İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 01 No 01 Sayfa 67-85 Nisan 2002

Çok Değişkenli Kalite Kontrol Yaklaşımlarının Bir Değerlendirmesi

M.Akif BAKIR* Sezar KARACA**

ÖZET

Değişkenler arası anlamlı korelasyonun sözkonusu olduğu durumlarda kalite kontrol sürecini gerçekleştirmede değişkenlerin bireysel olarak ele alındığı durumlardan daha güçlü kontrolları verecek istatistiksel yöntemlerin kullanılması gerekir. Bireysel değişkenleri dikkate alan ayrı ayrı kontrol grafiklerinin kullanımı daha kolay yorumlanabilir olmasına rağmen kalite değişkenleri arası korelasyonun varlığı duyarlılığı azaltır.

İlk olarak, Hotelling (1947) kalite tesadüfi değişkenlerinin dağılımının çok değişkenli normal dağılım olduğu varsayımı altında T^2 istatistiğine dayalı çok değişkenli kontrol grafiği önermiştir. Jackson (1959), Schall ve Chandra (1987), Murphy (1987), Hawkins (1991), Mason, Tracy ve Young (1995), Hotelling'in T^2'sini baz alarak bu kontrol dışı durumun hangi değişken veya değişkenlerden kaynaklandığına dair yaklaşımlar önermişlerdir. Bu çalışmada çok değişkenli kalite kontrol konusunda ileri sürülen yöntemlerin bir değerlendirilmesi yapılmaktadır.

***Anahtar Kelimeler**: Çok değişkenli kalite kontrol, Hotelling T^2*

1. GİRİŞ

Bir kalite kontrol işleminde çoğu zaman kontrol edilen bir maddeden birden fazla karakteristik ölçülür. X_1 ve X_2 iki değişkenli normal dağılıma sahip her iki karakteristiği de ölçülebilen değişkenler olsun. Her bir karakteristiğe ayrı ayrı Shewhart'ın $\overline{X}$ grafiği uygulanarak, istatistiksel kalite kontrol gerçekleştirilebilir. Eğer örnek ortalamaları $\overline{X}_1$ ve $\overline{X}_2$'ler kendi kontrol sınırları içerisinde kalıyor ve tesadüfi dağılım gösteriyorsa proses kontrol altındadır biçiminde yorumlanır Montgomery (1991).

Birden fazla kalite değişkeninin bir süreçte eşanlı olarak kontrolü ile ilgilenildiği zaman, bu değişkenlerin birbirinden bağımsız olarak kontrolüne yönelindiğinde yanlış bir yola başvurulmuş olabilir. Şöyle ki p tane bağımsız Shewart kontrol grafiğinin herbirine I. tip hata α uygulandığında, eşanlı kontrol işlemi için gerçek I. tip hata $\alpha'=(1-(1-\alpha)^p)$, süreç kontrol altında iken tüm değişkenler için ortalamaların kontrol sınırları

* Yrd.Doç.Dr. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-mail: bakir@fef.edu.tr, (Haberleşme adresi)

** Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Meslek Yüksekokulu

içine düşmesi olasılığı ise $(1-\alpha)^p$ olur. Normal dağılım varsayımı altında $\overline{X}_1$ veya $\overline{X}_2$'nın bireysel olarak, örneğin, 3σ kontrol sınırlarını aşma olasılığı 0,0027'dir. Her iki değişken kontrol altında iken, bu değişkenlerin alt veya üst kontrol sınırlarını eşanlı olarak aşmasının ortak olasılığı ise $\alpha'=(1-(1-\alpha)^p)=1-(1-.0.0027)^2$ $=0.00539271$ olur. Süreç gerçekten kontrol altında olduğunda, hem $\overline{X}_1$ hem de $\overline{X}_2$ nın kontrol sınırları içerisinde eşanlı olarak bulunması olasılığı ise $(1-\alpha)^p=(0,9973)(0,9973)=0,99460729$ dur. Dolayısıyla iki bağımsız $\overline{X}\,(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$, grafiklerinin kullanımı, $\overline{X}_1$ ve $\overline{X}_2$ nin eşanlı kontrolünü vermeyebilir. Eşanlı kontrol durumunda birinci tip hata olasılığı ve herhangi bir noktanın, doğru bir şekilde kontrol sınırları içinde belirlenmesi olasılığı, yukarıdaki küçük örnekte de görüleceği üzere, bireysel kontrol grafiklerindeki belirlenen olasılıklara eşit olmaz. Bu bozulma değişkenlerin sayısı arttıkça daha da şiddetli hale gelecektir.

Kalite değişkenlerinin bağımlılığı söz konusu olduğunda, gerçek olasılıkları yukarıdaki ilişkilerle bulmak mümkün de olamayacaktır. Bağımlılık durumunda eşanlı kontrol işlemine ilişkin bozulmayı ölçmek kolay olmayacaktır (Montgomery, 1991).

Özetlenecek olursa çoklu tek değişkenli kontrol grafikleri önemli bir eksikliğe sahiptir. Bu eksiklik toplam I. tip hata olasılığının gözardı edilmesidir. Dolayısıyla tüm değişkenleri aynı hipotez testinde gözlemleyebilecek çok değişkenli kontrol grafiklerine gereksinim vardır. Bunlar şu kriterleri sağlayacak biçimde tasarımlanmalıdır. Birincisi, I. Tip hata olasılığı değişken sayısı ne olursa olsun aynı kalmalıdır. İkincisi ise kontrol grafiğindeki sinyalleri yorumlayacak bazı teşhis kriterleri mevcut olmalıdır.

Tek değişkenli Shewhart kontrol grafiklerinin çok değişkenli benzeri T^2 kontrol grafiğidir. T^2 istatistiği değişkenlerin ortalamalarını, varyanslarını ve kovaryanslarını bir tek istatistikte birleştirir. Hotelling (1947) ve Jackson (1959) çalışmaları T^2 istatistiğine dayalı en bilinen çok değişkenli kontrol grafikleridir.

Hotelling'in T^2 istatistiğinin temel avantajı çok değişkenli gözlemlerin süreç ortalama vektöründeki genel bir kaymayı gözlemleyen optimal bir test olmasıdır (Hawkins, 1991). Bununla beraber yöntemin bazı kusurları sözkonusudur. Temel kusuru T^2 istatistiğinin bir sürecin sadece kontrol dışı durumunu tesbit etmeye yeterli, fakat bu kontrol dışı durumun hangi değişkenden kaynaklandığını tesbit etmeye yeterli olmamasıdır.

Çalışmanın takip eden kısımlarında çok değişkenli kalite kontrol problemlerine ilişkin yaklaşımların ilk klasik çalışmalardan son zamanlardaki gelişmelere kadar önemli bir kısım çalışmaların bir değerlendirmesi yapılacaktır.

2. HOTELLİNG'İN T^2 YAKLAŞIMI

X_1 ve X_2 gibi iki kalite karakteristiği iki değişkenli normal dağılıma sahip olarak dağılmış olsun. μ_1 ve μ_2 ortalama değerleri, σ_1 ve σ_2 standart sapmayı göstermek üzere kovaryans σ_{12} olsun. σ_1, σ_2 ve σ_{12} biliniyor olduğunu varsayalım. $\overline{X}_1$ ve $\overline{X}_2$ örnek ortalamaları olmak üzere

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\left[\sigma_1^2(\overline{X}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_2^2(\overline{X}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12}(\overline{X}_1 - \mu_1)^2(\overline{X}_2 - \mu_2)^2\right] \quad (1)$$

istatistiği 2 serbestlik derecesiyle ki-kare dağılımına sahiptir. Bu eşitlik proses ortalamaları μ_1 ve μ_2 için kontrol grafiklerinin temeli olarak kullanılabilir.

İki değişken bağımsız yani $\sigma_{12} = 0$ ise bu durumda Eşitlik (1), merkezi (μ_1, μ_2) olan bir elips tanımlar. Bu elips genellikle literatürde kontrol elipsi olarak bilinir. İki bağımsız $\overline{X}$ grafiği kullanıldığında, $\overline{X}_1$ ve $\overline{X}_2$ için ortak kontrol bölgeleri karşılaştırılır. Eğer iki kalite değişkeni bağımlı ise bu durumda $\sigma_{12} \neq 0$ dır ve elipsin ana eksenleri $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ eksenlerine paralel olmamaktadır. Kontrol elipsleri ile ilgili iki dezevantaj sözkonusudur. Birincisi, çizilen noktaların zaman ardışıklığı kaybolacak ve bunun sonucu olarak gerekli işlemler kolaylıkla uygulanamayacaktır. İkincisi ise kalite karekteristiği ikiden fazla olduğu zaman, bu elipsleri oluşturmanın zorluğudur. Bu zorlukları gidermek için genellikle kontrol grafiği üzerinde her bir örnek için Eşitlik (1) den hesaplanan χ_0^2 değerleri işaretlenir, ve sadece $\chi^2_{\alpha,2}$ üst kontrol sınırı kullanılır. Bu kontrol grafiği χ^2 kontrol grafiği olarak adlandırılır.

Bu sonuçlar, p tane bağımlı kalite değişkeninin ortak olarak kontrol edildiği durum için genelleştirilebilir. p kalite değişkeni için örnek ortalamalar seti px1 boyutlu vektör

$$\overline{X} = \left[\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2 \quad \ldots\ldots \overline{X}_p\right] \text{ olarak ifade edilebilir.}$$

p tane değişken için test istatistiği şu şekilde yazılabilir.

$$\chi_0^2 = n(\overline{X} - \mu)'\sigma^{-1}(\overline{X} - \mu) \quad (2)$$

Burada $\mu' = \left[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\right]$, her bir kalite değişkeninin kontrol durumundaki ortalamalar vektörünü, σ kovaryans matrisini tanımlamaktadır. Kontrol grafiği üst sınırı $\text{ÜKL} = \chi^2_{\alpha,p}$ olarak hesaplanır.

m, örnek sayısı, n, örnek çapı ve X_{ijk}, k ıncı örnekteki j inci kalite karakteristiği için i inci gözlem olmak üzere k ıncı örnekteki kalite karakteristiği j ve h arasındaki kovaryans;

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ijk} - \overline{X}_{jk})(X_{ihk} - \overline{X}_{hk}) \left.\begin{matrix} k = 1,2,\ldots\ldots,m \\ j \neq h \end{matrix}\right\} \quad (3)$$

biçiminde tanımlanır.

$\overline{\overline{X}}_j, \overline{S}^2_{jk}$ ve $\overline{S}_{jh}$ istatistikleri bütün m örnek üzerinden aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\overline{\overline{X}}_j = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overline{X}_{jk} \qquad j=1,2,\ldots,p \tag{4}$$

$$S_j^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}S_{jk}^2 \qquad j=1,2,\ldots,p \tag{5}$$

$$S_{jh} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}S_{jhk} \qquad j \neq h \tag{6}$$

$\overline{\overline{X}}_j, \overline{\overline{X}}$ vektörünün elemanları olmak üzere pxp örnek kovaryans matrisi S şu biçimde oluşturulur.

$$S = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & S_{13} & \cdots\cdots & S_{1p} \\ & S_2^2 & S_{23} & \cdots\cdots & S_{2p} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & S_p^2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Şimdi örnek değerleri yerine yazılırsa Eşitlik (2) şu biçimde yeniden düzenlenir.

$$T^2 = n(\overline{X} - \overline{\overline{X}})^{1}\, S^{-1}\, (\overline{X} - \overline{\overline{X}}) \tag{8}$$

Hotelling'in T^2 kontrol grafiği (8) de verilen istatistiğe dayalı olarak elde edilir. Eğer μ ve σ nispeten çok sayıdaki örneklerden tahmin edilirse (m>20 veya 25), bu durumda T^2 grafiğinde, ÜKL olarak $ÜKL = \chi^2_{\alpha,p}$ kullanılır. Eğer m küçükse bu durumda ÜKL, T^2 dağılımı esas alınarak elde edilir.

χ^2 ya da T^2 kontrol grafiğinin kullanımı ile karşılaşılan bir zorluk kontrol dışı bir sinyalin pratikteki yorumudur. Özellikle p değişkenden hangisi (ya da hangileri) bu sinyalden sorumludur. Bu soruyu cevaplamak her zaman kolay değildir.Bu konudaki standart uygulama her bir değişken X_1 , X_2 ,............, X_p için tek değişkenli $\overline{X}$ grafiklerini çizmektir. Bununla birlikte bu yaklaşımı daha önce tartışılan sebepten yani bağımlı değişkenler durumunda başarılı olmayabilir.

Dolayısıyla bu konu çok değişkenli kalite kontrol çalışmalarının odak noktası olmuştur ve Jackson'ın (1959) ilk çalışmasından bu yana özellikle son yıllarda bu alanda önemli çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

3. JACKSON'IN YAKLAŞIMI

Jackson (1959) tarafından çok değişkenli kalite kontrol için geliştirilen yaklaşımın esası birbiri ile ilişkili iki değişkeni ilişkisiz değişkenlere dönüştüren önemli bileşenler elde etmeye dayanır. Burada temel olarak, orijinal iki ilişkili değişken birbirinden bağımsız iki yeni değişkene dönüştürülmektedir. Bu yöntem temel eksen rotasyonu ya da temel bileşenler analizi olarak bilinmektedir. Karakteristik vektörler olarak adlandırılan elipsin eksenleri bağımsız değişkenleri elde etmek için gerekli rotasyonu belirler. S örnek kovaryans matrisi olmak üzere λ_1 ve λ_2 karakteristik kökleri, $|S-\lambda I|=0$ determinantından elde edilir.

V , V_1 ve V_2 karakteristik vektörlerden oluşan matris olmak üzere,

$$V=\begin{bmatrix} V_1 \\ \cdots\cdots \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} \\ & \\ v_{2x} & v_{2y} \end{bmatrix} \tag{9}$$

olarak tanımlanır.

Kontrol elipsinin ana ve minör eksenlerini belirlemek için orijinal X_1 ve X_2 değişkenleri üzerine ana eksen rotasyonu uygulayarak ilişkisiz yeni iki değişken z_1 ve z_2 $[z_1\ z_2]=[X_1\ X_2]V'$ biçiminde elde edilir. z nin kovaryans matrisi, X in kovaryans matrisinin önden ve sondan dönüşüm matrisi V ile çarpılması ile elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ & \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}=VSV' \tag{10}$$

Yeni değişken, z_1 "0" ortalama ve λ_1^2 varyansa, z_2 ise "0" ortalama ve λ_2^2 varyansa sahip olup, z_1 ve z_2 arasındaki kovaryans "0" dır. Dolayısıyla z_1 ve z_2 de ilişkisizdir. Orijinal değişkenler X_1 ve X_2 nin iki değişkenli normal dağıldığı varsayımı geçerli ise, z_1 ve z_2 de dönüşüm doğrusal olduğundan dolayı iki değişkenli normal dağılıma sahip olur.

Bunu bir kalite kontrol aracı olarak kullanmak için bazen karakteristik vektörlerin her bir elemanını karşılık gelen karakteristik köklere bölmek daha uygun olmaktadır. Yani w_1 = v_1/λ_1 ve $w_2 = v_2/\lambda_2$. Orijinal değişken üzerine dönüşüm ise $y = 2\Lambda^{-1} = xw'$ dur. Yeni değişken y lerin kovaryans matrisi WSW'=I olur. Yeni değişkenler y_1 ve y_2 bağımsız olarak "0" ortalama ve birim varyansla normal dağılıma sahiptir. p bağımsız değişkeninin kareler toplamı, p serbeslik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Küçük örnekler için varyanslar örnekten tahmin edildiğinde χ^2 dağılımı T^2 ye dönüşür. y lerin kareler toplamı yine T^2 ye eşittir. (Yani $T^2=yy'$)dir.

Jackson'ın yukarıda tanımlanan yaklaşımında sonuç olarak üç yöntemden birisi kullanılabilir. Orijinal gözlemler (X_1, X_2) kontrol elipsi üzerinde çizilebilir, $XS^{-1}X'$ değerleri için T^2 kullanılır veya yy' değerleri için T^2 kullanılır. Bunlardan her üçü de sürecin kontrol altında olup olmadığına aynı cevabı verir. Ancak ikiden daha fazla değişkenin olduğu durumlarda dönüştürülmüş değişkenlerin kullanılması gerekir.

4. SCHALL VE CHANDRA YAKLAŞIMI

Ne T^2 ne de Jackson'ın (1959) önemli bileşenlere dayalı yaklaşımında kontrol dışı duruma neden olan değişkeni tesbit etmek mümkün olmamaktadır. Jackson ın dönüştürülmüş değişkenleri herhangi bir fiziksel anlama sahip değildir. Schall ve Chandra (1987) çalışmalarında bu noktalara işaret ederek yine önemli bileşenlere ve regresyon analizine dayalı bir yaklaşım geliştirmekte ve yukarıda işaret edilen soruna cevap aramaktadırlar.

X çoklu normal dağılıma sahip girdi değişkenler vektörünü Y ise bağımsız olmayan çoklu normal dağılıma sahip çıktı değişkenler vektörünü temsil etmek üzere, girdi değişkenlerin sayısı çıktı değişkenlerin sayısından az olan ve aralarında doğrusal bir ilişki bulunan bir sistem de önemli bileşenlerin fiziksel yorumundaki zorluk aşılmaya çalışılmaktadır. Dolayısıyla girdi önemli bileşenleri ile çıktı önemli bileşenleri arasında bir ilişkinin bu problemi çözeceği belirtilmektedir. Böyle bir düşünce ise her iki grup değişkenler arası regresyon analizi ile mümkün olabilir. L çıktı önemli bileşenler vektörü D, enküçük kareler tahmin ediciler matrisi olmak üzere bu ilişki

$$L = DX + D_0 \tag{11}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Girdi değişkenlerin birbiri ile ilişkili olması durumunda ise bunların önemli bileşenleri elde edilir ve bu durumda regresyon tahmin denklemi

$$L = BW + B_0 \tag{12}$$

biçimini alır. Bu durumda parametre tahminleri farklılaşacaktır. Fakat çıktı önemli bileşenleri ve orijinal girdi değişkenleri gerekli olduğundan bu denklemin orijinal girdi değişkenleri cinsinden yazılması gerekir. W önemli bileşenler kolon vektörü V özvektörler matrisi olmak üzere girdi önemli bileşenleri $W = VX$ olarak yazılabilir. Eşitlik (12) de yerine koyulduğunda

$$L = BVX + B_0 \tag{13}$$

elde edilir. Girdi değişkenler, çıktı önemli bileşenler cinsinden ifade edilecek olursa, eşitlik (13) den şu ilişkiye ulaşılır.

$$X = (BV)^{-1}(L - B_0) \tag{14}$$

Ancak yukarıdaki eşitlikte genellikle çıktı önemli bileşenlerin sayısı, girdi önemli bileşenlerin sayısı ile aynı olmayacağından, eşitlikteki ters matrisin hesaplanması da mümkün olmayacaktır. Bu durum Schall ve Chandra'nın yaklaşımlarının en belirgin eksikliğini tanımlamaktadırlar. Dolayısıyla yazarlar süreçte girdi değişkenlerin sayısının çıktı değişkenlerin sayısından daha az olduğu varsayımını yapmaktadırlar. Ancak bu probleme ilk n önemli bileşenin, herhangi n çıktı önemli bileşenin orijinal çıktı değişkenlerinin toplam varyansının büyük bir yüzdelik kısmını açıklayacağı düşüncesinden hareketle, Z ilk n çıktı önemli bileşen vektörü olmak üzere (14) deki eşitlik

$$X = (BV)^{-1}(Z - B_0) \qquad (15)$$

biçiminde düzenlenerek aşılmaya çalışılmıştır. Bu ilişki ile böylece girdi değişken değerleri çıktı önemli bileşen değerlerinden tahmin edilebilmektedir. Buradan hareketle kontrol dışı durumun nedenine yönelinmektedir. Süreç çıktı önemli bileşenleri kullanarak kontrol edilmeye çalışıldığından her bir örnekten elde edilen sonuç, A özvektörler matrisi olmak üzere

$$Z = AY \qquad (16)$$

ilşkisini kullanarak dönüştürülmektedir. Böylece sürecin kontrolü her bir önemli değişkene ilişkin kontrol grafiği üzerinde önemli bileşen değerleri çizilerek takip edilir . Eğer kontrol dışı bir durum tespit edilirse eşitlik (15) kullanılarak girdi değişken değerleri tahmin edilir ve belirtme (spesifikasyon) sınırları ile karşılaştırılır. Böylece süreçteki değişkenliğe neden olan girdi değişken tespit edilmiş olur.

5. MURPHY'İN YAKLAŞIMI

Çok değişkenli kalite kontrol problemlerine diğer ilginç bir yaklaşım Murphy (1987) tarafından diskiriminant analizi düşüncesine dayalı olarak geliştirilmiştir. Kalite kontrol değişkenlerinin normal dağıldığı varsayımı altında yalnızca süreç ortalama parametresi μ_0 daki kaymayı gözlemleyen bir yöntemdir.

Öncelikle sürecin kontrol altında olup olmadığı kararına Hotelling'in T^2 istatistiği kullanılarak ulaşılır. K belli bir α değerine karşılık gelen χ^2_p değeri olmak üzere $T^2 \leq K$ olduğu sürece süreç kontrol altındadır. Aksi durumda süreç kontrol dışıdır. T^2 istatistiğin çok değişkenli durumlarda kullanılmasının temel avantajı değişkenler arası korelasyon yapısını yansıtmasından ve hesaplama kolaylığından ileri gelmektedir. Yine Murphy de T^2 istatistiğinin sadece sürecin bütün olarak kontrol durumunu gözlemlemeyi başarabildiğini fakat kontrol dışı herhangi bir duruma neden olan değişkenleri tesbit etmekteki başarısızlığına dikkat çekerek bu problemin çözümüne yönelmiştir.

Jackson'ın (1959) önemli bileşenler yaklaşımında sadece T^2 kontrol grafiği değil aynı zamanda p tane önemli bileşen grafiğinin de çizilmesi gerekiyordu. Fakat her zaman bu önemli bileşenlerden hareketle orijinal değişkenleri yorumlamak kolay olmuyordu. Murphy (1987) kontrol dışı durumu kolayca yorumlayabilecek ve hangi değişken ya da değişken grubunun kontrol dışı duruma neden olduğunu test edecek diskiriminant analizine dayalı bu yaklaşımını geliştirmiştir. Kısaca bu yöntem değerlendirilecektir.

A, kontrol durumundaki gözlemler kümesini, B ise kontrol dışı durumdaki gözlemler kümesini göstermek üzere yöntem bu iki durumu ayrıştırır. Bu durumda B de olması gereken gözlenen bir örnek ortalaması $\overline{X}$ yı A da veren gerçek odds lar, A ve B nin çoklu normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında

$$\text{ODDS}=\exp\left[-\frac{n}{2}(\mu-\overline{X})'\sigma^{-1}(\mu-\overline{X})+\frac{n}{2}(\mu-\overline{X})'\sigma^{-1}(\mu-\overline{X})\right] \tag{17}$$

biçiminde ifade edilir. μ, B nin bilinmeyen yığın ortalaması olduğundan $\overline{X}$ ile tahmin edilir ve bu durumda tahmini odds şöyle ifade edilir.

$$\text{O\hat{D}DS}=\exp\left[-\frac{n}{2}(\mu_0-\overline{X})'\sigma^{-1}(\mu_0-\overline{X})\right]=\exp\left[\frac{1}{2}T^2(\overline{X})\right] \tag{18}$$

Eşitlik (21) deki ifade bize K noktasının yorumunu verir. Yani $\exp(1/2K)$ herhangi bir kontrol dışı sinyal alınmadan $\exp(1/2T^2)$ değeri tarafından aşılması gereken odds değeridir. Yalnız artık T^2 değerinin de log ölçekli alınması gerektiği unutulmamalıdır. Şimdi sorun T^2 Tablosu üzerinde gözlemlenen belli bir $\overline{X}^*$ "kontrol dışı" sinyal durumunda, yani $T^2(\overline{X}^*)>K$ ise, p değişkenden hangisinin veya hangi p_1 alt grubunun ($p=p_1+p_2$) bu sinyale sebep olduğunun bilinmesidir. Etkin bir yaklaşım, $\overline{X}^*$ ı $\overline{X}^*=(\overline{X}^{*(1)}, \overline{X}^{*(2)})$ olacak şekilde ayrıştırmaktır. Burada $\overline{X}^{*(1)}$ sinyale sebep olduğundan şüphelenilen p değişkenin p_1 alt grubunu, $\overline{X}^{*(2)}$ ise geriye kalan p_2 alt grup değişkenleri göstermektedir.

Kare uzunluğunun bütünü T_p^2 olmak üzere

$$T_{p1}^2=T^2(\overline{X}^*)=n(\mu_0-\overline{X}^*)'\sigma^{-1}(\mu_0-\overline{X}^*) \tag{19}$$

olarak ifade edilebilir. T_p^2, p_1 alt grubuna karşılık gelen indirgenmiş uzaklık ise bu durumda

$$T_{p1}^2=T^2(\overline{X}^{*(1)})=n(\mu_0^{(1)}-\overline{X}^{*(1)})'\sigma^{-1}(\mu_0^{(1)}-\overline{X}^{*(1)}) \tag{20}$$

biçiminde yazılır.

μ_0 ve σ da $\overline{X}^*$ gibi ayrıştırılırlar.

$$D=T_p^2-T_{p1}^2$$

fark ifadesinde eğer D büyükse p_1 alt grubunun sinyale sebep olduğu hipotezi ret edilmekte, küçükse kabul edilmektedir. Buradaki yaklaşım diskriminant analizi ve regresyon analizindeki değişken seçme işlemine benzemektedir. A ve B yığınları arasındaki gerçek kare uzaklık

$$\Delta_p^2 = n(\mu - \mu_0)'\sigma^{-1}(\mu - \mu_0) \tag{21}$$

indirgenmiş uzaklık ise

$$\Delta_{p1}^2 = n(\mu^{(1)} - \mu_0^{(1)})'\sigma^{-1}(\mu^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \tag{22}$$

olur. Bu durumda H_0: $\Delta_p - \Delta_{p1} = 0$, hipotezi, p_1 alt grubu, p değişken setinden diskrimine etmeyi test eder. Bu durumda yine

$$D = T_p^2 - T_{p1}^2 \tag{23}$$

farkı test istatistiği olarak kullanılır. H_0 hipotezi doğru iken D istatistiği χ_{p2}^2 dağılımına sahip olur.

6. HAWKİNS YAKLAŞIMI

Hawkins (1991) çalışmasında yine T^2 istatistiğine dayalı klasik çokdeğişkenli testin bilinen eksikliğine işaret ederek süreç parametresindeki kaymanın ilişkili çok değişkenli durumlarda hangi değişkenlerden kaynaklandığına ilişkin soruna cevap aramaktadır. Bu amaçla geliştirdiği yöntem her bir değişkenin diğer tüm değişkenlerle regresyonundan elde edilen standartlaştırılmış artıklar Z lere dayalı Shewhart ve CUSUM grafikleri önermektedir. Z nin her bir bileşeni karşılık gelen değişkenin ortalamasında kayma olup olmadığını gösterir. Z aynı zamanda kaymanın ortalama ya da varyans parametrelerinin hangisinde olduğu konusunda bilgi verici bir fonksiyona sahiptir.

Hawkins yöntemini açıklamak için şu notasyonları tanımlamaktadır. σ_{ij} ve σ^{ij} sırasıyla σ_0 ve σ_0^{-1}nın i nci ve j inci elemanları olmak üzere $(X_i - \mu_i) = \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(X_j - \mu_j) + \varepsilon_i$ X in i nci bileşeninin tüm diğer değişkenler üzerindeki regresyonunu tanımlamaktadır. τ_{ii} ise artıkların varyansı olmak üzere $\tau_{ii} = \sigma_{ii} - \sum_{j \neq i} \beta_{ii}\sigma_{ii}$ yazılabilir (bknz. Weisberg, 1985, s.44). Raveh (1985) den aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sigma^{ii} &= \tau_{ii}^{-1} \\ \sigma^{ij} &= -\beta_{ij} / \tau_{ii} \qquad (i \neq j) \end{aligned} \tag{24}$$

Kontrol dışı durumun, μ vektörü bileşenlerinden sadece bir tanesinde kayma olarak meydana geldiği varsayılsın. Bu durumda prosesin dağılımı farklılaşacaktır. Böylece $\mu = \mu_0$ hipotezi için olabilirlik oranı test istatistiği şu şekilde yazılabilir.

$$Z=\left[(X_i-\mu_i)-\sum_{j\neq i}\beta_{ij}(X_j-\mu_j)\right]/\sqrt{\tau_{ii}} \qquad (25)$$

Standartlaştırılmış Z_i artık değerleri N(0,1) dağılımına sahiptir. Standartlaştırılmış artıklar elde etmenin daha kolay bir yolu şöyle tanımlanmaktadır.

$$Y=\sigma_0^{-1}(X-\mu_0) \qquad (26)$$

(26) ncı eşitlikten Y nin i nci bileşeninin, i.nci değişkenin diğerlerine regresyonunundan elde edilmiş artıkların, τ_{ii}^{-1} faktörüyle standartlaştırılmış değeri olduğu kolaylıkla görülebilir. Proses kontrol altında iken, Y nin dağılımı N $(0,\sigma_0^{-1})$ dir.

Burada Z, Y nin sadece standartlaştırılmış değerlerini ifade etmektedir.

$$Z=\left[\mathrm{diag}\left(\sigma_0^{-1}\right)\right]^{-1/2} \qquad Y = A(X-\mu_0)$$

Bu denklemdeki dönüşüm matrisi A ise şöyle tanımlanır.

$$A=\left[\mathrm{diag}\left(\sigma_0^{-1}\right)\right]^{-1/2}\sigma_0^{-1} \qquad (27)$$

Şimdi Z nin dağılımı Z ~ N (0, B) olmaktadır. Burada B ise şu biçimde ifade edilmektedir.

$$B=\left[\mathrm{diag}\left(\sigma_0^{-1}\right)\right]^{-1/2}\sigma_0^{-1}\left[\mathrm{diag}\left(\sigma_0^{-1}\right)\right]^{-1/2} \qquad (28)$$

Hawkins veri matrisinin Moore-Penrose tersiyle yakın ilişkisinden dolayı, bu yaklaşımı Moore-Penrose yaklaşımı olarak adlandırmaktadır. Hawkins, ve Bradu (1990) çalışmasında, genel bir veri matrisinin Moore-Penrose tersinin bazı yararlı özelliklerini vermiştir. Burada hemen gerekli olacak bir özellik X, Z ve T^2 arasındaki ilişkidir.

$$\begin{aligned}T^2&=(X-\mu_0)'\sigma_0^{-1}(X-\mu_0)\\&=\sum_{i=1}^{p}(X_i-\mu_i)Y_i\end{aligned}$$

Eğer T^2, Z cinsinden yazılacak olursa

$$T^2=\sum_{i=1}^{p}W_i \quad , \quad W_i=(X_i-\mu_i)Z_i\sqrt{\tau_{ii}} \qquad (29)$$

sonucuna ulaşılır. T^2 burada kontrol için Z nin kullanıldığı durumlarda yan ürün olarak ortaya çıkmıştır. Bu ilişki T^2 nin p değişken için tanımlı W_i terimlerine parçalanmasını sağlamaktadır.

Ortalama vektöründe bir kayma sözkonusu olduğunda, genellikle X in hangi bileşeninin bu kaymaya sebep olduğu şeklindeki tipik problem ortaya çıktığından, bu istatistiğin tüm i değişkenleri için hesaplanması gerekir. Böylece, kontrol işlemi için p değişkeninin herbirine ilişkin ayrı ayrı grafiklerinin oluşturulması gerekir.

Bu grafikler iki biçimde kullanılabilir. Birincisi her bir Z_i nin ayrı ayrı gözlemlendiği bireysel grafikler, ikincisi ise p grafikten elde edilen tek bir bileşik ölçüme dayalı grup grafik yaklaşımıdır. Birinci kullanım biçiminde i nci değişkenin kontrol altında olup olmadığını gözlemlemek için sözkonusu değişkene ilişkin bireysel grafik tanımlanır ve diğer değişkenler veri iken bu değişkenin kontrol altındaki koşullu dağılımını test eder. Dağılım parametrelerinin CUSUM kontrolu aşağıda verilen tanımlara dayalı olarak gerçekleşir.

$$\begin{aligned}
&L^+_{i0} = L^-_{i0} = S^+_{i0} = S^+_{i0} = 0\\
&W_{ni} = (|Z_{ni}|^{1/2} - .822)/.349\\
&L^+_{in} = \max(0, L^+_{i,n-1} + Z_{ni} - k)\\
&L^+_{in} = \min(0, L^-_{i,n-1} + Z_{ni} + k)\\
&S^+_{in} = \max(0, S^+_{i,n-1} + W_{ni} - k)\\
&S^-_{in} = \min(0, S^-_{i,n-1} + W_{ni} + k)
\end{aligned} \tag{30}$$

dağılımın ortalama parametresi için karar aralığı olarak CUSUM um yukarıya ve aşağıya doğru kaymaları için karar aralığı sırasıyla L^+ ve L^- kullanılır. Benzer şekilde dağılımın varyansıyla ilgili karar aralığı için ise S^+ ve S^- kullanılır. Hawkins ve Wixley (1986) $Z \sim (0,1)$ ise $|Z|^{1/2}$ nin $N(.822, .349^2)$ dağılımına yakınsadığını göstermişlerdir. Buradaki dört CUSUM grafiğini de ortak bir grafikte çizerek dağılım ortalama ve varyans değerleri test edilir.

T^2 yerine Z istatistiğini kullanarak her bir Z_i için bireysel grafikler çizmek yerine, bazı uygulamalar için bir grup yaklaşımı Hawkins tarafından ikinci bir yöntem olarak önerilmiştir. Bu yaklaşımda p tane grafiğin oluşturduğu grubun bir bütün olarak kontrol durumunu incelemek için ölçümler seti bir tek indekse dönüştürülür. Grup teşhisi için iki gösterge kullanılır. Bunlar

$$MCZ = \max\{\max(L^+_{ni}, -L^-_{ni})\}$$

$$ZNO = \sum_{i=1}^{p} (L^+_{ni} + L^-_{ni})^2$$

Bu göstergeler L'ye uygulandığında, CUSUM ortalama için, S'ye uygulandığında ise varyans için grup kontrolünü sağlar. İkinci durumda L^+ ve L^- yerine sırasıyla S^+ ve S^- yazılır.

7. MASON, TRACY VE YOUNG'IN YAKLAŞIMI

Mason ve arkadaşları (1995), yine çok değişkenli kalite kontrolünde kontrol dışı duruma sebep olan sinyale hangi değişkenin sebep olduğu probleminin zorluğuna değinerek, bunun çözümüne ilişkin, T^2 istatistiğinin bağımsız parçalara ayrılmasına yönelik bir yöntem önermişlerdir. Bu ayrıştırma ile sinyalin oluşmasına katkıda bulunan değişkenin tesbitine yönelmişlerdir.

X_i^{p-1} p nci değişken hariç (p-1) boyutlu vektörü göstermek üzere $X_i = (X_i^{(p-1)'}, X_{ip})'$ olacak biçimde, p-1 değişkeni bir grupta, p nci değişkeni ise ayrı alındığında T^2 Rencher (1993) e dayanarak aşağıdaki gibi iki parça halinde ifade edilmektedir.

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p.1,\ldots,p-1}^2 \qquad (31)$$

T_{p-1}^2, ilk p–1 değişkeni kullanılarak elde edilen T^2 istatistiğidir. Açık bir şekilde

$$T_{p-1}^2 = (X_i^{(p-1)} - \overline{X}^{(p-1)})' S_{XX}^{-1} (X_i^{(p-1)} - \overline{X}^{(p-1)})$$

formuna sahiptir.

Burada, $\overline{X}^{(p-1)}$, ilk p–1 değişken için n gözlemli ortalamalar vektörünü ve S_{xx} , (p–1)(p–1) boyutlu S in temel alt matrisini göstermektedir.

$T_{p.1,\ldots,p-1}$ istatistiği, X_1, X_2, ... X_{p-1} verilmiş iken X_p nin koşullu dağılımının ortalama ve standart sapmalarıyla düzeltilmiş X_i vektörünün p inci bileşenidir. Yani,

$$T_{p.1,\ldots,p-1} = \frac{X_{ip} - \overline{X}_{p.1,\ldots,p-1}}{s_{p.1,\ldots,p-1}} \qquad (32)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\overline{X}_{p.1,\ldots,p-1} = \overline{X}_p + b_p' \left(X_i^{(p-1)} - \overline{X}^{(p-1)}\right)$$

$\overline{X}_p$, p inci değişken örnek ortalaması, $b_p = S_{XX}^{-1} s_{xX}$ ise p inci değişkenin p-1 değişken üzerine regresyon katsayılarının (p-1) boyutlu tahmin vektörüdür ve

$$s_{p.1,\ldots,p-1}^2 = s_x^2 - s_{xX}' S_{XX}^{-1} s_{xX}$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} S_{XX} & s_{xX} \\ s_{xX}' & s_x^2 \end{bmatrix}$$

tanımlarına sahiptir. Eşitlik (31) de birinci terim p-1 değişken üzerinden Hotelling'in T^2 si, olduğundan, bu parçayı iki ayrı parçaya daha ayrıştırabilmek mümkündür.

$$T_{p-1}^2 = T_{p-2}^2 + T_{p-1.1,\ldots,p-2}^2$$

Birinci terim T_{p-2}^2, ilk p-2 değişken üzerinden Hotelling'in T^2 si, ikinci terim $T_{p-1.1,\ldots,p-2}^2$ ise X_1, X_2, ... X_{p-2} verilmiş iken X_{p-1} in koşullu dağılımının ortalama ve standart sapmasıyla düzeltilen (p-1) nci değişkenin karesidir. Bu ayrıştırmaya benzer şekilde devam ederek, p değişken için T^2 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} T^2 &= T_1^2 + T_{2.1}^2 + T_{3.1.2}^2 + T_{4.1.2.3}^2 + \ldots + T_{p.1,\ldots,p-1}^2 \\ &= T_1^2 + \sum_{j=1}^{p-1} T_{j+1.1\ldots j}^2 \end{aligned}$$

T^2'nin bu son yazılımında T_1^2, birinci değişken için Hotelling'in T^2 sidir. Bu, ilk değişken için tek değişken t istatistiğinin karesidir. Yani

$$T_1^2 = \frac{\left(X_{i1} - \overline{X}_1\right)^2}{s_1^2} \tag{33}$$

dır. Eşitlik (32) deki ayrıştırmanın ilginç bazı özellikleri şu şekilde verilmektedir. Parçalanmış koşullu terimlerin sıralanması sadece bir tane değildir. p! farklı parçalanmaların hepsi de aynı T^2 istatistiğini verecektir. Örneğin p = 3 için 3! = 6 farklı ayrıştırma şöyle olur.

$$\begin{aligned} T^2 &= T_1^2 + T_{2.1}^2 + T_{3.1.2}^2 \\ T^2 &= T_1^2 + T_{3.1}^2 + T_{2.1.3}^2 \\ T^2 &= T_2^2 + T_{3.2}^2 + T_{1.2.3}^2 \\ T^2 &= T_2^2 + T_{1.2}^2 + T_{3.1.2}^2 \\ T^2 &= T_3^2 + T_{1.3}^2 + T_{2.1.3}^2 \\ T^2 &= T_3^2 + T_{2.3}^2 + T_{1.2.3}^2 \end{aligned} \tag{34}$$

Eşitlik (34) deki p tane terimin her birinin karesi alındığından, hepsi de pozitif olacaktır. Böylece, parçaların herbiri T^2 nin değerini yükseltir. Dolayısıyla, T^2 istatistiği kontrol dışı bir sinyal verdiğinde, T^2 değerindeki en büyük artışın hangi parça ya da parçalardan ileri geldiği gözlemlenecek, böylece kontrol dışı duruma sebep olan değişken (değişkenler) belirlenebilecektir.

Daha sonra, Mason ve arkadaşları'nın yaklaşımında, Eşitlik (35) de verilen T^2 ayrıştırmasının sağladığı bilgiden hareketle sinyallerin nasıl yorumlanması gerektiği hakkında oluşan soruya yönelinmektedir.

Belli bir ayrıştırmadaki p değişkenin hepsi de birbirinden bağımsız olduğu halde, p! ayrıştırmadaki terimlerin hepsi birbirinden bağımsız değildir. Ayrıca, her bir parça $[(n+1)/n]^{1/2}$ sabiti ile çarpıldığında, (n-1) sd ile F dağılımına sahiptir. Yeni dağılım,

$$T^2_{j+1.1,\dots,j} \sim \frac{n+1}{n} F(1, n-1) \qquad (35)$$

olur. Böylece Eşitlik (35) deki herbir terim F tablo değerinin $\sqrt{(n+1)/n)}$ sabitiyle çarpım değeriyle karşılaştırılabilir ve böylece anlamlılığı test edilmiş olur. Bu mekanizma hangi parçanın sinyale sebep olduğuna karar vermede yardımcı olur.

8. MTC YAKLAŞIMININ BİR UYGULAMASI

Bu bölümde, Mason, Tracy ve Young'ın (1995) yaklaşımının bir uygulaması yapılmaktadır. Bu amaçla, Tracy, Young ve Mason (1995) un diğer bir çalışmalarında kullandıkları ve Tablo 1 de verilen, bir petrokimya endüstrisinden elde edilen iki değişkenin örnek değerleri kullanılacaktır.

Tablo 1. Petrokimya endüstrisine ilişkin veriler

Gözlem	X_1	X_2	Gözlem	X_1	X_2	Gözlem	X_1	X_2
1	7,15	7,10	8	6,95	7,00	14	7,40	7,10
2	6,35	7,00	9	7,05	7,00	15	7,50	7,40
3	6,30	6,95	10	7,10	7,00	16	7,60	6,70
4	7,00	7,35	11	7,25	7,30	17	8,20	7,00
5	7,00	6,90	12	7,60	7,30	18	8,10	7,90
6	6,95	7,05	13	7,65	7,10	19	6,00	6,33
7	7,05	7,15						

Örnek korelasyon katsayısı, örnek varyans-kovaryans matrisi S ve ortalamalar vektörü aşağıdaki gibidir.

$$r = 0.579\ (p{=}0.009), \qquad S = \begin{bmatrix} 0.316 & 0.101 \\ 0.101 & 0.0966 \end{bmatrix} \qquad \overline{X} = \begin{bmatrix} 7.1684 \\ 7.0858 \end{bmatrix}$$

α= 0,05 anlamlılık düzeyinde X_1 ile X_2 arasında anlamlı bir ilişki vardır. Dolayısıyla böyle bir bağımlılık durumunda, bireysel kontrol grafikleri ile kontrol dışı sinyalin tespitine yönelmek, daha önceki bölümlerde uzunca tartışılan bilinen problemlere yol açmaktadır. İki kalite değişkeninin sözkonusu olduğu bu üretim prosesinde, çok değişkenli kalite kontrol yöntemleriyle yaklaşmak, kontrol dışı sinyalin belirlenmesini ve dahası, bu kontrol dışı duruma hangi değişkenin sebep olduğunun tesbitini mümkün kılacaktır. Yukarıdaki verilere dayalı olarak hesaplanan Hotelling'in T^2 leri Tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 2. Petrokimya endüstrisi verilerine ilişkin T^2 değerleri.

Gözlem	T^2	Gözlem	T^2	Gözlem	T^2
1	0.0073409374	8	0.15492641346	14	0.22538847746
2	2,5999713174	9	0,08012192946	15	1,02202646946
3	2,6989288134	10	0,07836643746	16	4,85439754146
4	1,6622213934	11	0,57128743746	17	6,05216411346
5	0,3605514294	12	0,67990649346	18	6,89333202546
6	0,1689259094	13	1,03754851746	19	6,59328509506
7	0,2062569174				

T^2 istatistiği $\dfrac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} * F_{p,\, n-p,\, \alpha}$

dağılımına sahip olduğundan, kontrol sınırı $\alpha = 0.10$ için

$\dfrac{2.20.18}{19.17} 2.64 = 5.88$ olur.

17, 18 ve 19 uncu gözlemlere karşılık gelen T^2 değerleri 5.88 den büyük olduğundan süreç bu noktalarda kontrol dışına çıktı biçiminde yorumlanır.

Burada asıl sorun bu kontrol dışı duruma hangi değişkenin sebep olduğudur. Şimdi uygulama bakımından bir kolaylık görülen Mason, Tracy ve Young'ın yaklaşımını uygulayarak kontrol dışı sinyalin nedeni araştırılacaktır. Bu araştırma sadece 17 nci gözlem için yapılacaktır. Diğer gözlemler için de benzer işlemler takip edilir.

17 inci gözlem seti X = (8.20, 7.00) $T^2 = 6.052$ değerine sahiptir. Dolayısıyla T^2 > ÜKL = 5.88 dir. Bu gözlem seti kontrol sınırlarının dışına çıkmıştır. p=2 olduğundan T^2 nin 2!=4 mümkün ayrıştırması sözkonusudur. Bunlar $T_1^2, T_2^2, T_{1.2}^2, T_{2.1}^2$ dir. Dolayısıyla T^2 istatistiği
$T^2 = T_1^2 + T_{2.1}^2$ veya $T^2 = T_2^2 + T_{1.2}^2$ biçimlerinde yazılabilir. Burada biz T^2 yi birinci biçimde ayrıştıracağız. Birinci bileşen

$$T_1^2 = \frac{\left(X_{i1} - \overline{X}_1\right)^2}{S_1^2} = \frac{(8.2 - 7.1684)^2}{0.316} = 3.367 \text{ olarak hesaplanır.}$$

$T_{2.1}^2$ nin hesaplanabilmesi için öncelikle $\overline{X}_{2.1}^{p-1}$ ve $S_{2.1}^2$ in hesaplanmalıdır.

$$\overline{X}_{2.1}^{(p-1)} = \overline{X}_2 + b_2'\left(X_i^{(p-1)} - \overline{X}^{(p-1)}\right) \qquad b_2' = S_{XX}^{-1} s_{xX} \qquad S = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{xX} \\ s_{xX}' & s_x^2 \end{bmatrix}$$

Buradan, b'_2 = $(0.316)^{-1}$* 0.101 = 0.319 ve $\overline{X}^{1}_{2.1}$ = 7.0858 + 0.319(8.20 - 7.1684) = 7.414 olarak bulunur. Şimdi $S^2_{p.1,...,p-1} = S^2_x - S'_{xX}S^{-1}_{XX}S_{xX}$ yazılırsa $S^2_{2.1}$ = 0.0966 – $(0.101*(0.316)^{-1}(0.101)$ = 0.0643 olarak hesaplanır. İkinci bileşen ise,

$$T^2_{2.1} = \frac{X_{i2} - \overline{X}_{2.1}}{S^2_{2.1}} = \frac{(7 - 7.414)^2}{0.0643} = 2.665 \text{ olarak bulunur.}$$

$T^2 = T^2_1 + T^2_{2.1} = 3.367 + 2.665 = 6.033$ olarak yaklaşık T^2 değeri elde edilir. Görülmektedir ki, T^2 ayrışımında, bu T^2'ye en fazla katkıda bulunan T^2_1 değeridir. Diğer koşullu T^2 değeri daha küçük katkıda bulunmaktadır. Bunların her biri düzeltilmiş F dağılımına sahip olmaktadır. Katkılarının anlamlı olup olmadığına bakmak için teorik F değeri ile karşılaştırılır. Bu F değeri $\frac{n+1}{n} * F_{(1,n-1)} = \frac{20}{19} * F_{0.95,1,18} = 3.166$ olur.

T^2_1 =3.367>3.166 olduğundan anlamlı katkıda bulunmaktadır. Bununla birlikte, $T^2_{2.1}$ =2.665<3.166 olduğundan anlamlı katkıda bulunmamaktadır. Dolayısıyla Hotelling'in T^2'sinin oluşmasında en büyük katkı X_1 değişkeninin koşulsuz katkısından ileri gelmektedir. Diğer koşullu T^2 ise anlamlı katkıda bulunmamaktadır.

Koşulsuz T^2_2'yi de hesaplayacak olursak, $T^2_2 = \frac{(7 - 7.0858)^2}{0.0966} = 0.0762$ elde edilir. Buradan da görüleceği üzere X_2 değişkeni koşulsuz olarak T^2 ye çok az katkıda bulunduğundan, sonuçlar 17 nci gözlemdeki kontrol dışı durumun esas itibariyle X_1 değişkenindeki anlamlı kaymadan oluştuğunu desteklemektedir.

9. SONUÇ

Bir çok endüstride prosesin kalitesini tanımlayan en azından bir kısmı birbiri ile ilişkili birden çok değişken bulunmaktadır. Bu değişkenleri takip etmenin genel yöntemi p değişkenin çok değişkenli dağılımını gözardı etmek ve her bir değişken için ayrı ayrı grafikler oluşturmaktır. Bu yaklaşım doğru olmayan kontrol (olasılık) sınırlarına yol açmaktadır.

Bu problem nedeniyle literatürde çok değişkenli kalite kontrol bir çok araştırmacının ilgi alanını oluşturmuştur. Bu konudaki çalışmalar Hotelling T^2 sine kadar dayanmaktadır. Bu yaklaşım süreç ortalamalarındaki genel bir kaymayı teşhis edebilen bir testdir. Fakat önemli bir eksikliği böyle bir kontrol dışı durumun hangi değişkenden kaynaklandığını tesbit etmeye yeterli olmamasıdır.

Jackson (1959) problem olan değişkeni tesbit etmek için önemli bileşenler analizini kullanan bir yöntem önermiştir. Bu yöntem T^2 istatistiğini orijinal değişkenlerin doğrusal kombinasyonları olan bağımsız kare önemli bileşenler toplamına ayrıştırır . sürecin istatistiksel olarak niçin kontrol dışı olduğunu incelemek için bu önemli bileşenler kullanılmaktadır. Uygulamada önemli bileşenlerin direkt olarak fiziksel yorumunun eksikliği bu yaklaşımın etkinliğini azaltmaktadır.

Schall ve Chandra (1987) nın geliştirdiği yöntem ise yine kontrol dışı duruma neden olan değişken ya da değişken grubunu tesbit etmeye yöneliktir ve yöntemin esası önemli bileşenler ve regresyon analizine dayanmaktadır.

Bu yaklaşımla Jackson (1959) daki önemli bileşenlerin yorum zorluğu problemi aşılmaktadır.Bu yöntemle de yine süreç ortalamasındaki dağılımın farklılaşması teşhis edilmektedir.

Yalnızca süreç ortalamasındaki bir kaymayı ve kaymaya neden olan değişkeni tesbit etmeye ilişkin ilginç bir başka yöntem ise Murphy (1987) tarafından diskiriminant analizine dayalı olarak geliştirilen yaklaşımdır. Bu yöntemde kalite karakteristikleri iki alt gruba ayrıştırılmaktadır. Bu alt gruplardan birisi sezgisel olarak doğrudan kontrol dışı sinyalin nedeniyle ilişkili olmalıdır. Bu yöntemin bir dezavantajı çok sayıdaki değişken durumunda mümkün kombinasyonalrın sayısının çok fazlalaşmasıdır.

Hawkins'in (1991) yönteminde regresyon analizlerinden elde edilen standartlaştırılmış artıklardan hareketle Shewhart ve CUSUM grafikleri önerilmektedir. Standartlaştırılmış artıklar ortalama vektöründeki kaymaya neden olan değişkeni tesbit etmekte kullanıldığı gibi kaymanın ortalama ya da varyans parametrelerinin hangisinden kaynaklandığını da gözlemlemeye elvermektedir.

Mason, Tracy ve Young (1995) tarafından geliştirilen çok değişkenli kalite kontrol yaklaşımında T^2 herbiri kontrol dışı sinyale anlamlı bir biçimde katkıda bulunan değişkenler hakkında bilgi veren p tane bağımsız bileşene ayrıştırılmaktadır. Değişken sayısının çok olduğu durumlarda mümkün ayrıştırmaların sayısı da oldukça fazlalaşmaktadır. Ancak uygun bir hesaplama yöntemiyle bu sayı önemli ölçüde azaltılabilinir.

Tüm çok değişkenli istatistiksel proses kontrol yöntemleri ister biliniyor ister geçmiş verilerden tahmin ediliyor olsun kovaryans yapısına dayanır. Genel olarak tekil olmayan örnek kovaryans matrisini sağlamak için tahminde gözlem sayısının değişken sayısından büyük olması tercih edilir. Bununla beraber tekillik probleminin çözümü için bu koşul önemli bileşenler analizini kullanmak yoluyla boyut indirgeyerek gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

HAWKİNS D. M. , (1991), *Multivariate quality control based on regression-adjusted variables*, Technometrics, 33, 61-75.

HAWKİNS D. M. ve BRADU (1990), *Application of the Moore-Penrose invers of a data matrix in multiple regression*, Linear Algebra and its applications, 127, 403-426.

HAWKİNS D. M. and WİXLEY R.A.J. (1986), *A note on the transformation of Chi-squared variables to normality*, The American Statistician, 40, 296-298

HOTELLİNG H. , (1947), *Multivariate Quality Control, Techniques of Statistical Analysis*, (Ed. C. Eisenhart, M.W. Hastay, and W.A. Wallis, McGraw-Hill, New York, s. 84-111.

JACKSON J. E. , (1959), *Quality control methods for several related variables*, Technometrics, 1, 359-377.

MASON R. L., TRACY N. D. and YOUNG J. C. , (1995), *Decomposition of* T^2 *For multivariate control chart interpretation*, Journal of Quality Technology, 27, 99-108.

TRACY, N. D., YOUNG J.C., ve MASON R. , (1995), *A bivariate control chart for paired measurements*, Journal of Quality Technology, 27, 4, 370-376.

MONTGOMERY, DOUGLAS C. , (1991), *Introduction to Statistical Quality Control*, 322-332.

MURPY, B. J. , (1987), *Selecting out of control variables with the* T^2 *multivariate quality control procedure*, The Statistican, 36, 571-583.

RAVEH A. , (1985), *On the use of the inverseof the correlation Matrix in multivariate data analysis*, The American Statistician, 39, 39-42

RENCHER A.C. , (1993), *The contribution of individual variables to hotelling* T^2, Wilks' Λ, and R^2. Biometrics, 49, 479-489.

SCHALL, S. and CHANDRA J., (1987), *Multivariate quality control using principal components*, Int. J. of Prod. Res., 25, 571-588.

WEİSBERG, S. , (1985), *Applied Linear Regression (2nd ed.)*. New york, John Wiley.

An Assessment of Multivariate Quality Control Approaches

ABSTRACT

When performing process quality control in a situation in which measures are made of several possibly related variables, it is desirable to use methods giving more powerful control that capitalize on the relations between the variables rather than to use methods of individual control of variables. Although the seperate controls on the individual variables are more easily interpretable the existency of correlation between variables reduces the sensitivity of control.

Initially, Hotelling (1947) proposed a multivariate control chart based on T^2 *under the multivariate normality assumption of random variables. Based on Hotelling's* T^2*, Jackson (1959), Schall and Chandra (1987), Murphy (1987), Hawkins (1991), Mason, Tracy and*

Young (1995) developed some interesting approaches to answer which variable or set of variables cause the signal of out of control.

In this study some of these approaches are presented and an assessment of these are performed. Jackson (1959), Schall ve Chandra (1987), Murphy (1987), Hawkins (1991), Mason, Tracy ve Young (1995).

Key Words: *Multivariate quality control, Hotelling* T^2