquad (2)$$

Burada $n > n^*(\hat{\theta}_n)$, ardışık sürecin durdurma kuralı olarak tanımlanır. Durdurma kuralının belirlenmesinde, güvenilirlik koşulu göz önüne alınırsa, en iyi sabit örneklem genişliği, güven aralıklarından; ekonomik koşul göz önüne alınırsa, en iyi sabit örneklem genişliği, kayıp ve risk fonksiyonlarından elde edilir. Önceden belirlenen her iki koşula göre en iyi sabit örneklem genişliği farklı olacağından, örneklemi durdurma kuralları ve dolayısıyla ulaşılacak ardışık süreçler de farklı olacaktır.

Çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümünde, varyansı bilinmeyen normal dağılımlı kitlenin ortalamasının ardışık tahmini için önceden belirlenen güvenilirlik ve ekonomik koşullara göre oluşturulan durdurma kuralları ve ardışık süreçler ayrı ayrı incelenecektir. Dördüncü bölümde, ardışık süreçlerin durdurma noktasının olasılık dağılımı elde edilecek ve beşinci bölümde, ardışık süreçler ile sabit örneklem genişlikli süreçler, çeşitli etkinlik ölçütleri yönünden karşılaştırılarak ulaşılan sonuçlar tablolar halinde sunulacaktır.

2. DURDURMA KURALLARI GÜVEN ARALIKLARINDAN BELİRLENEN ARDIŞIK SÜREÇLER

X_i (i=1,2,...), bilinmeyen μ ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılım gösteren bağımsız raslantı değişkenleri olsun. X_i'lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_i,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}, \quad -\infty<x_i<\infty,\ \mu>0,\ \sigma>0 \tag{3}$$

şeklinde tanımlanır. d bilinen bir sabit olmak üzere, μ için en çok 2d genişliğinde ve en az α ($0<\alpha<1$) güven düzeyinde aralık tahmini yapılmak istensin. Örneklem genişliği $n\geq 2$ için, basit örneklem ortalaması ve varyansı sırasıyla,

$$\overline{X}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i, \qquad S_n^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır. Sabit örneklem genişlikli süreçte μ için 2d genişliğinde ve α güven düzeyinde elde edilen güven aralığı I_n=[$\overline{X}_n+d_1;\overline{X}_n+d_2$]'dir. Burada d_1 ve d_2, $2d=d_2-d_1$ olacak şekilde belirlenir. I_n aralığının μ parametresini içerme olasılığı $P(\mu\in I_n)=\alpha$'dır. $\overline{X}_n$, μ ortalama ve σ^2/n varyans ile normal dağılım gösteren bağımsız raslantı değişkeni olduğundan σ^2 biliniyorsa, I_n güven aralığını elde edebilmek için en iyi sabit örneklem genişliği,

$$n^*=\frac{\sigma^2(a-b)^2}{4d^2} \tag{5}$$

olarak elde edilir. $z>0$ için,

$$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz$$

şeklinde tanımlanan standart normal dağılım fonksiyonu olmak üzere; a ve b sabitleri ($a<b$), $\varphi(a)=(1-\alpha)/2$ ve $\varphi(b)=(1+\alpha)/2$ olacak şekilde belirlenen z değerleridir. Normal dağılım fonksiyonu simetrik bir fonksiyon olduğu için a ve b sabitleri arasında $a=-b$ ilişkisi vardır. Bu ilişki eşitlik (5)'teki n* ifadesinde yerine konulursa, en iyi sabit örneklem genişliği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$n^*=\frac{a^2\sigma^2}{d^2}. \tag{6}$$

a ve b sabitleri birbirleri ile ters işaretli olduğundan, d_1 ve d_2 uzaklıkları da birbirleri ile ters işaretli olur($d_1=\frac{a\sigma}{\sqrt{n}}$, $d_2=\frac{b\sigma}{\sqrt{n}}$). Bu durumda I_n aralığı, I_n=[$\overline{X}_n$-d, $\overline{X}_n$+d] şeklinde yazılabilir.

σ^2 bilinmiyorsa, μ için, en küçük örneklem genişliği ile en çok 2d genişliğinde ve en az α güven düzeyinde aralık tahmini yapılamaz (Starr,1966a; Stein ve Wald, 1947). Bu problemi çözmek için aşağıdaki ardışık süreç geliştirilmiştir:

$$N = \text{İlk kez } \{n \geq n_0 \mid n \geq a^2 S_n^2/d^2\},\ n_0 \geq 2. \tag{7}$$

R1 adı verilen bu süreçde $n \geq a^2 S_n^2/d^2$, güven aralıklarına dayalı olarak elde edilen durdurma kuralıdır. Durdurma kuralı S_n^2'ye göre düzenlenirse süreç,

$$N = \text{İlk kez } \{n \geq n_0 \mid S_n^2 \leq nd^2/a^2\},\ n_0 \geq 2 \tag{8}$$

şeklinde yazılır. σ^2 bilinmediği zaman a, α güven düzeyinde ve n-1 serbestlik derecesinde t dağılımlı tablo değeridir. N durdurma noktası sabit bir değer olmadığı için olasılık dağılımından söz edilebilmektedir. Durdurma noktasının olasılık dağılımının bulunabilmesi için S_n^2'nin dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Genellikle S_n^2 belirli bir dağılım göstermemekle birlikte, $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ olduğu bilinmektedir. Böylece eşitlik (8)'da S_n^2 yerine $\sigma^2\chi^2_{n-1}/(n-1)$, χ^2_{n-1} yerine de χ^2_{n-1} dağılımı gösteren bir raslantı değişkeni yazılabilir. Bu amaçla, X_i raslantı değişkenleri eşitlik (2.7)'deki dönüşüm ile bir serbestlik derecesinde ki-kare dağılımı gösteren W_i bağımsız raslantı değişkenlerine dönüştürülür(Ray,1957; Starr,1966a):

$$W_i = \left(\sum_{j=1}^{i} X_j - iX_{i+1}\right)/\sigma^2[i(i+1)], \qquad i=1,2,..,n-1. \tag{9}$$

Dönüşüm sonucunda, $\sum_{i=1}^{n-1} W_i \sim \chi^2_{n-1}$ dağılır. Böylece eşitlik (8)'da, S_n^2 yerine $\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} W_i$ alınarak R1 ardışık süreci aşağıda verildiği gibi yazılabilir:

$$N = \text{İlk kez } \{n \geq n_0 \mid \sum_{i=1}^{n-1} W_i \leq n(n-1)d^2/a^2\sigma^2\},\ n_0 \geq 2. \tag{10}$$

$\lambda=\sigma/d$, $U_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} W_i$ ve $D_{n-1} = n(n-1)/a^2\lambda^2 = (n-1)(n/n^*)$ tanımlamaları yapılarak, R1 ardışık süreci aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$N = \text{İlk kez } \{n \geq n_0 \mid U_{n-1} \leq D_{n-1}\},\ n_0 \geq 2. \tag{11}$$

Burada U_{n-1}, her $n \geq 2$ için n-1 serbestlik derecesinde χ^2 dağılımı gösteren raslantı değişkeni; D_{n-1} ise, n ve n*'a bağlı bir değerdir. Dolayısıyla yukarıdaki ardışık süreç, λ'ya bağlıdır. R1 ardışık süreci ile μ parametresinin ardışık nokta tahmini, 2d genişliğindeki ardışık güven aralığı ve beklenen örneklem genişliği aşağıdaki gibi tanımlanır (Gözdoldu,1997):

$$\overline{X}_N = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \middle| N = n\right) P(N=n), \tag{12}$$

$$I_N=[\overline{X}_N\text{-d},\ \overline{X}_N\text{+d}], \tag{13}$$

$$E_{R1}(N)=\sum_{n=n_0}^{\infty}(N|N=n)P(N=n). \tag{14}$$

I_N aralığının μ parametresini içerme olasılığı, sabit örneklem genişlikli süreçlerdeki gibi sabit bir değer olmadığından, her N=n için $P(\mu\in I_N)$ olasılığı hesaplanarak R1 ardışık sürecinin parametreyi içerme olasılığı bulunabilir(Starr,1966b):

$$P_{R1}(\mu\in I_N)=\sum_{n=n_0}^{\infty}P(\mu\in I_N|N=n)P(N=n)$$

$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}P\left[(\overline{X}_N-d<\mu<\overline{X}_N+d)|N=n\right]P(N=n)$$

$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}P\left[\left|\overline{X}_N-\mu\right|\leq d|N=n\right]P(N=n)$$

Köşeli parantez içindeki ifadede eşitsizliğin her iki yanı, $\sigma/N^{1/2}$ ile bölünürse,

$$P_{R1}(\mu\in I_N)=\sum_{n=n_0}^{\infty}P(N^{1/2}(\overline{X}_N'-\mu)/\sigma\leq N^{1/2}d/\sigma|N=n)\,P(N=n)$$

$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi(N^{1/2}/\lambda|N=n)P(N=n)$$

olur. Görüldüğü gibi, $P_{R1}(\mu\in I_N)$ değeri de λ'ya bağlı bir değerdir.

3. DURDURMA KURALLARI KAYIP VE RİSK FONKSİYONLARI İLE BELİRLENEN ARDIŞIK SÜREÇLER

X_i (i=1,2,...) raslantı değişkeni, eşitlik (3)'de tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. μ parametresinin maliyet koşulu altında tahmini yapılırken, öncelikle sabit $n\geq2$ için $\overline{X}_n$ ile μ'nün tahmin edilmesinden kaynaklanan kayıp fonksiyonu tanımlanır. Çalışmamızda bu fonksiyon aşağıdaki şekilde alınmıştır:

$$L_n=A[\ (\text{-}\mu)^s]+\beta n^t. \tag{15}$$

Kayıp fonksiyonunun beklenen değeri alınarak aşağıdaki risk (beklenen kayıp) fonksiyonuna ulaşılır:

$$R_n=E(L_n)=AE[\ (\overline{X}_n\text{-}\mu)^s]+\beta n^t. \tag{16}$$

$Z=n^{1/2}(\overline{X}_n-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$ olduğundan, $(\overline{X}_n-\mu)$ ifadesi $\sigma/\sqrt{n}$ ile çarpılıp bölünerek R_n beklenen kayıp fonksiyonu,

$$R_n=A\sigma^s n^{-s/2}E[(Z^s)]+\beta n^t \tag{17}$$

şeklinde elde edilir. Beklenen değer tanımı kullanılarak bulunan,

$$E(Z^s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^s e^{-z^2/2}dz = 2^{s/2}\Gamma(\frac{s+1}{2})/\Gamma(\frac{1}{2})$$

ifadesi eşitlik (17)'te yerine yazılırsa, risk fonksiyonu, her n değeri için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R_n=K(A,s)\,\sigma^s\, n^{-s/2}+\beta n^t. \tag{18}$$

Burada, $K(A,s)=A2^{s/2}\,\Gamma(\frac{s+1}{2})/\Gamma(\frac{1}{2})$, A ve s'ye bağlı bir sabittir. σ^2 biliniyorsa, R_n'yi en küçük yapacak en iyi sabit örneklem genişliği, $\frac{\partial R_n}{\partial n}=0$ işlemi sonucu aşağıda verildiği gibi elde edilir:

$$n^*=[\sigma^s K(A,s)(s/2\beta t)\;]^{2/(s+2t)}. \tag{19}$$

Eşitlik (18)'te, n yerine n* alınarak, en küçük beklenen kayıp değeri $R_{n^*}=(n^*)^t\left[\frac{2\beta t}{s}+\beta\right]$ olarak elde edilir. σ^2 bilinmiyorsa, μ parametresi en iyi sabit örneklem genişliği ve en küçük beklenen kayıp ile tahmin edilemeyecektir. Bu durumda Robbins(1959) tarafından aşağıdaki ardışık süreç geliştirilmiştir:

$$N=\text{İlk kez}\,\{n\geq n_0 \mid n\geq[K(A,s)S_n^{\,s}(s/2\beta t]^{2/(s+2t)}\},\; n_0\geq 2. \tag{20}$$

R2 adı verilen bu süreçde durdurma kuralı, $n\geq[K(A,s)S_n^{\,s}(s/2\beta t]^{2/(s+2t)}$ şeklindedir. Durdurma kuralı üzerinde R1 sürecindekine benzer düzenlemeler yapılırsa,

$$U_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}W_i \quad \text{ve} \quad D_{n-1}=(n-1)n^{(s+2t)/s}[2\beta t/sK(A,s)]^{2/s}/\sigma^2$$

$$=(n-1)\,n^{(s+2t)/s}[2\beta t/sK(A,s)\,\sigma^s]^{2/s}$$

$$=(n-1)(n/n^*)^{(s+2t)/s} \tag{21}$$

tanımları için eşitlik (11)'daki sürece ulaşıldığı görülür. Bu süreç ile μ parametresinin ardışık nokta tahmini ve beklenen örneklem genişliği, eşitlik (12) ve (14)'den elde edilir. $\overline{X}_N$ ile μ parametresinin tahmin edilmesinden kaynaklanan beklenen kayıp eşitlik (18)'te n yerine N alınarak aşağıdaki gibi elde edilir(Koçberber,1997):

$$R_N=\sum_{n=n_0}^{\infty}[R_N|N=n\,]P(N=n)$$

$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}[K(A,s)\sigma^s N^{-s/2}+\beta N^t\;|N=n]P(N=n)$$

$$=n^{*(s+2t)/2}(2\beta t/s)E(N^{-s/2})+\beta E(N^t). \qquad (22)$$

Benzer çalışmayı, μ parametre vektörü ve Σ kovaryans matrisi ile p elemanlı çok değişkenli normal dağılım gösteren raslantı vektörü için inceliyelim. $\overline{X}_n$, ortalamalar vektörü ile μ parametre vektörünün tahmin edilmesinden kaynaklanan kayıp,

$$L_n=A[(\overline{X}_n-\mu)'\Sigma^{-1}(\overline{X}_n-\mu)]^s+\beta n^t \qquad (23)$$

olsun. Burada, Σ^{-1}, $\Sigma=\sigma^2\Sigma$ olacak şekilde tanımlanan pxp boyutlu pozitif tanımlı bir matristir. Eşitlik (23)'dan risk fonksiyonu, en iyi sabit örneklem genişliği ve en küçük risk değeri sırasıyla,

$$R_n=\frac{\sigma^{2s}}{n^s}K(A,p,s)+\beta n^t, \qquad (24)$$

$$n^*=[K(A,p,s)\sigma^{2s}(s/\beta t)\,]^{1/(s+t)}, \qquad (25)$$

$$R_n^*=(n^*)^t(\frac{\beta t}{s}+\beta) \qquad (26)$$

olarak belirlenir. Burada, $K(A,p,s)=A\,\Gamma(\frac{p}{2}+s)2^s/\Gamma(p/2)$ şeklinde tanımlanmıştır. σ^2 bilinmiyorsa, μ parametre vektörünün en küçük örneklem genişliği ve en az beklenen kayıp ile tahmin edilmesi için aşağıdaki ardışık süreç geliştirilmiştir(Wang,1980):

$$N=\text{İlk kez}\,\{n\geq n_0\mid U_{n-1}\leq D_{n-1}\},\ n_0\geq 2,$$

$$V_i=\sum_{j=1}^{p}Wi_j,\ U_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}V_i, \qquad (27)$$

$$D_{n-1}=p(n-1)\,n^{\frac{s+t}{s}}\,[\beta t/sK(A,p,s)]^{1/s}/\sigma^2$$

$$=p(n-1)[n/n^*]^{1+t/s}.$$

Bu süreç R3 süreci olarak tanımlanırsa, R3 sürecinden $\overline{X}_N$ ardışık tahmin vektörü ve $\overline{X}_N$ ile μ parametre vektörünün tahmin edilmesinden kaynaklanan beklenen kayıp sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\overline{X}_N=\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[\frac{X_{j1}+X_{j2}+\ldots+X_{jN}}{N}|N=n\right]P(N=n),\quad j{:}1,2,..,p,$$

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left[R_N \middle| N=n\right]P(N=n)$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} [K(A,p,s)\sigma^{2s}N^{-s}+\beta N^t|N=n]P(N=n) \tag{28}$$

$$=(n^*)s+t(\beta t/s)E(N^{-s})+ \beta E(N^t)\,.$$

R3 ardışık sürecinde, p=1 ve s=s/2 için, tek değişkenli normal dağılımlı kitlenin ortalamasını tahmin etmek için geliştirilen R2 ardışık sürecinde elde edilen sonuçlara ulaşıldığı görülür.

Çalışmamızda tanıtılan R1,R2 ve R3 ardışık süreçleri ile nokta tahmini, aralık tahmini, güven aralığının parametreyi içerme olasılığı, beklenen kayıp ve beklenen ardışık örneklem genişliği değerlerini elde edebilmek için süreçlerin durdurma noktalarının olasılık dağılımının bulunması gerekmektedir.

4. N DURDURMA NOKTASININ OLASILIK DAĞILIMI

Sabit örneklem genişlikli süreçte örneklem genişliği sabit bir değer olduğu için olasılık dağılımından söz edilemez. Oysa ardışık süreçte, örneklem genişliği önceden belirlenen sabit bir değer değil, deneme boyunca artan değerler alan bir raslantı değişkenidir. Bu nedenle aldığı her değeri belirli olasılıklar ile almaktadır. Önceki bölümlerde, R1, R2 ve R3 ardışık süreçleri, farklı U_{n-1} ve D_{n-1} için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştı:

$$N = \text{İlk kez } \{ n \geq n_0 \mid U_{n-1} \leq D_{n-1} \},\ n_0 \geq 2\,. \tag{29}$$

Bu tanıma göre, N'nin n değerini alma olasılığı,

$$P(N=n)= P(U_1 > D_1, U_2 > D_2,\ldots, U_{n-2} > D_{n-2}, U_{n-1} \leq D_{n-1}) \tag{30}$$

olarak ifade edilir(Ray,1957). Ardışık sürecin herhangi bir n. adımda, "örneklemeye devam edilmesi ya da örneklemenin tamamlanması" konusunda verilecek olan karar, n. adımdan önceki tüm adımlarda "örneklemeye devam edilmesi" kararının verilmiş olması koşulu altında geçerlidir. Dolayısıyla eşitlik (30), aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P(N=n)= P(U_1 > D_1).P(U_2 > D_2 \mid U_1 > D_1).P(U_3 > D_3 \mid U_2 > D_2, U_1 > D_1)$$
$$\ldots.P(U_{n-1} \leq D_{n-1} \mid U_{n-2} > D_{n-2}, U_{n-3} > D_{n-3},\ldots, U_1 > D_1). \tag{31}$$

Bu olasılıkları hesaplayabilmek için U_i'lerin olasılık dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Önceki bölümde belirtildiği gibi, U_i'ler (i=1,2,..,n-1;n≥2), i serbestlik derecesinde χ^2 dağılımı gösteren bağımsız raslantı değişkenleridir. Buna göre herhangi bir i=1,2,....,n-1 için U_i'lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(u_i)=\frac{1}{\Gamma(i/2)2^{i/2}}u_i^{\frac{i}{2}-1}e^{-u_i/2}\qquad ,\ 0< u_i < \infty,\ i=1,2,\ldots,n-1$$
$$= 0,\ \text{öteki durumlarda} \tag{32}$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik(31)'te tanımlanan her bir olasılık, koşullu olasılık tanımına göre daha açık olarak yazılabilir:

$$P(U_1>D_1)=\int_{D_1}^{\infty} f(u_1)\,du_1,$$

$$P(U_2>D_2 \mid U_1>D_1)=\frac{P(U_2>D_2,U_1>D_1)}{P(U_1>D_1)}=\frac{\int_{D_2}^{\infty}\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,u_2)du_1du_2}{\int_{D_1}^{\infty} f(u_1)du_1},$$

$$P(U_3>D_3 \mid U_2>D_2, U_1>D_1)=\frac{P(U_3>D_3,U_2>D_2,U_1>D_1)}{P(U_1>D_1,U_2>D_2)}=\frac{\int_{D_3}^{\infty}\int_{D_2}^{\infty}\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,u_2,u_3)du_1du_2du_3}{\int_{D_2}^{\infty}\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,u_2)du_1du_2},$$

.

.

.

$$P(U_{n-1}\leq D_{n-1} \mid U_{n-2}>D_{n-2},\ldots,U_1>D_1)=\frac{P(U_{n-1}\leq D_{n-1},U_{n-2}>D_{n-2},\ldots,U_1>D_1)}{P(U_1>D_1,\ldots,U_{n-2}>D_{n-2})}$$

$$=\frac{\int_{0}^{D_{n-1}}\int_{D_{n-2}}^{\infty}\ldots\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})du_1du_2\ldots du_{n-1}}{\int_{D_2}^{\infty}\ldots\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,\ldots,u_{n-2})du_1\ldots du_{n-2}}. \qquad (33)$$

Yukarıdaki olasılıkların belirlenebilmesi için U_i'lerin bileşik olasılık fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. U_i'ler i serbestlik derecesinde χ^2 dağılımı gösteren raslantı değişkenleri olduğuna göre, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_{n-1})=f(u_1).f(u_2).f(u_3)\ldots\ldots f(u_{n-1}) \qquad , 0<u_1<u_2<u_3..u_{n-2}<u_{n-1}<\infty$$

$$=[2^{(n-1)/2}\Gamma^{n-1}(1/2)]^{-1}\exp(-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}u_i)\left[u_1\prod_{i=2}^{n-2}(u_i-u_{i-1})\right]^{-1/2}\prod_{i=1}^{n-1}du_i \qquad (34)$$

$$=0, \qquad \text{öteki durumlarda}$$

şeklinde belirlenir(Starr, 1966a). Eşitlik (32)'teki olasılıklar, (31) eşitliğinde yerine yazılırsa N durdurma noktasının olasılık dağılımı,

$$P(N=n)=\int_0^{D_{n-1}}\int_{D_{n-2}}^{\infty}\cdots\int_{D_3}^{\infty}\int_{D_2}^{\infty}\int_{D_1}^{\infty} f(u_1,u_2,\ldots,u_{n-3},u_{n-2},u_{n-1})du_1du_2\ldots du_{n-3}du_{n-2}du_{n-1} \quad (35)$$

olarak bulunur. Açıktır ki, yukarıdaki eşitlikten P(N=n) olasılıklarını belirlemek oldukça güçtür. Bunun nedeni, n'nin çift değerleri için eşitlik (35)'deki P(N=n) olasılığının analitik olarak çözülememesidir. Dolayısıyla, araştırmacılar N durdurma noktasının olasılık dağılımını belirleyebilmek için genellikle aşağıdaki yollardan birini seçerler:

i. n=2m+1 varsayımı ile yeni ardışık süreç geliştirilerek, P(N=n) olasılıklarını tam olarak belirlemek;
ii. Monte Carlo benzetim yöntemini kullanarak, n'nin her değeri için P(N=n) olasılıklarını yaklaşık olarak belirlemek.

Çalışmamızda, n=2m+1 varsayımı ile N'nin olasılık dağılımını belirlemek için Robbins tarafından geliştirilen algoritma kullanılacaktır. R3 ardışık süreci için ise Wang (1980), Robbins'in geliştirdiği algoritmayı çok değişkenli duruma uyarlayarak durdurma noktasının olasılık dağılımını tam olarak elde etmiş, değişken sayısının çift olduğu durumlarda ise Monte Carlo benzetiminden yararlanmıştır.

N durdurma noktasının olasılık dağılımını tam olarak belirleyebilmek için öncelikle ardışık süreçler, n=2m+1 varsayımına göre yeniden düzenlenir. Düzenleme sonucunda elde edilen yeni ardışık süreç R' ile, sürecin durdurma noktası ise N' ile gösterilmiştir. n=2m+1 varsayımına göre m=1 değeri için n=3 olacağından R' ardışık sürecinde çözümlemeye başlayabilmek için en az 3 gözleme gerek vardır. Başka bir deyişle başlangıç örneklem genişliği $n_0=3$ olmalıdır. U_{n-1}, raslantı değişkeni n=2m+1 için,

$U_{2m}=\sum_{i=1}^{2m} W_i = W_1+W_2+W_3+\ldots+W_{2m}$ şeklinde yazılır.

$T_1=W_1+W_2$, $T_2=W_3+W_4$, $T_3=W_5+W_6$,..., $T_m=W_{2m-1}+W_{2m}$ dönüşümü sonucunda,

$U_{2m}=\sum_{i=1}^{m} T_i$ şeklinde tanımlanabilir. Burada T_i'ler (i=1,2,...,m), 2 serbestlik derecesinde χ^2 dağılımı gösteren bağımsız raslantı değişkenleridir. Buradan,

$$U_{2m}=Z_m=\sum_{i=1}^{m} T_i,\ D_{2m}=B_m \quad \text{ve} \quad m_0=(n_0-1)/2 \qquad (36)$$

tanımlamaları yapılırsa, eşitlik (29)'deki ardışık süreç, n=2m+1 varsayımına göre,

$N'=\text{İlk kez}\{m\geq m_0 \mid Z_m\leq B_m\},\ m_0\geq 1$

şeklinde yazılabilir. Açıktır ki, bu süreçte her m. adımda örneklemeye 2 gözlem alınarak devam edilmektedir. Dolayısıyla adım sayısı gözlem sayısına eşit değildir. Burada Z_m (m=1,2,...), 2m serbestlik derecesinde χ^2 dağılımı gösteren bağımsız raslantı değişkenleridir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(z_m)=\frac{1}{\Gamma(m)2^m} z_m^{m-1} e^{-z_m/2}, \qquad z_m \geq 0$$
$$= 0, \qquad \text{öteki durumlarda.}$$

Eşitlik (30)'ye benzer şekilde, R′ ardışık süreci için N' durdurma noktasının olasılık dağılımı,

$$P(N'=2m+1)=P(Z_1>B_1, Z_2>B_2,...., Z_{m-1}>B_{m-1}, Z_m \leq B_m),\ m=m_0,m_0+1,m_0+2,..$$

şeklinde tanımlanabilir. Yine buradaki her olasılık önceki adımlarda sürecin tamamlanmaması koşulu ile geçerli olduğundan (31) eşitliğindeki tanıma benzer şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(N'=2m+1)=P(Z_1>B_1).\ P(Z_2>B_2|Z_1>B_1).\ P(Z_3>B_3|Z_2>B_2, Z_1>B_1$$
$$.....P(Z_m \leq B_m \mid Z_{m-1}>B_{m-1}, Z_{m-2}>B_{m-2},...., Z_1>B_1). \qquad (37)$$

Burada $P(Z_1>B_1)$, sürecin m=1'de sona ermemesi; $P(Z_2>B_2 \mid Z_1>B_1)$ ise, sürecin m=2'de sona ermemesi olasılığını göstermektedir. Dolayısıyla sürecin m=1'de sona ermesi olasılığı, $P(N=3)=1-P(Z_1>B_1)$ ile m=2 de sona ermesi olasılığı, $P(N=5)=1-P(Z_2>B_2|Z_1>B_1)$ ile gösterilir.

Eşitlik (37)'daki olasılığın elde edilebilmesi için Robbins aşağıdaki algoritmayı önermiştir. Bu algoritma, QBASIC programlama dili ile programlanarak R1 ve R2 ardışık süreçlerinin durdurma noktalarının olasılık dağılımı elde edilmiştir.

Robbins Tarafından Geliştirilen Algoritma

$h_1(B_m)=1$ (m=2,3,4,....) olmak üzere,

$$h_m(B_n)=\sum_{j=1}^{m-1}\left[(B_n-B_m)^j / j!\right]h_{m-j}(B_m),\ m=2,3,4,..;\ n=m+1,\ m+2,$$

$$c_m=\exp(-B_m)\sum_{j=1}^{m-1} h_{m-j}(B_m),\ m=2,3,4,...,$$

$$P(N'=2m+1)=c_m-c_m-1$$

şeklinde tanımlanır(Robbins,1959; Starr,1966b). R1 ve R2 ardışık süreçleri için durdurma noktasının olasılık dağılımları Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1. n_0=3,α=0.95 için R_1 Ardışık Sürecinin Durdurma Noktasının Olasılık Dağılımı P(N′=n)

N	λ=0.50	λ=0.75	λ=1.00	λ=1.25	λ=1.50
2	-----	-----	-----	-----	-----
3	0.47690	0.25027	0.14958	0.09850	0.06947
4	-----	-----	-----	-----	-----
5	0.49218	0.44915	0.26703	0.14910	0.08527
6	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.03086	0.25630	0.30470	0.20488	0.11631
8	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.00000	0.04248	0.20003	0.22828	0.15594
10		-----	-----	-----	-----
11		0.00180	0.06715	0.18205	0.18109
12		-----	-----	-----	-----
13		0.00000	0.01172	0.09670	0.16916
14			-----	-----	-----
15			0.00000	0.04070	0.12205
16				-----	-----
17				0.00689	0.06579
18				-----	-----
19				0.00000	0.03491
20					-----
21					0.00000

Tablo 2. R2 Ardışık Sürecinin Durdurma Noktasının Olasılık Dağılımı P(N′=n)

n	n*=5	n*=10	n*=15	n*=20
2	-----	-----	-----	-----
3	0.19426	0.02664	0.00797	0.00337
4	-----	-----	-----	-----
5	0.42896	0.02089	0.00207	0.00038
6	-----	-----	-----	-----
7	**0.36625**	0.06652	0.00301	0.00026
8	-----	-----	-----	-----
9	0.36625	0.24474	0.00950	0.00045
10	-----	-----	-----	-----
11	0.01052	**0.44521**	0.04006	0.00139
12	-----	-----	-----	-----
13	0.00000	0.18953	0.15058	0.00573
14		-----	-----	-----
15		0.00191	**0.34572**	0.02517
16		-----	-----	-----
17		0.00000	0.33721	0.09439
18			-----	-----
19			0.09808	0.24333
20			-----	-----
21			0.00580	**0.34788**
22			-----	-----
23			0.00000	0.22283
24				-----
25				0.05142
26				-----
27				0.00341
28				-----
29				0.00000

Tablo 1 ve Tablo 2'deki kesikli çizgiler, n=2m+1 varsayımı nedeniyle n'nin çift değerleri için P(N'=n) değerinin hesaplanamadığını göstermektedir. Ayrıca tablolardaki boşluklar, P(N'=n) değerinin sıfır ya da sıfıra çok yakın değerler olması nedeniyle, olasılık değerlerinin yazılmaması sonucu oluşmuştur. Tablo 1 için benzer sonuçlar, başlangıç örneklem genişliğinin ve α güven düzeyinin farklı değerleri için hazırlanan program kullanılarak elde edilebilir(Gözdoldu,1997).

Tablo 2'de koyu olarak gösterilen değerler, her n* için P(N'=n) değerinin en yüksek olduğu n değerinin n* ya da n*+1 olduğunu göstermektedir. Başka bir ifade ile, normal dağılımlı kitlenin μ parametresini tahmin etmek için geliştirilen R2 ardışık süreci, daha büyük bir olasılıkla, en iyi sabit örneklem genişliğinde ya da bir fazlasında sona erecektir. Böylece σ^2 bilinmediği durumlarda sabit örneklem genişlikli süreç ile en iyi sabit örneklem genişliğinde μ parametresinin tahmini yapılamazken, ardışık süreç ile mümkün en küçük örneklem genişliği ile tahmin yapılabilmektedir.

Tablo 3. R1 Ardışık Süreci için Güven Düzeyi ve Beklenen Örneklem Genişliği

λ	n*	$n_0=3$ $P(\mu \in I_{N'})$	E(N')	$n_0=5$ $P(\mu \in I_{N'})$	E(N')
0.50	0.960	0.9997	4.1	0.9999	5.1
0.75	2.160	0.9933	5.2	9.9979	5.8
1.00	3.841	0.9777	6.6	0.9872	7.0
1.25	6.002	0.9600	8.4	0.9715	8.8
1.50	8.643	0.9457	10.7	0.9574	11.0
1.75	11.764	0.9361	13.4	0.9473	13.8
1.90	13.868	0.9324	15.3	0.9433	15.7
2.00	15.366	0.9307	16.7	0.9413	17.1
2.05	16.144	0.9301	17.4	0.9406	17.8
2.10	16.941	0.9296	18.2	0.9399	18.6
2.15	17.757	0.9292	19.0	0.9393	19.4
2.20	18.593	0.9289	19.8	0.9389	20.2
2.25	19.448	0.9287	20.6	0.9385	21.0
2.30	20.322	0.9285	21.4	0.9383	21.8
2.40	22.127	0.9285	23.2	0.93797	23.6
2.45	23.059	0.9285	24.0	0.937916	24.5
2.50	24.010	0.9287	25.0	0.937919	25.4
2.55	24.980	0.9289	25.9	0.93797	26.3
2.60	25.969	0.9292	26.9	0.9381	27.3
2.80	30.118	0.9305	31.0	0.9488	31.4
3.00	34.570	0.9321	35.4	0.9399	35.9
3.50	47.050	0.9363	47.9	0.9430	48.4
4.00	61.460	0.9397	62.4	0.9454	62.9
4.50	77.790	0.9422	78.8	0.9470	79.4
5.00	96.040	0.9438	97.1	0.9480	97.7

Tablo 3'te tüm n_0 ve λ değerleri için α=0.95 ve a=1.96 alınmıştır. n_0=3 ve λ=0.50 için R1 ardışık süreci ile parametreleri bilinmeyen normal dağılımlı kitle için 2d genişliğinde aralık tahmini yapıldığında, güven aralığının parametreyi içerme olasılığının 0.9997 ve beklenen örneklem genişliğinin ise 4.1 olduğu Tablo'dan görülmektedir (Gözdoldu,1997). Güven aralığının parametreyi içerme olasılığı ve beklenen örneklem genişliği değerleri, Tablo 1'deki, durdurma noktasının olasılık dağılımı değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Tablo'dan ayrıca, λ'nın artan değerleri için beklenen ardışık örneklem genişliğinin en iyi sabit örneklem genişliğine, ardışık güven düzeyinin ise, α=0.95 değerine yaklaştığı görülmektedir. Böylece λ'nın büyük değerleri için geliştirilen süreçler ile yapılan tahminlerin parametreyi içerme olasılıkları α'ya yakın olmaktadır. Benzer sonuçlar λ'nın, α'nın ve n_0'ın farklı değerleri için de elde edilebilir.

Tablo 4. β=1, t=1 için R2 ve R3 Ardışık Süreçlerinin Beklenen Örneklem Genişliği ve Beklenen Kayıp Değerleri

	n^*	E(N') p=1	E(N) p=2	Rn^*	$R_{N'}$ p=1	R_N p=2
s=1	5	5.38	5.0	15.000	15.360	15.315
	10	**10.32**	10.20	**30.000**	**30.540**	30.270
	15	15.45	15.27	45.000	45.495	45.180
	20	20.52	20.28	60.000	60.420	60.180
	30	30.60	30.30	90.000	90.270	90.180
s=2	5	5.22	4.74	10.000	10.680	10.950
	10	9.72	9.73	20.000	22.200	21.820
	15	14.71	14.88	30.000	32.880	31.950
	20	19.82	19.88	40.000	43.160	42.000
	30	30.03	30.16	60.000	63.240	62.040
	40	40.16	40.08	80.000	83.280	88.080
	60	60.24	60.12	120.000	123.360	122.160
s=3	5	5.18	4.61	8.333	9.330	10.091
	10	9.40	9.39	16.667	21.200	21.867
	15	14.20	14.50	25.000	33.000	32.525
	20	19.22	19.64	33.333	43.990	42.766
	30	29.43	29.76	50.000	64.850	63.000
	40	39.64	39.84	66.667	85.000	83.133
	60	59.82	59.94	100.000	125.000	123.000
	80	79.92	79.92	133.333	164.930	162.533
s=4	5	5.16	4.53	7.500	8.840	10.320
	10	9.21	9.15	15.000	23.220	26.820
	15	13.86	14.22	22.500	40.365	44.460
	20	18.80	9.34	30.000	58.380	63.120
	30	28.95	29.52	45.000	95.980	104.445
	40	39.16	39.60	60.000	136.500	150.780
	60	59.40	59.70	90.000	227.340	255.690
	80	79.52	79.76	120.000	329.640	374.400

Tablo 4'te, p'nin tek değerleri için Robins'in algoritması programlanarak elde edilen değerler, p'nin çift değerleri için ise Wang(1980)'ın çalışmasından derlenen değerler yer almaktadır. Genel olarak R2 ve R3 ardışık süreçleri için örneklem genişlikleri birbirine çok yakın olmakla beraber, s değeri büyüdükçe her iki ardışık sürecin risk değerlerinde önemli bir artış gözlenmiştir. Tablo'dan, s=1, p=1 ve n*=10 değerleri için tek değişkenli normal dağımlı bir kitlenin ortalaması R2 ardışık süreci ile tahmin edildiğinde, beklenen örneklem genişliğinin 10.32, tahmin yapmaktan kaynaklanan beklenen kayıbın 30.450 ve en küçük beklenen kayıbın ise 30.000 olduğu görülür. Bu değerlerin elde edilmesi için Tablo 2'deki durdurma noktasının olasılık dağılımı değerleri kullanılmıştır.Tablo'daki beklenen örneklem genişliği ve beklenen kayıp değerlerinin elde edilişini görmek için Gözdoldu(1997) incelenebilir.

5. ARDIŞIK SÜREÇLERİN SABİT ÖRNEKLEM GENİŞLİKLİ SÜREÇ İLE ETKİNLİK YÖNÜNDEN KARŞILAŞTIRILMASI

Ardışık süreçler etkinlik yönünden sabit örneklem genişlikli süreç ile karşılaştırılırken, durdurma kurallarının elde ediliş biçimi etkinliğin belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Başka bir deyişle, durdurma kuralları güven aralıkları ile belirlenen ardışık süreçler ile durdurma kuralları kayıp ve risk fonksiyonları ile belirlenen ardışık süreçler etkinlik yönünden en iyi sabit örneklem genişlikli süreç ile karşılaştırılırken, farklı etkinlik ölçütleri kullanılır. Bu nedenle ardışık süreçlerin etkinlik yönünden sabit örneklem genişlikli süreç ile karşılaştırılmaları, ardışık süreçlerin elde ediliş biçimine göre ayrı ayrı incelenecektir.

Durdurma kuralları güven aralıklarından belirlenen ardışık süreçlerin sabit örneklem genişlikli sürece göre etkinliği iki ölçüte göre belirlenir(Chow ve Yu,1981).

- Örneklem genişliklerinin oranına dayalı etkinlik ölçütü:
  $\eta=\dfrac{E(N)}{n^*}$.
- Güven aralıklarının parametreyi içerme olasılıklarına dayalı etkinlik ölçütü:
  $\iota=\dfrac{P(\mu\in I_N)}{\alpha}$.

Bu etkinlik ölçütlerine göre, $\eta<1$ olması ardışık sürecinin sabit örneklem genişlikli sürece göre örneklem genişliği yönünden, $\iota>1$ olması güven aralığının parametreyi içerme olasılıkları yönünden daha etkin olduğunu gösterir. Buna göre çalışmamızda, durdurma kuralı güven aralıklarından elde edilen R1 ardışık sürecinin sabit örneklem genişlikli sürece göre etkinliği, her iki etkinlik ölçütü için de Tablo 5'te verilmiştir.

Durdurma kuralları kayıp ve risk fonksiyonları ile belirlenen ardışık süreçlerin sabit örneklem genişlikli süreçlere göre etkinliği,

Örneklem genişliklerinin oranı, $\eta=E(N)/n^*$;

Risklerin oranı, R_N/R_n^*;

Riskler farkı(Pişmalık ölçütü), $R_N-R_n^*$

etkinlik ölçütlerine göre belirlenir. Burada, $\eta<1$ olması ardışık sürecin örneklem genişliği yönünden; $(R_N/R_n^*)<1$ olması risk yönünden; $(R_N-R_n^*)<0$ olması risk farkı (pişmanlık ölçütü) yönünden, sabit örneklem genişlikli sürece göre daha etkin olduğunu göstermektedir(Chow ve Yu, 1981; Vardi, 1979). Buna göre çalışmamızda, durdurma kuralları kayıp ve risk fonksiyonlarına dayalı olan R2 ve R3 süreçleri bu etkinlik ölçütlerine göre sabit örneklem genişlikli süreç ile karşılaştırıldığında, Tablo 6 elde edilir.

Tablo 5. R1 Ardışık Sürecinin Sabit Örneklem Genişlikli Sürece Göre Örneklem Genişliği ve Güven Düzeyi Yönünden Etkinliği

	α=0.95, a=1.96			
	n_0=3		n_0=5	
λ	η	ι	η	ι
0.50	4.277	1.0523	5.278	1.0525
0.75	2.403	1.0456	2.664	1.0504
1.00	1.720	1.0291	1.831	1.0391
1.25	1.402	1.0105	1.465	1.0226
1.50	1.235	0.9954	1.278	1.0076
1.75	1.142	0.9853	1.174	0.9971
1.90	1.106	0.9814	1.134	0.9929
2.00	1.088	0.9796	1.114	0.9908
2.05	1.081	0.9790	1.105	0.9901
2.10	1.074	0.9785	1.098	0.9893
2.15	1.068	0.9781	1.091	0.9887
2.20	1.062	0.9777	1.084	0.9883
2.25	1.057	0.9775	1.079	0.9878
2.30	1.053	0.9773	1.069	0.9876
2.40	1.045	0.9773	1.065	0.9873
2.45	1.042	0.9773	1.061	0.9872
2.50	1.039	0.9775	1.058	0.9872
2.55	1.037	0.9777	1.054	0.9873
2.60	1.035	0.9781	1.052	0.9874
2.80	1.028	0.9794	1.043	0.9987
3.00	1.023	0.9811	1.037	0.9893
3.50	1.018	0.9855	1.029	0.9926
4.00	1.015	0.9891	1.024	0.9951
4.50	1.013	0.9917	1.020	0.9968
5.00	1.011	0.9934	1.017	0.9978

Tablo 5'e göre λ'nın küçük değerleri için sabit örneklem genişlikli süreç örneklem genişliği yönünden ardışık sürece göre daha etkin olurken, ardışık sürecin de güven düzeyi yönünden sabit örneklem genişlikli sürece göre daha etkin olduğu görülmektedir. λ'nın artan değerleri için ise η ve ι katsayılarının 1'e çok yaklaştığı ancak η'nın 1'den büyük, ι'nın ise 1'den küçük olduğu görülür. Benzer tablolar, α ve n_0'ın farklı değerleri için de elde edilebilir.

Tablo 6 incelendiğinde, s>2 ve n^*'ın 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80 değerleri için en iyi sabit örneklem genişliği, beklenen ardışık örneklem genişliğinden daha büyük bulunmuştur. Dolayısıyla s'nin ve n^*'ın büyük değerleri için R2 ardışık sürecinin, örneklem genişliklerinin oranı dayalı etkinlik ölçütüne göre daha etkin olduğu söylenebilir. Tablo'dan ayrıca, tüm n* ve s değerleri için ardışık sürecin sabit örneklem genişlikli sürece göre risk ölçütleri yönünden etkin olmadığı görülmektedir. Ancak uygulamada en iyi sabit örneklem genişliği ve en küçük risk değeri belirlenemediğinden genellikle, daha büyük örneklem genişlikleri ile çalışılmaktadır. Dolayısıyla daha büyük risk değerleri elde edilir. Ardışık süreç ile elde edilen sonuçlar sabit örneklem genişlikli süreç için elde edilenlere çok yakın olduğundan, uygulamada ardışık süreç ile yapılan tahminlerin, gerek örneklem genişliği gerekse risk değerleri bakımından etkin olduğu söylenebilir.

Tablo 6. β=1, t=1 İçin R2 ve R3 Ardışık Süreçlerinin Sabit Örneklem Genişlikli Sürece Göre Örneklem Genişliği, Risk ve Risk Farkı Yönünden Etkinliği

	n^*	$E(N')/n^*$	$R_{N'}/R_{n^*}$	$R_{N'}-R_{n^*}$	$E(N)/n^*$	R_N/R_{n^*}	$R_N-R_{n^*}$
s=1	5	1.077	1.024	0.360	1.009	1.021	0.315
	10	1.032	1.018	0.540	1.020	1.009	0.270
	15	1.030	1.011	0.495	1.018	1.004	0.180
	20	1.026	1.007	0.420	1.014	1.003	0.180
	30	1.020	1.003	0.270	1.010	1.002	0.180
s=2	5	1.045	1.068	0.680	0.949	1.095	0.950
	10	0.972	1.110	2.200	0.973	1.091	1.820
	15	0.981	1.096	2.880	0.992	1.065	1.950
	20	0.991	1.079	3.160	0.999	1.050	3.160
	30	1.001	1.054	3.240	1.002	1.034	2.000
	40	1.004	1.041	3.280	1.002	1.026	2.004
	60	1.004	1.028	3.360	1.002	1.018	2.008
s=3	5	1.036	1.120	1.000	0.922	1.211	2.160
	10	0.940	1.272	4.533	0.939	1.312	1.758
	15	0.947	1.320	8.000	0.967	1.031	5.200
	20	0.961	1.322	10.990	0.982	1.283	7.525
	30	0.981	1.297	16.632	0.992	1.260	9.433
	40	0.991	1.275	18.333	0.996	1.247	14.560
	60	0.997	1.251	25.100	0.999	1.230	16.466
	80	0.999	1.237	31.600	0.999	1.219	23.100
s=4	5	1.033	1.179	1.340	0.907	1.376	29.190
	10	0.921	1.548	8.220	0.915	1.788	2.820
	15	0.924	1.794	17.845	0.948	1.976	11.820
	20	0.940	1.946	28.380	0.967	2.104	21.960
	30	0.965	2.133	50.980	0.984	2.321	33.120
	40	0.979	2.275	76.500	0.990	2.513	44.445
	60	0.990	2.526	137.340	0.995	2.841	165.600
	80	0.994	2.747	209.640	0997	3.120	254.400

6. SONUÇ

- Kitle parametreleri bilinmediği zaman, parametrelerin en iyi sabit örneklem genişliği ile tahmini yapılamamasına rağmen, ardışık süreçler ile, araştırmacının önceden belirlediği koşullara göre mümkün en az örneklem genişliğinde tahmin yapılabilmektedir.
- Durdurma kuralları kayıp ve risk fonksiyonlarına dayalı olarak belirleniyorsa, araştırmacılara s değeri küçük olan kayıp fonksiyonlarını tercih etmeleri önerilebilir. (Özellikle tahmin yapmaktan kaynaklanan kayıp değerinin karesel ya da daha küçük olduğu durumlar alınabilir.)
- Tanıtılan tüm ardışık süreçler, sabit örneklem genişlikli sürece göre tanımlanan bütün etkinlik ölçütleri yönünden asimtotik olarak etkin olmaktadır.
- Ardışık süreç ile parametre tahmini yapabilmek için denemenin sonuna kadar beklemek gerekmez. Bunun yerine, deneme sürerken veriler çözümlemeye alınabilir. Özellikle bazı araştırmaların yapısı ardışık sürecin uygulanmasına daha uygundur.

KAYNAKLAR

Kitap
Gavindarajulu, Z.(1981), *The Sequential Analysis of Hypothesis Testing, Point and Interval Estimation and Decision Theory*. Columbs, Ohio: USA.American Sciences Press.

Tez
Gözdoldu, G.(1997), *Ardışık Süreç ile Parametre Tahmini*, Yayınlanmamış Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997.

Makale
ANSCOMBE, F.J. (1953), *Sequential estimation*. J.Roy.Statist. Soc. Ser. B 15., 1-29.

CHOW,Y.S, YU,K.F.(1981), *The performance of a sequential procedure for the estimation of the mean*. Ann. Statist. 9., 184-189.

RAY, W.D.A.(1957), *Sequential confidence intervals for the mean of a normal population with unknown variance*. J.Roy. Stat. Soc. Ser. B 19 133-143.

ROBBINS, H.(1959), *Sequential estimation of the mean of a normal population. Probability and Statistics*. The Harald Cramer Volume 235-245. Almquist and Wilksell, Uppsala, Sweden.

STARR, N.(1966a), *The performance of a sequential procedure for fixed-width interval estimate*. Ann.Math. Statist. 36 36-50.

STARR, N.(1966b), *On the asymptotic efficiency of a sequential procedure for the mean*. Ann. Math. Statist. 37 1173-1185.

STEIN, C and WALD, A.,(1947), *Sequential confidence intervals for the mean of a normal distribution with known variance*. Ann. Math. Statist. 18, 427-433.

VARDI, Y. (1979), *Asymtotic optimality of certain sequential estimators*. Ann.Statist. 5, 1034-1039.

WANG,W.H.,(1980), *Sequential estimation of the mean of a multinormal population*. J.Amer.Statist. Assoc. 75, 977-983.

Bildiri
KOCBERBER, G. (1997), *Kayıp ve Risk Fonksiyonları ile Varyansı Bilinmeyen Normal Dağılımlı Kitlenin Ortalamasının Ardışık Tahmini*, Araştırma Sempozyumu'97 Bildiriler Kitabı, p.42-46.

Sequential Estimation of The Mean of A Normal Population with Unknown Variance

ABSTRACT

In this study, sequential procedures which are determined by confidence intervals and loss and risk function of stopping rules are introduced for the estimation of the mean of normally distributed population and the probability distribution of the stopping points of these procedures are obtained and compared with fixed sample size procedure by various efficiency measures.

Key Words: *Sequential estimation, stopping rules, loss and risk function, risk efficiency*