

Ardışık Örneklem Planında Cusum Kontrol Kartlarının Kullanımı

Canan HAMURKAROĞLU*

Sevil BACANLI**

ÖZET

Bu çalışmada, normal dağılıma sahip kitlede ortalamamın testi için ardışık örneklem planı ve plana bağlı olarak geliştirilen klasik cusum kontrol kartlarının yapısı ve yorumu açıklanmıştır. Ayrıca son yıllarda kalite ve güvenilirlik mühendisliğinde, özellikle hızlandırılmış yaşam testlerinde (accelerated life testing) kullanılan ters-normal dağılım için ardışık örneklem planı ve buna ilişkin klasik cusum kartlarının düzeltilmiş biçimi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Ardışık Örneklem Planı, Ters-Normal Dağılım, CUSUM Kontrol Kartları.*

1. GİRİŞ

Günümüzün üstün rekabet koşullarında, müşteriye tatmin edecek ürün ve hizmetlerin en ekonomik, en kaliteli, en hızlı aynı zamanda bir pazara sahip olacak biçimde üretilmesini sağlamak her zamankinden daha fazla önem kazanmıştır. Kalite olgusu ve rekabet koşulları içindeki işletmelerin güçlerini artırmak için kalite yönetim uygulamalarında istatistik prensip ve yöntemlerin kullanılmasının önemi de artmıştır. Kalite kontrol uygulamalarında, olasılık oranlarının ardışık testi (OOAT-sequential probability ratio test) oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. OOAT, zaman ve para bakımından tasarruf sağlamak ve çözümlene için sabit örneklem genişlikli testlere nazaran daha az örneklem genişliğine gereksinim duymaktadır. Ayrıca OOAT'de H_0 hipotezinin kabul ya da reddedilmesi kararlarından birine ulaşma olasılığı 1'dir.

Dolayısıyla testin sonuçlandırılması kesindir (Bacanlı, 1988). Ardışık çözümlene ilk olarak 1929 yılında H.F. Dodge ve H.G. Raming tarafından üretime ilişkin kalite kontrolde uygulanan çift katlı örneklem planlarıyla birlikte ortaya atılmıştır. Ardışık çözümlenmeye ilişkin ilk kuramsal çalışmalar, 1943' de A. Wald ve G.A. Barnard tarafından yapılmıştır (Çingir, 1980). Öte yandan, OOAT kavramına dayalı olarak geliştirilen Kümülatif Toplam (CUSUM) Kontrol Kartları istatistiksel süreç kontrolde süreçteki küçük değişimlere oldukça etkili olmaları bakımından yaygın olarak kullanılan kartlardır. CUSUM kartları ilk kez Page (1954) tarafından ileri sürülmüştür.

Daha sonra G.A. Barnard, P.L.Goldsmith, H. Whilfield, W.D. Ewan tarafından geliştirilmiş ve en son halini N.L. Johnson ve F.C. Leone (1962) ile almıştır. CUSUM

* Yrd.Doç.Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, e-posta: caca@hacettepe.edu.tr. (Haberleşme adresi)

**Yrd.Doç.Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, e-posta: sevil@hacettepe.edu.tr.

kartlarının süreçteki $0.5\sigma_x$ ile $1.5\sigma_x$ arasındaki değişimleri ortaya çıkarmaları ve verilerden elde edilen tüm bilgilerin kullanılması kartların avantajıdır.

Bu çalışmada normal dağılım varsayımı altında OOAT' ye dayalı klasik cusum kartları kısaca verildikten sonra kalite ve endüstri mühendisliği uygulamalarında önemli bir rol oynayan Ters- Normal dağılım için ortalamanın OOAT' si açıklanacak ve buna ilişkin düzeltilmiş CUSUM kartlarının yapısı oluşturulacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Ardışık Örnekleme Planı

Ardışık Örnekleme Planı Wald (1947)'in OOAT'sine dayanır. Dağılımı bilinen bir kitlenin parametresine ilişkin kurulan basit hipotezin olabilirlik oranı $A = (1 - \beta)/\alpha$ $B = \beta/(1 - \alpha)$ ($\alpha=1.$ tip hata olasılığı, $\beta=2.$ tip hata olasılığı) değişmezlerine bağlı olarak test edilmesine OOAT denir.

Birimlerin ardışık olarak alındığı testin her aşamasında aşağıda verilen üç karardan birine ulaşılır:

1. H_0 hipotezinin kabul edilmesi,
2. H_0 hipotezinin red edilmesi,
3. Gözlemlerin yetersizliği kararı.

Eğer ilk iki karardan birine ulaşılmış ise süreç sona erer. Ancak 3. karara ulaşılmış ise bir birim daha eklenerek sürece devam edilir.

X , ortalaması μ , varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip raslantı değişkeni olsun. Dağılımın ortalaması test edilmek istendiğinde hipotez,

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= \mu_0 \\ H_1 : \mu &= \mu_1 \end{aligned} \quad (\mu_1 > \mu_0) \quad (1)$$

biçiminde kurulabilir.

(X_1, \dots, X_t) $t=1, 2, \dots$ örnekleminin olasılık yoğunluk fonksiyonu H_0 hipotezi için,

$$p_{0t} = \frac{1}{(2\pi)^{t/2} \sigma^t} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^t (x_i - \mu_0)^2}$$

H_1 hipotezi için,

$$P_{1t} = \frac{1}{(2\pi)^{t/2} \sigma^t} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_1)^2}$$

biçimindedir.

Testin her aşamasında olabilirlik oranı,

$$L = \frac{P_{1t}}{P_{0t}} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_0)^2}} \quad (2)$$

biçiminde hesaplanır. Ancak işlemlerde kolaylık sağlaması açısından (2)'nin logaritması alınarak $\ln A$ ve $\ln B$ değerleriyle aşağıda belirtildiği gibi karşılaştırılır (Wald, 1947).

$$1. \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t X_i + \frac{t}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) \leq \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \text{ ise } H_0 \text{ kabul,} \quad (3)$$

$$2. \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t X_i + \frac{t}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) \geq \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \text{ ise } H_0 \text{ red,} \quad (4)$$

$$3. \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} < \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^t X_i + \frac{t}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) < \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (5)$$

ise bir birim daha eklenerek sürece devam edilir.

(3), (4), (5) ile verilen eşitsizlikler $\sum_{i=1}^t X_i$ 'ye göre düzenlendiğinde,

$$\sum_{i=1}^t X_i \leq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + t \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + t \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + t \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} < \sum_{i=1}^t X_i < \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + t \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \quad (8)$$

biçiminde elde edilir. Eşitsizliklerde,

$$Y = \sum_{i=1}^t X_i$$

$$S = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$$

$$h_0 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

olarak tanımlanırsa, yukarıda verilen testin durdurma kuralları:

1. $Y \leq Y_0 = h_0 + tS$ ise H_0 kabul,
2. $Y \geq Y_1 = h_1 + tS$ ise H_0 red,
3. $Y_0 < Y < Y_1$ ise sürece devam,

dolayısıyla Y_0 kabul doğrusu ve Y_1 ise red doğrusu olarak tanımlanabilir. Çeşitli t değerlerine karşılık gelen kabul doğruları $(t, \sum_{i=1}^t X_i)$ düzleminde iki paralel doğru oluştururlar. Eğer düzlem üzerinde bir nokta Y_0 'ın üzerine ya da alt bölgesine düşerse H_0 hipotezi kabul, Y_1 üzerine ya da üst bölgesine düşerse H_0 hipotezi reddilerek sürece son verilir. Nokta iki doğru arasında ise bir gözlem daha eklenerek sürece devam edilir (Wald, 1947). Şekil (1).b'de hem $\mu_1 > \mu_0$ hem de $\mu_1 < \mu_0$ için iki yanlı ardışık örnekleme planı verilmiştir.

2.2. Klasik CUSUM Kartları

Son yıllarda Shewart kontrol kartlarının yerine, CUSUM kartları yaygın olarak kullanılmaktadır. CUSUM kontrol kart uygulamalarında örneklem noktaları bir kümülatif istatistik olduğundan daha etkindir. Tüm CUSUM kartları ardışık olabilirlik oranına dayalıdır ve eşitlik (1)'de verildiği gibi iki kalite düzeyi arasındaki hipotezin testi için geliştirilmiş kartlardır. Bireysel ölçümlere (individual measurements) uygulandığı gibi örneklem ortalaması, örneklem genişliği, örneklem varyansı gibi örneklem istatistikleri için de CUSUM kartlarını oluşturmak mümkündür. Ayrıca nitelik belirten değişkenler (attribute variables) için CUSUM kontrol kartları kullanılmaktadır. Amaçlarına göre tek yanlı ya da iki yanlı CUSUM planları olarak ayrılırlar (Baskan, 1997). Tek yanlı kontrol planları kullanılarak süreç parametresinden alt ya da üst kontrol sınırına doğru olan sapmalar; iki yanlı kontrol planları kullanılarak ise önceden belirlenen bir hedef ya da standart değerden her iki kontrol sınırına olan sapmalar ortaya çıkarılmak ya da izlenmek istenir.

Klasik CUSUM kartının ardışık olabilirlik oranına ilişkin H_0 ve H_1 hipotezleri (1) eşitliğindeki gibi düşünülebilir. (1) eşitliği ile verilen hipotez ile süreç ortalamasından yukarı sapmalar ortaya çıkarılmak ya da izlenmek istenilir, başka bir deyişle μ_1 , üst spesifikasyon sınırı olarak alınır. μ_0 sürecin hedef ortalama değeri, 1. tip hata olasılığı (α) ve 2. tip hata olasılığı (β), sırasıyla üretici ve tüketici riskleri olmak üzere, önceden belirlenmiştir. X_1, \dots, X_t ortalaması bilinmeyen ve σ^2 varyanslı normal bir kitleden alınmış bağımsız örneklem gözlemleri için OOAT'ye dayalı (6), (7) ve (8)

eşitsizliklerinden yararlanılarak tek yanlı CUSUM kontrol kartının yapısı oluşturabilir. Hipotezde belirtilen ortalamalar arası fark $\Delta_1 = \mu_1 - \mu_0$ olmak üzere örneklem sapmalarının kümülatif toplamı;

$$S_t = \sum_{i=1}^t \left\{ X_i - \left(\mu_0 - \frac{\Delta_1}{2} \right) \right\} \quad (9)$$

biçiminde ifade edilirse, S_t iki ortalamanın ortalamasından sapmaların kümülatif toplamıdır.

(9) eşitliği ile verilen S_t için (6), (7) ve (8) eşitsizliklerinden yararlanılarak alt ve üst kabul sınırları;

$$S_t \geq \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (10)$$

$$S_t \leq \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (11)$$

$$\frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} < S_t < \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (12)$$

biçimindedir.

S_t veri kümesi bir karta işaretlenerek incelendiğinde, ardışık örnekleme veri yöntemine göre, S_t ' ler alt kabul sınırının altına düştüğünde H_0 ' in kabulüne, üst kabul sınırını aştığında H_1 ' in kabulüne ve örnekleme durmasına ilişkin bir karara varılır. Dolayısıyla bir CUSUM kartı için alt ve üst kabul sınırları alt ve üst kontrol sınırları (AKL ve ÜKL) olarak alınarak;

$$\begin{aligned} \text{AKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \\ \text{ÜKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \end{aligned} \quad (13)$$

biçiminde bulunur.

(1) eşitliği ile verilen hipotez için yukarı sapmalar dikkate alınmak istendiğinden AKL'nin pek fazla anlamı yoktur (DeVor, Chang, Sutherland, 1992).

Sadece , ortalamadan aşağı sapmalar izlenmek istendiğinde ($\mu_1 < \mu_0$ için) S_t ' ye ilişkin kabul sınırları benzer biçimde bulunarak CUSUM kontrol kartının kontrol sınırları;

$$\begin{aligned} \text{AKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \\ \text{ÜKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

olur(DeVor , Chang, Sutherland, 1992).

Bir süreç ortalamasının her iki yönde sapmalarını ortaya çıkarmak ya da izlemek için, tek yanlı cusum kart çiftleri ayrı ayrı kullanılabileceği gibi, bir iki yanlı CUSUM kontrol kartı oluşturmak da mümkündür.

Buna ilişkin hipotezler;

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0) \\ H_2 &: \mu = \mu_2 \quad (\mu_2 < \mu_0) \end{aligned} \quad (15)$$

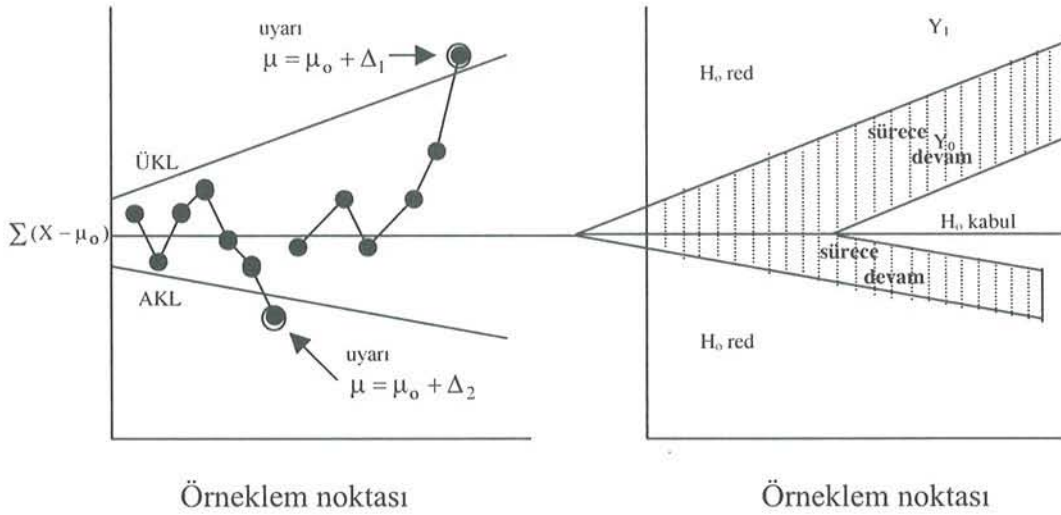
biçimindedir.

(15) eşitliğinde hedef dışı iki ortalama vardır. 1. tip hata olasılığı 2α , 2.tip hata olasılıkları $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ olmak üzere tek yanlı karar kriterlerinin birleştirilmesi ile kümülatif toplam $S_t = \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_0)$ için CUSUM kontrol kartının AKL ve ÜKL'si;

$$\begin{aligned} \text{AKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_2} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + t \left(\frac{\Delta_2}{2} \right) \\ \text{ÜKL} &= \frac{\sigma^2}{\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + t \left(\frac{\Delta_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

olur.Burada $\Delta_2 = \mu_2 - \mu_0$ 'dır(DeVor, Chang, Sutherland, 1992).

İki yanlı CUSUM kartının kontrol sınırları (eşitlik 16) t'nin fonksiyonları olup yatay doğrular biçiminde değil, doğrusal trend eğrileri biçimindedir(şekil 1.a).



a. İki-yanlı CUSUM Kontrol Kartı b. İki-yanlı Ardışık Örnekleme Planı

Şekil 1. Ardışık Olasılık Oranlarına ilişkin İki Yanlı CUSUM Kontrol Kartı ve Ardışık Örnekleme Planı(DeVor, Chang, Sutherland, 1992).

Genelde Δ_1 ortalamadan yukarı sapmayı, Δ_2 ise aşağıya olan sapmayı ifade eder. Yukarı ve aşağı sapmalar aynı büyüklükte ise ($\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$) iki simetrik kol ile oluşturulan bir V-maske, bir CUSUM kartının alt ve üst kontrol limitleri olarak kullanılabilir. V-maske karta en son işaretlenen CUSUM değeri maskenin O merkezi olmak üzere, O merkezinden yatay eksene paralel olan bir d kılavuz uzunluk (lead distance) ve maskenin kolları arasındaki 2θ açısı ile oluşturulur(Duncan,1994). μ_0 ' dan farkların ya da süreç ortalamasından sapmaların olup olmadığına karar vermek için CUSUM kartına işaretlenen her bir S_i değeri test edilir. V-maskenin oluşturulabilmesi için gerekli olan d kılavuz uzunluğu ve θ açısı, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ve $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$ için ,

$$d = \frac{2}{\Delta} \left[\frac{\sigma^2}{\Delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \right] \quad (17)$$

$$\tan\theta = \frac{h\Delta}{2}$$

biçimindedir. (17) eşitliğindeki h; bir örnekleme aralığı ölçeğidir ve CUSUM birimi olarak adlandırılır (DeVor, Chang, Sutherland, 1992).

2.3. CUSUM Kontrol Kartlarının Açıklanması

Kontrol kartı uygulamalarında, kart kontrol dışı bir uyarı gösterdiğinde, süreçte özel nedenlere bağlı değişkenlik söz konusudur ve önlem alınır. Eğer örneklem kümülatif toplamı, S_i , AKL ve ÜKL arasında ya da V-maskenin iki kolu içinde yer alırsa herhangi bir hareket yapılmaz. Buralar kararsız kalınan bölgelerdir, dolayısıyla bu bölgeler kontrol sınırlarının olduğu kadar Δ_1 ve Δ_2 sapmalarının da fonksiyonlarıdır. CUSUM kontrol kartlarının etkin olabilmeleri için bu sapmaların büyüklüklerine karar

vermek son derece önemlidir ve sapmaların belirlenmesinin gerekliliği kartların uygulanmasında bir güçlük olarak yorumlanabilir. Eğer sapma çok büyük olarak seçilirse gereğinden az kontrolde, tersi durumda sapma çok küçük olarak seçilirse süreç gereğinden fazla kontrolde olabilir. Çoğu uygulamada uzmanlar sürece ilişkin beklentilerine göre sapmaları keyfi olarak belirlerler. Bir örneklem noktası kararsız bölgelerden birine düştüğü zaman, sürecin μ_0 ' da kontrolde olduğu kesin olarak söylenemez, hatta kart, sürecin μ_1 ve μ_2 reddetme düzeylerinde performans göstermesinin mümkün olmadığını söylese bile, sürecin μ_0 ortalamada kontrolde olduğu kesin olarak ifade edilemez. Araştırmalar ve uygulayıcılar CUSUM kartlarının Shewart kartlarına göre küçük sapmaları ortaya çıkarmada daha etkili olduğunu göstermişlerdir. Genelde 1 ya da daha küçük σ 'lık sapmalar küçük sapma olarak ifade edilir. CUSUM kartında her bir örneklem noktası bir kümülatif istatistik olduğundan ve geçmiş veriye dayalı olduğundan, örneklem noktaları kontrol sınırlarında olduklarında rasgele olmama durumunun ortaya çıkarılması başka bir deyişle kartın yorumlanması özel bir dikkat gerektirir. Genelde, bir kaç örneklem için devam eden (eğimde kesin bir artış ya da azalış olarak) bir trend eğrisi, süreç parametresinde olası bir sapmanın işaretidir. Uzun bir veri kümesi için ise olası bir uyarı, devam eden sapmanın doğrusal eğimi ile belirlenir. Kartta trendin başlama noktasının bilinmesi, sapmanın zamanına karar vermede oldukça yardımcıdır. Bir trend doğrusunun eğimi, sapmanın büyüklüğünü tahmin etmek için de kullanılır (DeVor, Chang, Sutherland, 1992).

2.4. Örneklem Ortalamaları için CUSUM Kontrol Kartları

Bir süreçten alınan herbiri n büyüklüğündeki t örneklem için, örneklem ortalamasına ilişkin CUSUM kontrol kartı oluşturulabilir. $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t$ örneklem ortalamaları için CUSUM istatistiği;

$$S_t = \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - \mu_0)$$

biçimindedir.

İki yanlı CUSUM planı için kontrol sınırları ise;

$$\begin{aligned} \text{AKL} &= \frac{\sigma^2}{n\Delta_2} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + t \left(\frac{\Delta_2}{2} \right) \\ \text{ÜKL} &= \frac{\sigma^2}{n\Delta_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + t \left(\frac{\Delta_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

biçimindedir.

V-maskenin kontrol sınırlarının eğimi ve d kılavuz uzunluğu, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ve $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$ için,

$$d = \frac{2}{\Delta} \left[\frac{\sigma^2}{n\Delta} \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right) \right] \quad (19)$$

$$\tan\theta = \frac{h\Delta}{2}$$

olarak elde edilir(DeVor, Chang, Sutherland, 1992 ve Duncan,1994).

3. TERS-NORMAL DAĞILIM İÇİN OOAT' YE DAYALI DÜZELTİLMİŞ BİR CUSUM KONTROL KARTI

Ters-normal olasılık yoğunluğu, normal ve gamma olasılık yoğunluğundan türetilmiş üstel bir aileye sahip bir yoğunluktur. Ortalaması μ varyansı μ^3/λ olan ters-normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x, \mu, \lambda) = \left(\frac{1}{2\pi\mu^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\lambda(x - \mu)^2 / (2x\mu^2) \right) ; x > 0 \text{ için} \quad (20)$$

biçimindedir. (20) eşitliğinde λ dağılımın ölçek (scale) parametresi olup dağılımın biçimi λ/μ 'ye bağlıdır.

İstatistiksel süreç kontrolünü ekonomik olarak değerlendirmeyi amaçlayan ve süreçteki küçük değişimlere karşı etkili olan CUSUM kartları, kalite ve endüstri mühendisliğinde son zamanlarda önem kazanan ters-normal dağılım için de geliştirilmiştir(Edgeman ve Dennis Lin,1997).

Ters -normal dağılımın ortalaması OOAT ile test edilmek istendiğinde hipotezler (1) eşitliğinde verildiği gibi kurulabilir. Test için gerekli olan kabul ve red doğruları Kesim 2.1' den yararlanarak aşağıdaki gibi bulunur:
(20)' de verilen ters-normal dağılımın olabilirlik oranı L,

$$L = \frac{P_{11}}{P_{01}} = \exp \left\{ \frac{-\lambda}{2} \left[\mu_1^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_1)^2}{X_i} - \mu_0^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_0)^2}{X_i} \right] \right\}$$

dır. $\ln L$ ise,

$$\ln L = \left\{ \frac{-\lambda}{2} \left[\mu_1^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_1)^2}{X_i} - \mu_0^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_0)^2}{X_i} \right] \right\}$$

olarak elde edilir.

Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $\ln L$ Kesim 2.1'de verildiği gibi $\ln A$ ve $\ln B$ değerleriyle karşılaştırılır.

$\ln L, \sum_{i=1}^t X_i$ ' ye göre düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t X_i &\geq \frac{2\mu_0^2\mu_1^2}{\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2)} \ln \left[\frac{1-\beta}{\alpha} \right] + t \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \\ \sum_{i=1}^t X_i &\leq \frac{2\mu_0^2\mu_1^2}{\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2)} \ln \left[\frac{\beta}{1-\alpha} \right] + t \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \\ \frac{2\mu_0^2\mu_1^2}{\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2)} \ln \left[\frac{\beta}{1-\alpha} \right] + t \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} &< \sum_{i=1}^t X_i < \frac{2\mu_0^2\mu_1^2}{\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2)} \ln \left[\frac{1-\beta}{\alpha} \right] + t \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \end{aligned} \quad (21)$$

olarak elde edilir.Eşitsizliklerde,

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^t X_i \\ S &= 2 \frac{\mu_0\mu_1}{(\mu_0 + \mu_1)} \\ h_0 &= \ln \left[\frac{\beta}{1-\alpha} \right] \cdot \frac{(2\mu_0^2\mu_1^2)}{(\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2))} \\ h_1 &= \ln \left[\frac{1-\beta}{\alpha} \right] \cdot \frac{(2\mu_0^2\mu_1^2)}{(\lambda(\mu_1^2 - \mu_0^2))} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, testin durdurma kuralları;

1. $Y \leq Y_0 = h_0 + tS$ ise H_0 kabul,
2. $Y \geq Y_1 = h_1 + tS$ ise H_0 red,
3. $Y_0 < Y < Y_1$ ise sürece devam biçimindedir.

Y_1 ve Y_2 doğruları sırasıyla kabul ve red doğruları olarak adlandırılır ve birbirlerine paraleldir. h_0 ve h_1 doğruların kesim noktaları, S iki doğrunun ortak eğimidir.

Ters-normal dağılım için CUSUM kartı oluştururken (21)' den yararlanılarak $S_t = \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_0)$ ' ye ilişkin AKL ve ÜKL;

$$\begin{aligned} \text{AKL} &= h_0 + tS' \\ \text{ÜKL} &= h_1 + tS' \end{aligned} \quad (22)$$

olarak ifade edilebilir. (22) eşitliğindeki;

$$S' = \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + \mu_1}$$

biçimindedir.

Benzer biçimde μ_1 alt spesifikasyon sınırı olarak alındığında ($\mu_1 < \mu_0$) CUSUM kartı için kontrol sınırları bulunabilir(Edgeman ve Dennis Lin,1997).

Klasik CUSUM kartlarına alternatif bir yaklaşım; V-maskenin çiziminden kurtularak daha basit bir çizim için Shewart kartlarına benzer biçimde yatay sınırlarla çizilen kartlardır, ters-normal sürece ilişkin Shewart tipi kart oluşturmak için CUSUM istatistiği;

$$S_t = \sum_{i=1}^t (X_i - S')$$

olarak alınır, $\mu_1 > \mu_0$ için $S_t \geq h_1$ ve $\mu_1 < \mu_0$ için $S_t \leq -h_1$ olduğunda kart kontrol dışı uyarılar gösterecektir.

Ters-normal dağılım varsayımı altında örneklem ortalamaları (\bar{X}_i) için de bazı düzeltmelerle CUSUM kartları oluşturmak mümkündür. Bir süreçten alınan herbiri n büyüklüğündeki rasgele örneklemelerin ortalamasına ilişkin CUSUM kartının kontrol sınırları eşitlik (22)' de h_0 ve h_1 terimlerinde λ yerine $n\lambda$ konularak elde edilir(Edgeman ve Dennis Lin, (1997).

Örnek: Edgeman ve Salzberg (1991), havalandırma makinalarının belli zamanlarda elde edilen başarısızlık sürelerine (bozulma zamanı) ilişkin yaptıkları çalışmada başarısızlık süresinin μ ve λ parametreleri ile ters-normal dağılıma sahip olduğu gösterilmiştir. Hızlandırılmış yaşam testi için, üretici kalite düzeyi 20 saat ve tüketici kalite düzeyi 15 saat, üretici riski $\alpha=0,05$ ve tüketici riski $\beta=0,10$ olarak belirlenmiştir. Bu durumda ortalama başarısızlık zamanı $(1/\lambda) = 0,05$ ile $(1/\mu) = 0,0667$ arasında artmaktadır. (Mann, Schafer ve Singpurwalla, 1974). Çalışmada $\lambda=1$ düşünüldüğünde ardışık örnekleme planı kesim 3'deki bilgilerden yararlanarak,

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0,05$$

$$H_1 : \mu = \mu_1 = 0,0667$$

Kabul doğrusu; $Y_0 = h_0 + tS$

$$Y_0 = -0,0257 + 0,0571 t$$

Red doğrusu; $Y_1 = h_1 + tS$

$$Y_1 = 0,0330 + 0,0571 t$$

biçimindedir.

Testin durdurma kuralları ise;

1. $Y \leq -0,0257 + 0,0571 t$ ise H_0 kabul,
2. $Y \geq 0,0330 + 0,0571 t$ ise H_0 red,
3. $-0,0257 + 0,0571 t < Y < 0,0330 + 0,0571 t$ ise sürece devam, olarak tanımlanır. Burada Y başarısızlık sürelerinin birikimli toplamıdır.

Yukarıda verilen örnek için, süreç kontrolünü değerlendirmek amacıyla, verilen ardışık örnekleme planına dayalı olarak bir CUSUM kontrol kartı oluşturulabilir.

Örneklem kümülatif toplamı $S_i = \sum_{i=1}^i (X_i - 0,05)$ 'e ilişkin, CUSUM kontrol kartının alt ve üst sınırları (22) eşitliğinden;

$$AKL = -0,0257 + 0,0072 t$$

$$ÜKL = 0,0330 + 0,0072 t$$

biçiminde elde edilir.

Havalandırma makinalarının başarısızlık sürelerine ilişkin oluşturulan CUSUM kontrol kartı ile süreç ortalaması $\mu_0 = 0,05$ 'den sapmalar ortaya çıkarılabilir ya da izlenebilir. Eğer örneklem kümülatif toplamı S_i , alt ve üst kontrol sınırlarının içinde ise herhangi bir hareket yapılmaz, ancak sürecin $\mu_0 = 0,05$ 'de istatistiksel olarak kontrolde olduğu da kesin biçimde ifade edilemez. Bu durumda örneklem noktalarına ilişkin bir trend eğrisinin olup olmadığını izlemek önemlidir. Örneklem kümülatif toplamı S_i 'lerin kontrol sınırlarının dışına düşmesi durumunda ise $\mu_0 = 0,05$ 'den sapmaların olduğu ve süreçte özel nedenlere bağlı değişkenlikten dolayı önlem alınması gerektiği ifade edilebilir.

4. SONUÇ

CUSUM kontrol kartları, başlangıçta kabul örnekleme (acceptance sampling) için geliştirilmiştir. Kabul örneklemesinin amacı genelde büyük miktardaki ürünler için küçük örneklem gözlemlerine dayalı olarak kabul edilebilir ya da edilemez biçiminde bir karara varmaktır. Öte yandan örneklem ölçümünün bir raslantı değişkeni olduğu varsayımı altında gerçekleştirilen OOAT' ye dayalı ardışık örnekleme planı ise özellikle endüstriyel bir ürünün istatistiksel kalite kontrolü için zaman ve para bakımından oldukça tasarruf sağlar. CUSUM kontrol kartlarının sınırları OOAT' ye dayalı olarak elde edilmektedir. CUSUM kontrol kartları Shewart kontrol kartlarına göre süreç parametresindeki küçük değişimleri ortaya çıkarmada daha etkilidir. Ayrıca verilerin tümüne dayanılarak karar verilebilmesi ve örneklem genişliğinin daha az olması ile zaman ve maliyetten tasarruf sağlanabilmesi istatistiksel süreç kontrolde CUSUM kontrol kartlarının kullanımını yaygınlaştırmıştır.

Çalışmada, normal dağılıma sahip verilerin varsayımı altında ardışık örnekleme planı verildikten sonra süreç ortalamasının kontrolü için bireysel ölçümlere ve örneklem ortalamalarına dayalı klasik CUSUM kartlarının yapısı ve yorumu açıklanmış, ayrıca

son yıllarda endüstri mühendisliğinde, özellikle hızlandırılmış yaşam testlerinde kullanılan ters-normal dağılım için ardışık örnekleme planı verilerek buna ilişkin klasik CUSUM kartlarının düzeltilmiş biçimi verilmiştir.

KAYNAKLAR

- BACANLI, S. (1988), *Korelasyon Katsayısının Ardışık Testi*, H.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilim Uzmanlığı Tezi.
- DEVOR E.R, CHANG H.T and SUTHERLAND W.J, (1992), *Statistical Quality Design and Control: Contemporary Concepts and Methods*, Macmillan Publishing Company, New York, s. 384-416.
- EDGEMAN R.L. and DENNIS K.J. Lin.(1997), *Sequential analysis of an accelerated life model*, International Journal Quality and Reliability Management, 14,6,598-605.
- EDGEMAN R. L. and SALZBERG P. M.(1991), *A sequential sampling plan for inverse gaussian mean*, Statistical Papers, 32, 45-53.
- WALD, A. (1947), *Sequential Analysis*, John Wiley, New York, N.Y.
- ÇINGİ, H. (1990), *Ardışık örnekleme lisans üstü ders notları*, H.Ü. Fen Fakültesi İstatistik Bölümü.
- MANN, N. R., SCHAFER, R.E. and SINGPURWALLA, N.D., (1994), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley, New York.
- BASKAN, Ş.,(1997), *İstatistiksel Kalite Kontrolü*, Ege Üniversitesi, İzmir.
- DUNCAN, A.J.,(1994), *Quality Control and Industrial Statistics*, Richard D. Irwin. Homewood,III.

The Use of Cusum Control Charts in Sequential Sampling Plans

ABSTRACT

In this study, the structure and the use of sequential sampling plan and traditional cusum control charts developed for the sequential sampling plan is explained for the test of population mean of which has normal distribution. Meanwhile, the sequential sampling plan and the modified form of traditional cusum control charts are given for Inverse-Gaussian distribution which has been used especially in accelerated life test in quality and reliability engineering.

Key Words: *Sequential Sampling Plan, Inverse-Gaussian Distribution, CUSUM Control Charts.*