

### **III. DERLEMELER**



## İÇSEL BAĞINTI (AUTOCORRELATION) PROBLEMİ VE STOKASTİK FARK DENKLEMLERİ

Doç. Dr. Yüksel İŞYAR (\*)

### Ö Z E T

Ekonomik verilerin istatistiksel ve ekonometrik analizlerinde en yaygın olarak kullanılan klâsik en küçük kareler (EKK) yöntemi ile elde edilen tahmin edicilerin en iyi -doğrusal - sapmasız (BLUE) olabilmeleri stokastik terim ( $u$ ) hakkında bazı varsayımların gerçekleşmesine bağlıdır. Zaman serisi verilerine dayanan analizlerin karakteristik problemi, müteakip stokastik terimler çiftinin bağımsız olmayışları halinde görülen içsel bağıntı (autocorrelation) problemidir. Matematiksel ifade ile, bir çift stokastik terim olan  $u_t$  ve  $u_{t-1}$ 'in sıfırdan farklı bir kovaryans göstermesi halinde,  $(E u_t u_{t-1} \neq 0)$ , klâsik modelin ilgili varsayımı gerçekleşmemekte ve içsel bağıntı probleminin mevcudiyetinden söz edilmektedir.

Bu makalede, daha çok zaman serisi verilerinin yaygın bir problemi olan içsel bağıntının elimine edilmesi için çeşitli ekonometristlerin önerdikleri belli başlı yöntemler (fark denklemleri) gözden geçirilmektedir.

### A. AUTOREGRESSİVE MODELLER

Teorinin de öngördüğü gibi, zaman gecikmeli bağımlı değişkenin bağımsız değişkenler arasında yer aldığı durumlara sık sık rastlanmak-

tadır. Böyle bir durumun tipik bir örneği (1) de verilmiştir :

$$(1) C_t = a + bY_t + c C_{t-1} + u_t$$

İçsel bağıntı problemi (1) de ifade edilen ilişki tipleri ile birlikte sık sık görülmektedir. Böyle bir ilişkide gözlenen,

(\*) Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Ziraat Ekonomi Bölümü Öğretim Üyesi.

$$(2) C_t = a + bY_t + u_t$$

$$(3) u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

eşitlikleri (4) nolu ilişkinin teşkil edilmesi için kullanılmıştır,

$$(4) C_t = a(1-\rho) + \rho C_{t-1} + bY_t - b\rho Y_{t-1} + e_t$$

Yukarıdaki ilişkinin doğruluğu **apriori** olarak kabul edilirse, a, b ve  $\rho$  nun tahminleri gerekir. Bunun için **Durbin Metodu** kullanılabilir. (Bak. J. Durbin, 1960). Bu metodun kullanılması halinde karşılaşılabilecek en önemli güçlük varsayımın sabit olan içsel bağlantı probleminin yanı sıra bağımsız değişkenler arasında çoklu bağlantı (multicollinearity) probleminin de görülebilmesidir.

Yukarıdaki durumdan daha basit bir ilişki (5) deki gibidir :

$$(5) Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_k Y_{t-k} + e_t$$

Böyle bir durum Mann ve Wald tarafından tartışılmıştır (Bak. Mann ve Wald, 1943). Bu durumda klâsik EKK teorisi asimptotik olarak geçerli olabilmektedir.

Autoregressive ilişkinin simultane denklem modeli üzerinde tartışılması Anderson ve Rubin tarafından yapılmıştır (Bak. Anderson - Rubin, 1961).

## B. ZAMAN GECİKMELİ DAĞILIM (DISTRIBUTED LAG) MODELİ

Aşağıda (6) nolu ilişkide ifade edilen zaman gecikmeli dağılım

modelinde değişkenler arasındaki ilişkinin ölçülmesinde karşılaşılan en büyük güçlük Y'ler arasında çoklu bağlantı probleminin görülmesi halinde ortaya çıkar.

$$(6) Y_t = a^0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_q X_{t-q} + u_t$$

Bu önemli problemin önlenebilmesi için tahmin edilecek parametreler üzerinde teoremin öngördüğü bazı kısıtlamaların konması gereklidir. Koyck'un Zaman Gecikmeli Dağılım modeli bu konuda verilebilecek örneklerden sadece birini teşkil eder (Bak. Theil, 1961).

Genel olarak zaman gecikmeli dağılım modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$Y_t$ 'nin  $X_t$ 'ye belirli zaman paterine göre tepki göstereceğini varsayarsak;  $X_t$  nin bir birim artışı  $Y_t$ 'de  $a_0$  kadar,  $Y_{t+1}$ 'de  $a_1, \dots, Y_{t+p}$ 'de  $a_p$  kadar değişmeye sebep olur. Bu durum matematiksel olarak (7) nolu eşitlik şeklinde ifade edilebilir;

$$(7) Y_t = b + a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p}$$

Ayrıca,  $X_t = X_{t-1} = \dots = X_{t-p}$  olduğunu varsayarsak, X'deki birim artışın Y'de yapacağı toplam değişme ( $a_0 + \dots + a_1 + a_p$ ) olur. Bu toplam değişmeyi  $\alpha$  ile gösterirsek ( $a_i/\alpha = \eta_i$ ), aşağıdaki (8) ve (9) nolu ifadeleri yazabiliriz :

$$(8) Y_t = b + \alpha \sum_{i=0}^p \eta_i X_{t-i}$$

$$(9) \sum_{i=0}^p \eta_i = 1$$

Bu ifadelerden de anlaşılacağı gibi, zaman gecikmeli dağılım modelinde dağılımın zamanlararası strüktürüne bağlı kalarak a'yı (X'in Y üzerindeki toplam etkisini) tahmin etmek esas gayedir.

Y'nin X'e karşı tepkisi gibi Z<sub>t</sub> de Y'ye tepki gösterirse (10) nolu ifade yazılabilir;

$$(10) Z_t = C + b_0 Y_t + \dots + b_q Y_{t-q}$$

(7) yi (10) da kullanarak Z<sub>t</sub>'yi X<sub>t-1</sub> nin karmaşık bir fonksiyonu olarak ifade edebiliriz. Böyle bir işlemde notasyonu mümkün olduğu kadar basit tutabilmek için D gibi bir operatörü işleme dahil etmemiz gerekir. Buna göre;

$$(11) D X_t \approx X_{t-1}$$

Şimdi de (7) ve (10) nolu eşitlikler yeniden ifade edilerek (12) ve (13) nolu ifadeler elde edilebilir;

$$(12) Y_t = b + (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_p D^p) X_t$$

$$(13) Z_t = c (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \dots + b_p D^p) Y_t$$

a (D) ve b (D), D'nin iki polinomu- nu gösterirlerse, (12) ve (13) nolu ifadeler sırası ile (14) ve (15) halinde basitleştirilirler;

$$(14) Y_t = b + a (D) X_t$$

$$(15) Z_t = c + b (D) Y_t$$

Şimdi de Y<sub>t</sub>'yi Z<sub>t</sub> de ikame ederek aşağıdaki ifade elde edilir;

$$(16) Z_t = c + b (D) (b + a (D)) X_t = c + b (D) X_t + b (D) a (D) X_t$$

Zaman strüktüründe herhangi bir devreyi alabiliriz. Genel olarak, herhangi bir D fonksiyonunu f (D) olarak tanımlayarak Y ile X arasındaki zaman strüktür ilişkisini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$(17) Y_t = f (D) X_t$$

Şayet, f (D), D'nin iki polinomunun bir oranı (yani, g (D)/h (D)) olarak ifade edilirse (18) nolu ilişki yazılabilir;

$$(18) h (D) Y_t = g (D) X_t$$

(18) nolu ilişki (6) nolu ilişkinin başka bir şekilde ifadesidir. f (D), g (D)/h (D) şeklinde Rasyonel Zaman Gecikmeli Fonksiyon (Rational Distributed Lag Function) olup, o da Pascal'ın Zaman Gecikmeli Fonksiyonundan farksızdır. Zaman gecikmeli fonksiyonun bu sınıfı Fisher, Koyck, Solow, Nerlow ve Jorgenson'un tartıştıkları fonksiyonları içerir (Bak. D. Jorgenson, 1966).

Zaman gecikmeli dağılımların tartışılmasında stokastik spesifikasyona dikkat edilmedi. Halbuki, bu husus model geliştirmenin her kademesinde karşılaşılan hipotezlerle yakinen ilişkili olup, her kademedeki bağımsız u<sub>t</sub> terimi, şayet birleştirilirse, içsel bağıntıya sebep olabilir (Bak. Z. Griliches, 1961).

## C. SONUÇ

İçsel bağıntı veya zaman gecikmeli değişkenler için önerilen istatistiksel tekniklerin hepsi birer vasıta olup çok dikkatli kullanılmaları gereklidir.

Şayet  $u = u_{-1} + e$  ise,  $Y$ 'nin  $Y_{-p}$   $Y_{-1}$  ve  $X$ 'in  $X_{-p}$   $X_{-1}$  şeklinde dönüşüme uğratılması hata terimini ( $u$ ) bağımsız ve identikal dağılımlı kılar, fakat böyle bir dönüşümle elde edilen ( $Y_t = b + \rho Y_{t-1} + \alpha X_{t-1} + e_t$ ) ifadesinin gerçek strüktürel spesifikasyon olarak kabul edilip edilemeyeceği şüphelidir. O halde, ekonomik verilerin istatistiksel ve ekonometrik analizlerinde yukarıda önerilen metodlarla içsel bağıntının mekanik olarak eliminasyonuna gayret sarfetmek yerine, böyle bir problemi etkileyen teorik esaslara dönerek hata terimlerini yeterli stokastik spesifikasyonlarla belirliyecek olan bütün muhtemel spesifikasyonları bulmaya çalışmak daha yararlı olur.

## FAYDALANILAN ESERLER

Anderson - Rubin, «The Asymptotic Properties of Estimates of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic, Equation», **Statistical Inference**

in **Dynamic Economic Models**, 1950.

Durbin, J., «Estimation of Parameters in Time-Series Regression Models», **J. Royal Stat. Soc.**, 1960. p. 139-153.

Griliches, Z., «A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags», **Econometrica**, 1961.

Johnston, J., **Econometric Methods**, 1972.

Jorgenson, D., «Rational Distributed Lag Functions», **Econometrica**, Vol. 34, 1966.

Mann - Wald, «On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations», **Econometrica**, 1943, p. 173-220.

Rausser, G., «Ekonometri Ders Notları», Dept. of Agr. Econ., Univ. of California, Davis, 1968.

Sargan, J.D., «The Maximum Likelihood Estimation of Economic Relationships with Autoregressive Residuals», **Econometrica**, July, 1961.

Theil, H., **Econometric Forecast and Policy**, 1961. p. 217-219, 329 - 331.