Osmanlı Bilimi Araştırmaları
Studies in Ottoman Science

İSTANBUL UNIVERSITY PRESS

Osmanlı Bilimi Araştırmaları 25, 2 (2024): 421-478
DOI: 10.26650/oba.1376947

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Hasan Fehmi'nin [Çayköy] *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda Yayımlanan Matematik Makaleleri

Hasan Fehmi's [Çayköy] Articles in Mathematics Published in *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası [Darülfünûn Science Faculty Journal]*

Müjdat Takıcak[1]

[1]Dr. Öğr. Üyesi, Kastamonu Üniversitesi, İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi, Felsefe Bölümü, Kastamonu, Türkiye

ORCID: M.T. 0000-0002-7809-5156

Corresponding author/Sorumlu yazar: Müjdat Takıcak,
Dr. Öğr. Üyesi, Kastamonu Üniversitesi, İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi, Felsefe Bölümü, Kastamonu, Türkiye
E-mailE-posta: mtakicak@kastamonu.edu.tr

Submitted/Başvuru: 16.10 2023
Revision Requested/Revizyon Talebi: 20.11.2023
Last Revision Received/Son Revizyon: 02.02.2024
Accepted/Kabul: 27.02.2024

Citation/Atıf: Takıcak, Müjdat. "Hasan Fehmi's [Çayköy] Articles in Mathematics Published in Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası [Darülfünûn Science Faculty Journal]". *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 25, 2 (2024): 421-478. https://doi.org/10.26650/oba.1376947

ÖZ

Hasan Fehmi [Çayköy] 1911 yılında Darülfünun Riyaziye Şubesi'nden mezun olduktan sonra, Kabataş Sultanisi, Mercan Sultanisi, Kız Muallim Mektebi, Darüşşafaka Lisesi gibi seçkin liselerde matematik öğretmenliği yapmıştır. Ulusal ve uluslararası bilimsel makaleleri yakından takip eden ve Riyaziye Şubesi hocaları ile yakın ilişkisi olan Hasan Fehmi, *Talebe Mecmuası*, *Riyaziyyat* ve *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* gibi çok sayıda dergide makaleler yayımlamıştır. Bir öğretmen olarak bilimsel yayınlarla bu kadar ilgili olması dikkat çeken bir durumdur. Zira *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası'*nda makalesi yayımlanan iki öğretmenden biri olan Hasan Fehmi, 1916-1917 yılları arasında yayımladığı 6 makale ile en çok yayın yapan beşinci kişi olmuştur. İsimleri sırasıyla "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", "Hendese Meselesi", "Müsellesât [1]", "Bir Gâye Meselesi", "Müsellesât [2]" ve "Cebir" olan bu makalelerin transliterasyonu ve matematiksel değerlendirilmesi eldeki bu çalışma kapsamında yapılmıştır. Elde edilen bulgulara göre, söz konusu makalelerde lisans seviyesinde özel matematiksel problemler tanıtılmış ve ispatlanmıştır. Özgün bir yaklaşıma rastlanmayan bu ispatlarda aritmetiğin ve geometrinin temel kuralları kullanılmıştır.

Anahtar sözcükler: Matematik Tarihi, Hasan Fehmi [Çayköy], *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*, Osmanlı Bilim Tarihi

ABSTRACT

After graduating from the Mathematics Department of Darülfünun in 1911, Hasan Fehmi [Çayköy] worked as a mathematics teacher in distinguished high schools such as Kabataş High School, Mercan High School, Girls' Teacher School and Darüşşafaka High School. Hasan Fehmi, who closely followed national and international scientific articles and had a close relationship with the teachers of the Mathematics Department, published articles in numerous journals such as *Talebe Mecmuası*, *Riyaziyyat*, and *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*. As a teacher, it is noteworthy that he was so interested in scientific

publications. Hasan Fehmi, one of the two teachers whose articles were published in the *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*, was the fifth most published person, with six articles published between 1916 and 1917. The transliteration and mathematical evaluation of these articles, which were titled “Küre Hacminin Bi’l-Cebr İstihrâcı”, “Hendese Meselesi”, “Müsellesât [1]”, “Bir Gâye Meselesi”, “Müsellesât [2]” and “Cebir” respectively, were carried out within the scope of this study. According to the findings, these articles introduced and proved particular mathematical problems at the undergraduate level. These proofs used the basic rules of arithmetic and geometry, where no original approach was found.
Keywords: History of Mathematics, Hasan Fehmi [Çayköy], *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*, Ottoman History of Science

Extended Summary

In the nineteenth century, the Ottoman Empire was aware of its scientic deciency and while trying to solve it introduced numerous innovations in education. The Ottoman Empire wanted to bring Western science to the country by sending successful students to Western countries. During this period, many students completed their education, returned to the country, and contributed to the country’s academic media. This situation was also reflected in Darülfünun, and efforts were made to increase the qualifications of its faculties. One of these was the publication of a scientific journal called *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* in 1916. After publishing six issues between 1916 and 1917, the journal went on a forced holiday due to the war. In this period, Hasan Fehmi [Çayköy] (1887-1950) published the highest number of articles in the field of mathematics in this journal. Hasan Fehmi, who graduated from Darülfünun’s Mathematics Department in 1911, worked as a mathematics teacher in the elite high schools of his time, such as Kabataş High School, Mercan High School, Girls’ School of Education, and Darüşşafaka High School. He was also the principal of Darüşşafaka between 1939 and 1943. Analyzing the articles in scientific periodicals published in the last period of the Ottoman Empire will contribute to the literature in this field. In this context, the present study aims to make a mathematical analysis of all of Hasan Fehmi’s articles published in *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*. In this context, six articles by Hasan Fehmi published in the journal were transliterated, and mathematical analyses were made separately.

Between 1916 and 1917, Hasan Fehmi published 6 articles in the Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası on mathematics. In his essays, he explained his subjects using a simple style and elaborately drawn figures at the necessary points.

In his first article, titled “Küre Hacminin Bi’l-Cebr İstihrâcı (Determination of Sphere Volume with Algebra)”, Hasan Fehmi used algebraic methods to determine how the expression $\frac{4}{3}\pi r^3$, which is the volume formula of any sphere with radius *r*, emerged.

In his second article, “Hendese Meselesi (Geometry Problem)”, Hasan Fehmi dealt with a problem concerning the relationship between a circle and a triangle. In the problem, any angle, such as XVY, is first drawn on the plane, and then points H and B are chosen on the arms of that angle such that $VH + VB$ is constant. It is claimed that the circumcircles of the triangles VHB obtained from here will pass through a fixed point, and then the claim is proved.

In his third article, “Müsellesât [1] (Trigonometry [1])”, Hasan Fehmi explained the solution to a trigonometry problem based on the relationship between a circle and a triangle. In this problem, let the heights of a triangle such as BLC intersect at the point K and let M be the center of the circumcircle of the triangle. The necessary conditions for the line segment MK passing through K and M to be equal to half of the base of the triangle are analyzed in this problem.

In his fourth article, “Bir Gâye Meselesi (A Limit Problem)”, Hasan Fehmi examined whether the limit value of the sum $\frac{1\times2}{3\times4\times5\times6}+\frac{2\times3}{4\times5\times6\times7}+\cdots+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ is equal to $\frac{1}{9}$.

In his fifth article, “Müsellesât [2] (Trigonometry [2])”, Hasan Fehmi drew a line from a point G chosen randomly outside a triangle like BCE to the vertices of the triangle. The perpendicularity centers of the three new triangles obtained are K_1, K_2 and K_3, respectively. In this problem, Hasan Fehmi showed the equality of the triangle $K_1K_2K_3$ and the triangle BCE.

In his sixth article titled “Cebir (Algebra)”, Hasan Fehmi discussed the derivatives of some special trigonometric functions, the equality of the derivative values of these special functions to each other, and finally, the equality of the derivatives of these special functions without derivative operation.

Hasan Fehmi included some special problem situations and solutions in the fields of geometry, trigonometry, and algebra in his articles published in *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*. Within the scope of the present study, these articles were analyzed mathematically in detail. According to the results obtained, it has been determined that the problems in question are at a level that can be accepted at the undergraduate level today and frequently brought up in the related courses. In this sense, they have a widespread recognition. In addition, the approaches used in problem-solving are not original. Hasan Fahmi does not make such a claim in his articles.

1. Giriş

Osmanlı İmparatorluğu modernleşme sürecinde yüzünü Batı'ya dönerek hemen hemen her alanda reformlar yapmıştır. Bilimsel açıdan eksikliğinin farkında olan ve çözmeye çalışan Osmanlı eğitimde de yenilikler yapmıştır. Başarılı öğrencilerini Batı ülkelerine göndererek Batı bilimini ülkeye taşımak istemiştir. Bu dönemde çok sayıda öğrenci eğitimini tamamlayıp ülkeye dönmüş ve toplumun bilgi seviyesini hızla yukarı çekmiştir. Bu durum Darülfünun'a da yansımış ve fakültelerinin niteliklerinin artırılması yönünde çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri de Fünûn Fakültesi'nde 1916 yılında *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* ismi ile bilimsel bir derginin yayınlanmaya başlamasıdır. Dergi 1916-1917 yılları arasında altı sayı yayımladıktan sonra savaş nedeniyle zorunlu olarak tatile girmiştir. İki ayda bir yayın yapan dergi "Riyaziyyat" ve "Tabiiyyat" olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Söz konusu dönemde 72'si Riyaziyyat alanında olmak üzere toplam 116 makale yayımlanmıştır. Riyaziyyat alanında en fazla makalesi yayımlananlardan biri de Hasan Fehmi [Çayköy] (1887-1950)'dür.[1] Darülfünun'un Riyaziyyat şubesinden 1911 yılında mezun olan Hasan Fehmi, Kabataş Sultanisi, Mercan Sultanisi, Kız Muallim Mektebi, Darüşşafaka Lisesi gibi döneminin seçkin liselerinde matematik öğretmenliği yapmıştır. Ayrıca 1939-1943 yılları arasında Darüşşafaka'nın müdürlüğünü de üstlenmiştir.[2] *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda daha çok fakülte hocalarının eserleri yayımlanmıştır. Dergide makalesi yayımlanan sadece iki öğretmen vardır: Halid Bey ve Hasan Fehmi Bey. Osmanlı'nın son döneminde yayımlanan süreli bilimsel dergilerdeki makalelerin analiz edilmesi, bu alanda oluşan literatüre katkı sağlayacaktır. Bu bağlamda eldeki çalışmanın amacı Hasan Fehmi'nin *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda yayımlanan makalelerinin tamamının matematiksel analizini yapmaktır. Bu kapsamda Hasan Fehmi'nin söz konusu dergide yayımlanan altı makalesi önce translite edilmiş, ardından ayrı ayrı matematiksel analizleri yapılmıştır.

1 Feza Günergun, "Darülfünun Fünun (Fen) Fakültesi Mecmuası (1916-1933)", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 1 (1995), 287–89.

2 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, sayfa 1.

2. Hasan Fehmi [Çayköy] Hakkında Biyografik Notlar

Resim 1. Hasan Fehmi [Çayköy] 1920[3]

Resim 2. Hasan Fehmi [Çayköy] 1935 (?)[4]

Resim 3. Hasan Fehmi [Çayköy] 1939[5]

Hasan Fehmi, 1887 yılında İstanbul'da doğmuştur. Babasının adı Mehmet Nuri Bey olan Hasan Fehmi, 2 Ocak 1935'te yürürlüğe giren Soyadı Kanunu'na istinaden Çayköy soy ismini almıştır. Darülfünun Riyaziye Mektebi'ni 1327/1911 yılında bitirmiştir. Mezun olduktan sonra bir süre İstanbul Erkek (Kabataş) Lisesi, Kız Muallim Lisesi ve Darüşşafaka Lisesi'nde matematik öğretmenliği yapmıştır.[6] Söz konusu dönemde iki ayrı defter olarak düzenlenen Darüşşafaka Öğretmen Sicil Defteri'nin her ikisinde de kaydı bulunmaktadır. Dosya numarasının yazmadığı, fakat tayin emrine dair verilen 8975/275 sıra numarası ile kayıtlı ilk belgeye göre, Hasan Fehmi Bey ismi ile Mart 1336 (Mart 1920) tarihinde matematik öğretmeni olarak göreve başlamış, 12.01.1930, 19.10.1930 ve 01.06.1931 tarihlerinde maaşına zam yapılmış, kurumdan ayrılış tarihi boş bırakılmıştır.[7] 1158 dosya numaralı ikinci belgede ismi artık Hasan Fehmi Çayköy olarak yazılmış ve ayrıca 06.08.1935 tarihli "çalışma ve öğretmesi idare meclisince takdire şayan görülmüştür" notu düşülmüştür. Söz konusu bu takdirin "dosya no: 2/407:86" şeklinde kaydı tutulmuştur. Ayrıca 01.06.1936, 01.10.1937 ve 01.06.1938 tarihlerinde maaşına zam yapıldığına dair bilgiler sicil defterinde yer almaktadır.[8] Her iki öğretmen sicil kaydında da önceki memuriyeti "Kız Muallim Mektebi Riyaziye Muallimi" ve 1911 yılında Darülfünun Riyaziye Şubesi'den mezun olduğu bilgileri yer almaktadır. Her iki belgedeki sicil bilgileri örtüşmekle beraber, ikinci belgede soy isim yazılmış ve kullanılan kelimeler sade bir Türkçe ile ifade edilmiştir.[9] İki ayrı öğretmen sicil

3 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1.
4 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No:1158.
5 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, 1.
6 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, 1; Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1; Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No:1158.
7 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1.
8 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No:1158.
9 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1; Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No:1158.

defterinde Hasan Fehmi’nin kaydı bulunması, iki ayrı dönemde Darüşşafaka’da öğretmenlik yaptığını düşündürtmektedir. 1916-1917 yılları arasında *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*’nda yazdığı makalelerin sonunda isminin önüne “Mercan Sultanisi Riyaziye Öğretmeni” yazdığından söz konusu tarihlerde bu kurumda çalıştığı anlaşılmaktadır.[10] Hasan Fehmi, 15 Temmuz 1923’te toplanan 1. Heyet-i İlmiye heyetinde “Kabataş Sultanisi Matematik Öğretmeni” unvanıyla yer almıştır.[11] 1923-1926 yılları arasında resmî bir devlet organı olarak varlığını sürdüren Heyet-i İlmiye’de İlk Tahsil Encümeni azalığı, Darülmuallimin ve Darülmuallimat-İzcilik, Terbiyecilik-Teşkilat Encümeni azalığı, Orta Tedrisat Encümeni azalığı ve Maarif İcraat Encümeni üyeliği görevlerinde bulunmuştur.[12] Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri’nde, 27.07.1939 tarihinde Darüşşafaka’nın müdürlüğüne 200 lira maaşla Efdalettin Tekiner’in yerine getirildiği, bu görevde 4 yıldan uzun bir süre kaldıktan sonra 04.12.1943 yılında görevden ayrıldığı bilgisi yer almaktadır.[13] 15 Şubat 1943 tarihli Vakit Gazetesi’nde yer alan “İstanbul 2. Bölge Seçmen Listesi”nde, Fatih Kazası’nın Karagümrük Nâhiyesi’nde “Darüşşafaka Müdürü Hasan Fehmi Çayköy” ismi ile kayıtlı olduğundan, söz konusu tarihte ikametgâhının bu bölgede olduğu söylenebilir.[14]

Baltacıoğlu’nun aktardığına göre, yabancı bilim dergileri ile meşgul bir öğretmen olan Hasan Fehmi’nin, dergilerin birinde Feuerbach kuramının açıklamasına dair iki makale gözüne çarpmıştır. Hasan Fehmi, söz konusu Feuerbach noktaları ve bir üçgene oranla bir noktanın diare-i müseddesi (circle pedal), bir üçgene oranla bir noktanın aks’i (inverse) gibi kavramların klasik öğretimin kapsamı dışında kaldığını ve bunlar üzerine yapılacak olan araştırmaların liselerin ikinci devre öğrencileri için yararlı olacağını düşünmüş ve meseleyi gündemine almaya karar vermiştir. Konuyu Darülfünun hocalarından Müderris Şükrü Beye’e iletmiş ve problem hakkında kısa bir mülahazadan sonra daire-i dahiliyenin (iç teğet çemberin), dokuz nokta çemberine teğet olması için yarıçapları farkının, merkezler çizgisine eşit olması gerekeceğine ve ispat sürecinin bu düşünce etrafında şekillenmesi gerektiğine karar vermişlerdir.[15] Buradan anlaşılmaktadır ki Hasan Fehmi, işini önemseyen, bilgilerini sürekli güncel tutan, gerektiğinde üniversite hocaları ile iletişim kurabilen, öğrencilerin gelişimini önemseyen ve bu minvalde devletin eğitim programları konusunda da çalışmalar yapan bir şahsiyettir.

---

10 Bkz: EK 4; EK 5; EK 7; EK 8.

11 Abdurrahim Güzel, “İlk Heyet-i İlmiye çalışmaları, alınan kararlar ve dini tedrisat”, *Erciyes Üniversitesi İlahiyat Fakültesi Dergisi* 5, 4 (1987), 329; Ali Baltacıoğlu, “Müderris Şükrü [Sayan (1884-1943)]”, *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 20, 2 (2019), 130; Engin Deniz Tanır ve Cengiz Aslan, “Birinci Heyet-i İlmiye ve Çalışma Esasları”, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi* 52, 1 (2019), 255; Kemal Şenoğlu, “Heyet-i İlmiye”, *Atatürk Ansiklopedisi.*

12 Tanır ve Aslan, “Birinci Heyet-i İlmiye ve Çalışma Esasları”, 258.

13 Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, sayfa 1.

14 “İstanbul’un İkinci Seçmen Listesi”, *Vakit Gazetesi*, 15 Şubat 1943, 5.

15 Baltacıoğlu, “Müderris Şükrü [Sayan (1884-1943)]”, 130.

Hasan Fehmi, 5 Ağustos 1940 tarihli *Yeni Sabah Gazetesi*'nin ikinci sayfasında "Merhum Riyaziyeci Mehmet İzzet" başlıklı yazısında, merhumun Darüşşafaka ve öğrencileri için hayatını vakfettiğinin altını ısrarla çizerek vurgulamıştır.[16] Söz konusu yazının muhtevasından anlaşıldığı kadarıyla Hasan Fehmi de, kendini öğrencilerine adamış değerli bir *öğretmen ve bilim insanı*dır. Bu bağlamda öğrencilerinin istifadesine sunulmak üzere, aritmetik, geometri, cebir ve trigonometri konularında lise öğrencileri için Mehmet İzzet ile birlikte 28 tane ders kitabı hazırlamış[17], yine lise öğrencileri için seviyelerine uygun matematik problemlerini ve çözümlerini bilimsel dergilerde yayımlamıştır.

Feza Günergun'un aktardığı bilgilere göre, "Tabiiyyat" ve "Riyaziyyat" olmak üzere iki kısımdan oluşan *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda Mart 1916-Ağustos 1917 tarihleri arasında toplam 116 makale yayımlanmış ve bunlardan 72 tanesi Riyaziyyat kısmında yer almıştır. Riyaziyyat kısmına söz konusu dönemde en fazla yazı gönderen Hüsnü Hamid (11 adet), Mehmet Nadir (8 adet), Mustafa Salim (8 adet), Misbah (8 adet) ve Hasan Fehmi (7 adet)[18]'dir. Hasan Fehmi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda eser yayımlayan iki öğretmenden biridir.[19]

Hasan Fehmi, *Riyaziyyat* isimli derginin sahibi ve müdürüdür. Derginin ilk sayısı 15 Kasım 1911 yılında yayımlanmıştır. İlk sayının kapağında derginin 15 günde bir yayımlanacağı bilgisi yer alsa da ikinci sayı hariç diğer sayılar ayda bir kez yayımlanmıştır. Zaman zaman derginin yayımlanması sekteye uğramış olmasına rağmen yayın hayatı 1926 yılına kadar uzanmaktadır. Hasan Fehmi derginin ilk sayısında kaleme aldığı "Sunum Amacı" başlıklı yazısında, Darülfünun Riyaziye şubesi hocalarından Şükrü Bey'in ve Darülfünun Riyaziye mezunlarından Halil Necati, Muharrem Nadi, İbrahim Hakkı, İbrahim Sıtkı, Ömer Fevzi ve Yahya İhsan Beylerin yazılarının dergide yer alacağı bilgisini vermiştir.[20] Ayrıca Hasan Fehmi, 1 Ocak 1931 ile Mayıs 1939 tarihleri arasında toplam 91 sayısı yayımlanan ve Mehmet İzzet'in sahibi olduğu *Talebe Mecmuası* isimli bilimsel dergide başından sonuna kadar sorumlu müdür olarak görev almıştır.[21]

---

16 Hasan Fehmi [Çayköy], "Merhum Riyaziyeci Mehmet İzzet", *Yeni Sabah Gazetesi*, 05 Ağustos 1940, 2.

17 Söz konusu ders kitaplarının ayrıntılı künye bilgileri için bkz: Gök, Mehmet. "Matematikçi Mehmet İzzet'in Hayatı ve Bilimsel Çalışmaları." Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, 2022, ss. 43-47. Ayrıca Hasan Fehmi'nin, Süleyman Sırrı ile birlikte E. Schlesser'den çevirdikleri *Hendese-i Murakkame* isimli ders kitabı ve Mustafa Salim ile birlikte yazdıkları *Hendese-i Müsteviye Mesaili* isimli ders kitabı bulunmaktadır. Ders kitaplarının dışında *Feuerbach Temâss Nazariyesi ve Havâss-i Müte'addididesi Hakkında bir Tetebbu'* isimli telif bir kitabı bulunmaktadır.

18 Günergun *Darülfüun Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın 6. sayısında Hasan Fehmi'nin "Cebir" ismi ile iki ayrı makalesi olduğunu bildirmiştir. Fakat derginin ilgili sayısında Hasan Fehmi'nin "cebir" isimli sadece bir makalesine rastlanmıştır. Dolayısıyla 7 değil 6 makalesi mevcuttur.

19 Günergun, "Darülfünun Fünun (Fen) Fakültesi Mecmuası (1916-1933)", 289.

20 Selim Maltepeler, "Meşrutiyet Döneminde Yayımlanan Bir Matematik Dergisi ve Sorularının Analizi: Riyaziyat Örneği" (Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 2013), 19–20.

21 Mehmet Gök, "Matematikçi Mehmet İzzet'in Hayatı ve Bilimsel Çalışmaları" (Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, 2022), 2.

Hasan Fehmi Çayköy, Fatih semtinde Fevzipaşa caddesindeki evinde, 6 Eylül 1950 akşamı vefat etmiştir.[22]

3. Hasan Fehmi'nin *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda Yayımlanan Makaleleri

Hasan Fehmi, *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın 1332/1916-1333-1917 yılları arasında yayımlanan 2., 3., 4. ve 6. sayılarında matematik konulu toplam 6 makale ile yer almıştır.[23] Eldeki bu çalışma kapsamında, isimleri sırasıyla "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", "Hendese Meselesi", "Müsellesât [1]", "Bir Gâye Meselesi", "Müsellesât [2]" ve "Cebir" olan bu makalelerin transliterasyonu ve matematiksel değerlendirilmesi araştırmacı tarafından yapılmıştır.

3.1. "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı"

Hasan Fehmi'nin "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı" isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın Haziran 1332/1916 tarihinde yayımlanan ikinci sayısında yer almıştır. Günümüz Türkçesi ile "Küre Hacminin Cebir ile Ortaya Çıkarılması" şeklinde ifade edilebilen söz konusu makalede Hasan Fehmi, *r* yarıçaplı herhangi bir kürenin, $\frac{4}{3}\pi r^3$ olan hacim formülünün cebirsel yöntemlerle nasıl ortaya çıkarılabileceğini anlatmıştır.

Makalesine başlarken amacının ne olduğuna dair herhangi bir açıklama yapmadan doğrudan konuya giren Hasan Fehmi, *n* pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2}{n^3}$$

ifadesinin *n* sonsuza yaklaşırken limitinin $\frac{1}{3}$ 'e eşit olduğunu öncelikle açıklamıştır. Söz konusu eşitliği ise şu şekilde ispatlama yoluna gitmiştir:

> (…) Gerçekte $(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1) \equiv 3n^2+3n$ denkliğinde n'ye $1,2,3,\dots,n-1$ sıralı değerleri verilerek teşkil edilen ifadeler taraf tarafa toplanırsa ve iki taraftan aynı değerler çıkarılırsa:
> $(n+1)n(n-1) = 3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]+3[1+2+3+\cdots+n-1]$
> bulunup burada da birden $n-1$'e kadar tam sayıların toplamının ifadesi olan $\frac{(n-1)n}{2}$ değeri yerine konulur ve tam sayıların karelerinin toplamını gösteren birinci kısım yalnız bırakılır ise:
> $\frac{2n^3-3n^2+n}{6} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$
> ve eşitliğin her iki tarafı n^3'ne oranlanırsa:
> $$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$
> bulunur.

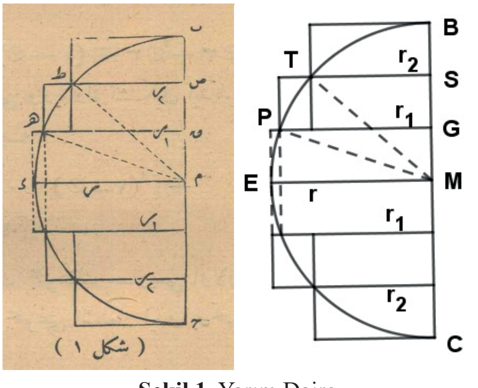
22 Gök, "Matematikçi Mehmet İzzet'in Hayatı ve Bilimsel Çalışmaları", 30.
23 Günergun, "Darülfünun Fünun (Fen) Fakültesi Mecmuası (1916-1933)", 289, 313, 316, 318, 321.

Şimdi n sonsuza yaklaştığında $\frac{1}{2n}, \frac{1}{6n^2}$ kesirleri sıfıra yaklaşacaklarından limit de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$ olduğundan:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

olacaktır.[24]

Hasan Fehmi bu limit değerini daha sonra kullanmak üzere bir kenara bırakarak *BC* çaplı bir yarım daireyi (Şekil 1) ele almıştır. Bu dairenin *BC* çapını *2n* eşit parçaya ayırmış, bu noktalardan *BC* çapına dikmeler inşa etmiş, dikmelerin yarım daireyi kestiği noktalardan ise *BC* çapına paraleller çizerek çok ince dikdörtgenler elde etmiştir. Elde edilen şeklin *BC* çapı etrafında döndürüldüğü düşünüldüğünde, yarım daireden bir küre, kürenin içinde ve dışında da çok ince silindirler ortaya çıkmıştır. Kürenin dışında *2n*, kürenin içinde ise $2(n-1)$ tane silindir bulunmaktadır. Hasan Fehmi elde edilen kürenin yarıçapını $ME = r$ ile, ortaya çıkan *2n* tane silindirin taban yarıçaplarını sırasıyla $r,\ r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots\ ,\ r_{(n-1)}$ ile, kürenin dışında oluşan silindirlerin hacimleri toplamını H_1 ile, kürenin içinde oluşan silindirlerin hacimler toplamını ise H_2 ile göstermiştir.[25] H_1 ve H_2 hacimlerini şu şekilde hesaplamıştır:



Şekil 1. Yarım Daire

Silindirlerin ortak yükseklikleri $\frac{r}{n}$ olup yarı kürenin dışındaki silindirlerin sırasıyla hacimleri:

$$\pi r^2 \times \frac{r}{n}, \qquad \pi r_1^2 \frac{r}{n}, \qquad \pi r_2^2 \frac{r}{n}, \quad \ldots \quad , \pi r_{n-1}^2 \frac{r}{n}$$

olup, kürenin diğer yarısında oluşan dış silindirler de hesaba katıldığında:

$$2\pi r^2 \times \frac{r}{n}, \qquad 2\pi r_1^2 \frac{r}{n}, \qquad 2\pi r_2^2 \frac{r}{n}, \qquad \ldots \quad , \qquad 2\pi r_{n-1}^2 \frac{r}{n}$$

hacim ifadeleri toplanarak:

$$H_1 = \frac{2\pi r}{n}\left[r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2\right]$$

bulunur.

24 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 2 (1332), 225.

25 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", 226.

Kürenin içinde elde edilen silindirlerin hacimleri toplamını tayin edebilmek için tabanlarının yarıçapları $r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,r_{(n-1)}$ olan ve kürenin içinde paralel bulunan silindirlerin hacimleri toplanarak:

$$H_2 = \frac{2\pi r}{n}[r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2]$$

bulunur.

Bu iki hacim taraf tarafa çıkarılırsa:

$$H_1 - H_2 = \frac{2\pi r^3}{n}$$

elde edilir.[26]

Yukarıdaki ifadede *n* sonsuza gittiğinde

$$\lim_{n\to\infty}(H_1 - H_2) = 0$$

bulunur. Bu durumda eğer kürenin hacmini *H* ile gösterirsek ve

$$H_2 < H < H_1$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\lim_{n\to\infty} H_1 = \lim_{n\to\infty} H_2 = H$$

bulunur. Nitekim Hasan Fehmi de az sonra H_1'in limitini hesaplayacaktır. Son durumda kürenin hacmi *H* ile gösterildiği takdirde:

$$H = \lim_{n\to\infty} H_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi r}{n}[r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2]$$

bağıntısına ulaşılmıştır.[27]

Hasan Fehmi elde ettiği bağıntıda yer alan $r_1, r_2, r_3, \ldots ,r_{(n-1)}$ yarıçaplarının değerlerini hesaplayabilmek için Şekil 1'de yer alan *MPG* ve *MTS* dik üçgenlerinde Pisagor Bağıntısını kullanmıştır. *MPG* dik üçgeninde, *MB* yarıçapı *n* eşit parçaya bölündüğü için $MG = \frac{r}{n}$ olur. $MP = r$, $PG = r_1$ ile gösterildiğinden;

$$r_1^2 = r^2 - \frac{r^2}{n^2} = r^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

değeri elde edilebilmiştir. Benzer şekilde *MTS* dik üçgeninde, $MT = r,\ ST = r_2,\ SM = \frac{2r}{n}$ ile gösterildiğinden;

$$r_2^2 = r^2 - \frac{4r^2}{n^2} = r^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right)$$

bağıntısına ulaşılabilmiştir. Söz konusu bağıntı genelleştirildiğinde $r_3, \ldots ,r_{(n-1)}$ için;

$$r_3^2 = r^2\left(1 - \frac{3^2}{n^2}\right) \ldots . r_{n-1}^2 = r^2\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

26 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", 226-27.
27 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", 227.

bağıntıları elde edilmiştir.[28] Hasan Fehmi, $r_1^2, r_2^2, \dots, r_{n-1}^2$ yarıçapların karelerinin elde edilen bağıntılarında yer alan (r^2)'leri ortak çarpan parantezine alıp bu değerleri daha önce ulaşmış olduğu,

$$H = \lim_{n\to\infty} H_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi r}{n}\left[r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2\right]$$

bağıntısında yerine yazmak suretiyle kürenin hacim bağıntısına ulaşmıştır:

> (…) elde edileceğinden (r^2) ortak çarpan parantezine alınmak suretiyle $r_1^2, r_2^2, \dots, r_{n-1}^2$ ifadeleri toplandığında ve bulunan değer yerine konulduğunda:
>
> $$H = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi r}{n} r^2 \left(n - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^2}\right)$$
>
> veya:
>
> $$H = \lim_{n\to\infty} 2\pi r^3 \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}\right)$$
>
> bulunur. Burada sağ tarafın limiti alındığında:
>
> $$H = 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
>
> $$H = \frac{4}{3}\pi r^3$$
>
> formülüne ulaşılır.[29]

Hasan Fehmi makalesinin başında $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots(n-2)^2+(n-1)^2}{n^3}$ toplam değerini $\frac{1}{3}$ 'e eşit olduğunu göstermişti. Söz konusu değeri kürenin hacim bağıntısını elde etmek için yukarıdaki alıntının son bölümünde kullanmıştır.

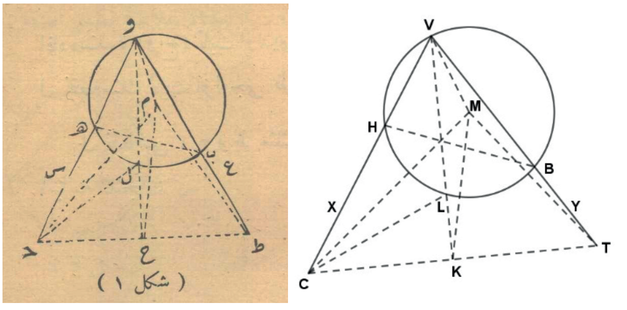
3.2. "Hendese Meselesi"

Hasan Fehmi'nin "Hendese Meselesi" isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın Haziran 1332/1916 tarihinde yayımlanan ikinci sayısında yer almıştır. Günümüz Türkçesi ile "Geometri Problemi" şeklinde ifade edilebilen söz konusu makalede Hasan Fehmi, bir çember ile bir üçgen arasındaki münasebete dair iki özel durumu incelemiş ve ispatlamıştır.

Söz konusu makalede ilk problem durumunu şu şekilde ifade etmiştir:

> **Problem:** Bir *XVY* açısının (*VX*) kenarı üzerinde *H*, (*VY*) kenarı üzerinde *B* noktaları daima (Şekil 2) *VH* + *VB* sabit kalmak üzere seçildiği halde (*VHB*) gibi üçgenlerin dışına çizilmiş dairelerin sabit bir noktadan geçeceğini ifade ve ispat etmek mümkündür.[30]

28 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", 228.
29 Hasan Fehmi [Çayköy], "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı", 228.
30 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 2 (1332), 229.



Şekil 2. Üçgen ve dairenin münasebeti-1

Şekil 2'de yer alan *VHB* üçgeninin dışına bir daire çizildikten sonra *VH* kenarı *VB* kadar, *VB* kenarı da *VH* kadar uzatılmak suretiyle *VCT* ikizkenar üçgeni elde edilmiştir. Bu durumda $VC = VT = VH + VB = u$ ile gösterildiğinde $CH \times VC + TB \times VT = u(CH + TB) = u^2$ sabit eşitliğine, "bir noktanın bir daireye göre kuvveti"ne dair teoreme dayanılarak ulaşılmıştır. Hasan Fehmi söz konusu özelliğin eldeki problemin başlangıç noktası olacağını ifade etmiştir.[31]

Hasan Fehmi, Şekil 2'de çizilen dairenin merkezi *M* ve yarı çapı da *VM* olmak üzere,

$$(\overline{TM}^2 - \overline{VM}^2) + (\overline{CM}^2 - \overline{VM}^2) = u^2$$

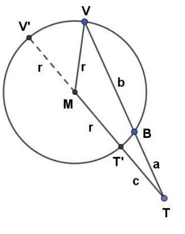
eşitliğinin herkesçe bilindiğini[32] söyleyerek herhangi bir açıklama yapmaksızın kabul etmiştir. *CMT* üçgeninde ise "kenarortay teoremi"ni uygulayarak,

$$(\overline{TM}^2 + \overline{CM}^2) = 2\overline{MK}^2 + 2\overline{CK}^2$$

ifadesine ulaşmış ve bunu (1) numaralı ifadede yerine yazmak suretiyle,

31 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 229.

32 Hasan Fehmi'nin "herkesçe bilinen" olarak nitelendirdiği eşitliğe "çemberde kuvvet" konusunun bir özelliğinden ulaşılabilmektedir. Şekilde verilen notasyonu kullanarak $CH \times VC + TB \times VT = u(CH + TB) = u^2$ ifadesinin $(\overline{TM}^2 - \overline{VM}^2) + (\overline{CM}^2 - \overline{VM}^2) = u^2$ ifadesine dönüştürülebileceğini şu şekilde gösterebiliriz:



Yukarıdaki şekilde $TB = a,\ BV = b,\ TT' = c,\ T'M = MV = MV' = r$ olmak üzere, T noktasının M merkezli çembere göre kuvveti alındığında, $TB \times VT = a(a + b) = c(c + 2r) = c^2 + 2rc$ bulunur. Öte yandan $TM^2 - VM^2 = a(a + b) = (c + r)^2 - r^2 = c^2 + 2r$ olduğundan $TB \times VT = TM^2 - VM^2$ olduğu görülür. Benzer şekilde $CH \times VC = CM^2 - VM^2$ gösterilebileceğinden $(TM^2 - VM^2) + (TM^2 - VM^2) = TB \times VT + CH \times VC = u^2$ eşitliği kolayca elde edilir.

$$2\overline{MK}^2 + 2\overline{CK}^2 - 2\overline{VM}^2 = u^2$$

$$\overline{MK}^2 - \overline{VM}^2 = \frac{u^2}{2} - \overline{CK}^2$$

eşitliklerini elde etmiştir. Bu eşitliğin sol tarafında yer alan $\overline{MK}^2 - \overline{VM}^2$ kısmı *K* noktasının *M* dairesine göre kuvvetine ve sağ tarafında yer alan $\frac{u^2}{2} - \overline{CK}^2$ kısmı ise sabit bir değere karşılık geldiği görüldüğünden dolayı *K* noktasının *V*, *H*, *B* noktalarından geçen her *M* dairesine göre kuvvetinin sabit olacağı sonucuna ulaşılmıştır.[33]

Hasan Fehmi makalesinin bu bölümünde problem durumunda ifade ettiği "sabit noktayı" şu şekilde izah etmiştir:

> *M* dairesi *VK* dikmesini *L* noktasında kessin. İşte aranılan sabit nokta bu noktadan ibarettir. Hakikaten:
>
> $$KL \times VK = \frac{u^2}{2} - \overline{CK}^2$$
>
> ifadesinde (*VK*) sabit olduğu gibi ikinci taraf da esasen sabit olduğundan *KL* uzunluğunun ve dolayısıyla *L* noktasının sabit olacağı tabiidir.[34]

VCT üçgeni ikizkenar olduğundan ve *K* noktası da *CT* kenarının orta noktası olduğundan *VK* doğrusu *CT* doğruna diktir. aynı zamanda *VCT* üçgeninde *CT* kenarına ait yüksekliğinin de geometrik yerini ifade etmektedir. Dolayısıyla *CT* kenarına ait *VK* yüksekliğinin *M* merkezli daireyi kestiği *L* noktası Hasan Fehmi'nin probleminin kritik noktasıdır. (*VK*) uzunluğu baştan belli olduğundan ve (2) numaralı eşitliğin ikinci yarısı sabit olduğundan *KL* uzunluğu da sabit olmak zorundadır. Söz konusu *L* noktası *CVT* üçgenin dışına çizilen dairenin merkezidir. Hasan Fehmi bunu şu şekilde ispat etmektedir:

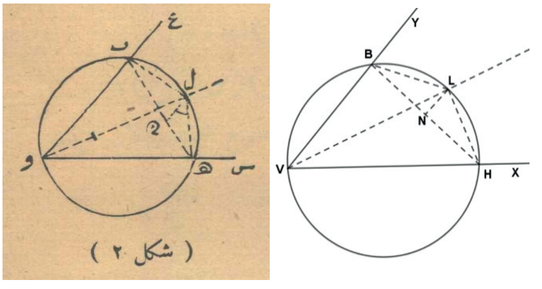
> *L* noktası, *CVT* müsellesinin dışına çizilen dairenin merkezini teşkil eder, bunun ispatına gelince:
>
> $$\frac{u^2}{2} = \frac{\overline{VC}^2}{2}$$
>
> değeri (2) numaralı ifadede yerine yazıldığında:
>
> $$KL \times VK = \frac{\overline{VC}^2}{2} - \overline{VK}^2 = \frac{\overline{VC}^2 - 2\overline{CK}^2}{2} = \frac{\overline{VK}^2 + \overline{CK}^2 - 2\overline{CK}^2}{2} = \frac{\overline{VK}^2 - \overline{CK}^2}{2}$$
>
> veya:
>
> $$2(KL \times VK) = \overline{VK}^2 - \overline{CK}^2$$
>
> ve bu ifadenin sağ tarafına:
>
> $$\overline{KL}^2 - \overline{KL}^2$$
>
> ilavesiyle:
>
> $$2KL \times VK = \overline{VK}^2 - \overline{CK}^2 + \overline{KL}^2 - \overline{KL}^2$$
>
> $$\overline{KL}^2 + \overline{VK}^2 - 2KL \times VK = \overline{CK}^2 + \overline{KL}^2$$
>
> $$(VK - KL)^2 = \overline{CL}^2$$
>
> $$\overline{VL}^2 = \overline{CL}^2$$
>
> $$VL = CL$$

33 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 229-30.
34 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 230.

> bulunur ki bundan da (L) noktasının (CVT) üçgeninin dışına çizilen dairenin merkezinden ibaret olduğu ortaya çıkar.[35]

$VL = CL$ eşitliği ile L noktasının CVT üçgeninin dışına çizilen dairenin merkezi olduğunu ve dolayısıyla sabit olduğunu gösteren Hasan Fehmi, makalenin başında ifade ettiği problem durumunu da çözüme kavuşturabilmiştir.

Hasan Fehmi makalesinin devamında ikinci problemini şu şekilde ifade etmiştir:



Şekil 3. Batlamyus Teoremi'nin Uygulaması

> BVH üçgeninin dışına çizilmiş olan çevrel çember XVY açısının açıortayını L noktasında kessin (Şekil 3). Batlamyus teoremini[36] bu çemberin üzerine çizilmiş ($VBLH$) dikdörtgenine uygulayalım.[37]

Hasan Fehmi makalenin bu bölümünde, Batlamyus Teoremi'ni Şekil 3'de gösterilen çember ve üçgen arasındaki özel bir duruma uygulayarak L noktasının sabit olduğunu göstermiştir. Öncelikle VL açıortay olduğundan BH yayının L noktasında iki eşit parçaya bölündüğünü, dolayısıyla $BL = LH$ eşitliğinin ifade edilebileceğini söyleyerek Batlamyus Teoremi'ni $BVHL$ dörtgenine uygulamıştır:

$$LH \times BV + LB \times HV = BH \times LV$$

> veya:
>
> $$LB\ yayı = LH\ yayı$$
>
> olmasından dolayı:
>
> $$LB = LH$$
>
> olduğundan eşitliğin her iki tarafı BH ile bölünerek:
>
> $$\frac{LH}{BH} \times BV + \frac{LH}{BH}\ HV = LV$$
>
> $$\frac{LH}{BH}(BV + HV) = LV \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$
>
> bulunur.[38]

35 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 230-31.

36 Batlamyus Teoremi'ne göre, Öklid geometrisinde, köşeleri ortak bir daire üzerinde yer alan bir kirişler dörtgeninin köşegenlerinin uzunluklarının çarpımı, karşılıklı kenarlarının uzunluklarının çarpımının toplamına eşittir.

37 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 231.

38 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 231.

Hasan Fehmi Batlamyus Teoremi'ne dayanarak $BVHL$ dörtgeninden elde ettiği $LH \times BV + LB \times HV = BH \times LV$ eşitliği $\frac{LH}{BH}(BV + HV) = LV$ formatına dönüştürmüştür. $BV + HV$ değeri sabit, BHL ikizkenar üçgen ve L açısı ile V açısı da birbirilerinin bütünleri olduklarından V açısı sabit olacaktır. Hasan Fehmi BHL ikizkenar üçgeninde LN yüksekliğini çizerek LNH dik üçgenini elde etmiştir (Şekil 3). Söz konusu üçgende NHL açısının kosinüs değerinden yola çıkarak $\frac{LH}{BH}$ oranının ve dolayısıyla LV uzunluğunun sabit olduğunu, buradan hareketle de L noktasının sabit olduğunu şu şekilde izah etmiştir:

> (…) bu ikizkenar üçgende *LN* yüksekliği çizilerek elde edilen *LNH* dik üçgeninde:
>
> $$\frac{HN}{LH} = \cos NHL = \cos\frac{1}{2}V$$
>
> veya:
>
> $$\frac{2NH}{LH} = \frac{BH}{LH} = 2\cos\frac{1}{2}V$$
>
> $$\frac{LH}{BH} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}V}$$
>
> olur ki bundan da $\frac{LH}{BH}$ oranının sabit olduğu anlaşılır. (1) numaralı eşitlikten LV uzunluğunun sabit ve dolayısıyla *L* noktasının da sabit bir noktadan ibaret olduğu anlaşılır. O halde:
>
> $$BV + HV$$
>
> sabit olduğu durumda *BVH* üçgeninin dışına çizilen çevrel çemberin *L* gibi sabit bir noktadan geçeceği ispat edilmiş olur.[39]

V açısının sabit olmasından dolayı *VLH* açısı da sabit olacağından $\frac{LH}{BH}$ oranı sabit olacaktır. Buradan hareketle *LV* uzunluğunun ve *L* noktasının sabit olduğu kendiliğinden ortaya çıkmıştır.

Hasan Fehmi "Hendese Meselesi" isimli makalesinde çember ve üçgen arasındaki ilişkiden ortaya çıkan iki özel durumu, geometride sıklıkla kullanılan "çemberde kuvvet" ve "Batlamyus teoremi" bağıntılarını kullanarak analiz etmiştir.

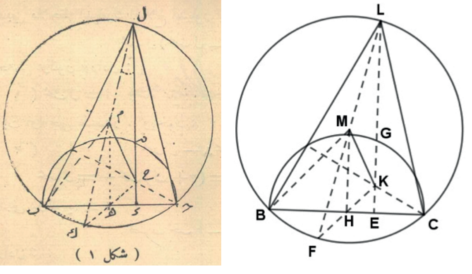
3.3. "Müsellesât [1]"

Hasan Fehmi'nin "Müsellesât [1]" isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın Ağustos 1332/1916 tarihinde yayımlanan üçüncü sayısında yer almıştır. Günümüz Türkçesi ile "Trigonometri [1]" olarak ifade edilebilecek bu makalede Hasan Fehmi, çember ve üçgenin ilişkisinde ortaya çıkan özel bir durumu trigonometri yardımıyla çözümlemiştir. Söz konusu özel durumu Hasan Fehmi şu şekilde izah etmiştir:

39 Hasan Fehmi [Çayköy], "Hendese Meselesi", 231-32.

(*BCL*) gibi bir üçgende yüksekliklerin kesiştiği *K* noktası ile üçgenin köşelerinden geçen dairenin *M* merkezi arasında çizilecek *MK* doğru parçası, üçgenin tabanının [BC] yarısına eşit olması için gerekli olan şartlarının incelenmesi arzu edilmektedir.[40]

Bir üçgende yüksekliklerin kesişim noktası ile bu üçgenin köşelerinden geçen çemberin merkezi arasındaki uzaklık bazı şartlar sağlandığında üçgenin taban uzunluğunun yarısına eşit olmaktadır. Hasan Fehmi bu makalesinde bu özel şartların ne olduğunu trigonometrik eşitlikleri kullanarak belirlemiştir. Öncelikle *BCL* üçgenini ve çemberi çizerek işe başlayan Hasan Fehmi trigonometrik bağıntıları söz konusu özel duruma şu şekilde dâhil etmiştir:



Şekil 4

M merkeziyle *L* köşesini birleştirelim. Ortaya çıkan *LMK* üçgeninden:

$$\overline{MK}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LK}^2 - 2ML \times LK \cos MLK$$

ve *M* merkezinden *BC* tabanına (Şekil 4) *MH* dikmesini ve *L* köşesinden geçen *LF* çapını çizelim; bir doğru istikametinde bulundukları geometrik olarak gösterilebilen[41] *F, H, K* noktaları arasını birleştirelim. Şu halde:

$$2MH = LK$$

ve *MBH* dik üçgeninden:

$$MH = r\cos L$$ [42]

olur ki bundan:

$$2r \cos L = LK$$

bulunur.[43]

LFK üçgeninde (Şekil 4) *LK* ve *MH* birer dikme olduklarından birbirlerine paraleldir ve bu durumda $MFH \sim LFK$ 'dir. Ayrıca M merkez olduğundan *LM* = *MF* = *r* eşitliğine ulaşılabilir ve bu durumda *MFH* ve *LFK* üçgenleri arasındaki benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olacağından *2MH* = *LK* eşitliğine ulaşılabilmiştir. *MBH* dik üçgen ve $s(\widehat{BMH}) = s(\hat{L})$[44] eşit olduğundan kosinüsün

40 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 3 (1332), 341.

41 *MH* ve *LE* doğru parçaları *BC*'ye dik olduklarından *F*, *H*, *K* noktalarının doğrudaş oldukları aşikardır.

42 *M* merkezli çemberde, $\widehat{BLC}$ açısı *BFC* yayını gören bir çevre açıdır. *BMH* dik üçgeninde *MH* dikmesi *BC* 'yi ve dolayısıyla *BFC* yayını iki eşit parçaya böler. Bu durumda $\widehat{BMH}$ merkez açısı ile *L* açısı birbirlerine eşit olur. Muhtemelen Hasan Fehmi de bu eşitlikten faydalanarak *MH* = *r cos BMH* yerine *MH* = *r cos L* yazmış görünüyor.

43 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 341.

44 Hasan Fehmi bu eşitliğe değinmeden doğru kabul etmiştir. *M* merkezli çemberde, $\widehat{BLC}$ açısı *BFC* yayını gören bir çevre açıdır. *BMH* dik üçgeninde *MH* dikmesi *BC*'yi ve dolayısıyla *BFC* yayını iki eşit parçaya böler.

tanımından yararlanılarak *MH = r cos L* bağıntısı yazılabilmiştir. *2MH = LK* olduğu için de *2r cos L= LK* bağıntısına ulaşılmıştır. Hasan Fehmi ulaştığı bu değerleri, *ML = r*'yi de ilave ederek, girişte bildirdiği $\overline{MK}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LK}^2 - 2ML \times LK \cos MLK$ eşitliğinde ilgili yerlere yerleştirerek bir başka trigonometrik bağıntıyı şu şekilde elde etmiştir:

> Bu değer yukarıda yerine konulur ve *ML = r* yerine yazılırsa:
>
> $$\overline{MK}^2 = r^2 + 4r^2 \cos L\,[\cos L - \cos(C - B)]$$ [45]
>
> olur. Burada *MLK* yerine *C* — *B* konulmuştur. Çünkü geometride bilindiği üzere yükseklik ile açıortay arasındaki açı[46], taban açılarının [farkının] yarısına eşit olup burada söz konusu açının iki katı olan *MLK* açısı doğal olarak *C* — *B* farkına eşittir.[47]

LCB üçgeninde L + C + B = π olduğundan Hasan Fehmi cos L yerine trigonometrik eşitliği kullanarak — cos(C + B) ifadesini kullanarak yukarıdaki alıntıda verilen eşitlikte şu şekilde bir dönüşüm gerçekleştirmiştir:[48]

> $$\overline{MK}^2 = r^2 - 4r^2 \cos L\,[\cos(C + B) + \cos(C - B)]$$
>
> $$\overline{MK}^2 = r^2(1 - 8\cos L \cos C \cos B)$$ [49]
>
> elde edilir. Eğer burada:
>
> *MK = BH = r cos L* varsayılır ve:
>
> $$\sin^2 L = 1 - \cos^2 L$$
>
> olduğu düşünülüp ifade sadeleştirilirse:[50]
>
> $$\cos L\,(\cos L - 8 \cos B \cos C) = 0$$
>
> neticesi bulunur.[51]

Bu durumda $\widehat{BMH}$ merkez açısı ile *L* açısı birbirlerine eşit olur. Muhtemelen Hasan Fehmi de bu eşitlikten faydalanarak *MH = r cos BMH* yerine *MH = r cos L* yazmıştır.

45 Hasan Fehmi'nin atladığı işlem basamakları şu şekildedir:

$$\overline{MK}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LK}^2 - 2ML \times LK \cos MLK$$
$$\overline{MK}^2 = r^2 + 4r^2 \cos^2 L - 2r \times 2r \cos L \cos MLK$$
$$\overline{MK}^2 = r^2 + 4r^2 \cos^2 L - 4r^2 \cos L \cos(C - B)$$
$$\overline{MK}^2 = r^2 + 4r^2 \cos L\,[\cos L - \cos(C - B)]$$

46 $\widehat{BLF}$ ile $\widehat{ELC}$ açıları çemberde çevre ve merkez açı özelliklerinden dolayı eşittirler (ME doğrusu çizildiğinde kolaylıkla görülecektir). Bu durumda $\widehat{BLC}$ açısının açıortayı $\widehat{MLK}$ açısını da iki eşit parçaya bölecektir. *LE*, BLC üçgeninin yüksekliği olduğundan, geometride "bir üçgende yükseklik ile açıortay arasında kalan açı, taban açılarının farkının yarısına eşittir" özelliği dikkate alındığında $\frac{\widehat{MLK}}{2} = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ eşitliğine, buradan da $\widehat{MLK} = \hat{B} - \hat{C}$ eşitliğine ulaşılabilir.

47 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 341.

48 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 342.

49 Hasan Fehmi burada cos(*C* + *B*) + cos(*C* - *B*) = 2 cos *C* cos *B* eşitliğinden faydalanmıştır.

50 Adı geçen sadeleştirme şu şekilde yapılabilir:

$$\overline{MK}^2 = r^2(1 - 8\cos L \cos C \cos B)$$
$$\frac{\overline{MK}^2}{r^2} = \frac{r^2(1 - 8\cos L \cos C \cos B)}{r^2}$$
$$\frac{\overline{BH}^2}{r^2} = \sin^2 L = 1 - 8\cos L \cos C \cos B$$
$$1 - \cos^2 L = 1 - 8\cos L \cos C \cos B$$
$$\cos^2 L = 8\cos L \cos C \cos B$$
$$\cos L\,(\cos L - 8\cos L \cos C \cos B) = 0$$

51 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 342.

Bu durumda Hasan Fehmi elde edilen son ifadenin sıfıra eşit olması için 2 ihtimalin olduğunu bildirmiştir:

1) $\cos L = 0$ ve dolayısıyla $L = 90^0$ olur. Bu durumda BLC üçgeni bir dik üçgen olmak durumundadır.
2) $cos\ L - \cos\ L - 8\cos B \cos C = 0$ olur ki

$$\cos L = \cos(B + C) = -\cos C \cos B + \sin C \sin B$$

olduğu düşünülerek:

$$\sin B \sin C - 9 \cos B \cos C = 0$$

buradan:

$$\tan B \tan C = 9$$

eşitliğine ulaşılır.[52]

Hasan Fehmi elde ettiği $\tan B \tan C = 9$ son eşitliğinde B açısının alacağı her değer için C açısının bir değere karşılık geleceğinden sonsuz sayıda durumun gerçekleşebileceğini bildirmiştir.[53]

Hasan Fehmi makalesinin son bölümünde B ve C açısına bağlı olarak ortaya çıkabilecek olan sonsuz tane üçgenden birinin de BC 'nin çap olacak şekilde bir yarım daire teşkil edebileceğini söylemiştir. Buradan hareketle Hasan Fehmi şu eşitliğe ulaşmıştır:

$$\overline{GE}^2 = CE \times EB = \frac{\overline{LE}^2}{\tan B \tan C}$$

olup

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{LE}^2}{9}$$

veya:

$$3EG = LE$$

bulunur.

Bu hassa-i hendesiyye nazar-i dikkate alınarak BC gibi keyfi kâʿideler üzerine resm olunan nısf-ı dâʾire muhitini katʿ eden ʿamûdun tûlü daha iki misli temdîd olunarak bulunacak L gibi noktalarla teşkîl edilen müselleslerin kâffesi birer cevap olacaktır.[54]

Trigonometrik eşitlikler kullanılarak kolaylıkla elde edilen $3EG = LE$ ile birlikte BC gibi keyfi bir taban üzerine inşa edilebilecek yarım dairenin çevresini kesen dikme (yani EG), kendi uzunluğunun iki katı kadar daha uzatılarak bulunacak olan L gibi noktalarla çizilecek üçgenlerin tamamı, makalenin başında belirtilen probleme birer cevap olacaktır. Bu durumda Hasan Fehmi "özel şartları" ortaya koyabilmiştir.

52 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 342.
53 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 342.
54 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [1]", 342-43.

3.4. "Bir Gâye Meselesi"

Hasan Fehmi'nin "Bir Gâye Meselesi" isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın Ağustos 1332/1916 tarihinde yayımlanan üçüncü sayısında yer almıştır. Günümüz Türkçesi ile "Bir Limit Problemi" olarak ifade edilebilecek bu makalede Hasan Fehmi, $\frac{1\times 2}{3\times 4\times 5\times 6}+\frac{2\times 3}{4\times 5\times 6\times 7}+\cdots+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ toplamının limit değerinin $\frac{1}{9}$ 'a eşit olduğunu göstermiştir.

Hasan Fehmi söz konusu toplam ifadesinde *n*. terimi düzenleyerek problemi çözümlemek için cebirsel dönüşümlerle daha kullanışlı bir forma şu şekilde kavuşturmuştur:

> Bu toplamın *n*'ninci terimi:
>
> $$\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \equiv \frac{E}{(n+2)(n+3)} + \frac{B}{(n+3)(n+4)} + \frac{C}{(n+4)(n+5)}$$
>
> şeklinde gösterilebilir. Burada, E, C ve B'nin değerlerini bulalım. Bu ifade:
>
> $$n(n+1) \equiv (n+4)(n+5)E + (n+2)(n+5)B + (n+2)(n+3)C$$
>
> şekline dönüştürülebilir ve bundan da:
>
> $$n^2 + n \equiv (E+B+C)n^2 + (9E+7B+5C)n + (20E+10B+6C)$$
>
> bulunur. Burada n^2 ve n 'nin katsayıları denkliğin diğer yarısına eşit olacağından:
>
> $$E + B + C = 1$$
>
> $$9E + 7B + 5C = 1$$
>
> $$20E + 10B + 6C = 0$$
>
> denklemleri elde edilir.
>
> Bu denklemlerin çözülmesiyle:
>
> $$E = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{8}{3} \quad C = \frac{10}{3}$$
>
> değerleri bulunur.
>
> Demek ki *n*'ninci terim:
>
> $$\frac{1}{3(n+2)(n+3)} - \frac{8}{3(n+3)(n+4)} + \frac{10}{3(n+4)(n+5)}$$
>
> veya:
>
> $$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] - \frac{8}{3}\left[\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right] + \frac{10}{3}\left[\frac{1}{(n+4)(n+5)}\right]$$
>
> şeklindedir.[55]

Hasan Fehmi genel terimi farklı bir şekilde ifade ettikten sonra *n* yerine 1, 2, 3, … değerlerini verip elde edilen sonuçları taraf tarafa toplayarak yeni bir ifadeye daha şu şekilde ulaşmıştır:

55 Hasan Fehmi [Çayköy], "Bir Gâye Meselesi", *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 3 (1332), 344–45.

Şimdi *n*'ye 1, 2, 3, … değerlerini vererek ortaya çıkan ifadeleri taraf tarafa toplayalım.

$$\frac{1\times 2}{3\times 4\times 5\times 6}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times 4}\right]-\frac{8}{3}\left[\frac{1}{4\times 5}\right]+\frac{10}{3}\left[\frac{1}{5\times 6}\right]$$

$$\frac{2\times 3}{4\times 5\times 6\times 7}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4\times 5}\right]-\frac{8}{3}\left[\frac{1}{5\times 6}\right]+\frac{10}{3}\left[\frac{1}{6\times 7}\right]$$

.

$$\frac{n(n+2)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]-\frac{8}{3}\left[\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right]+\frac{10}{3}\left[\frac{1}{(n+4)(n+5)}\right]$$

$$\begin{aligned}\text{Verilen Toplam} = &\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\times(n+3)}\right]\\ &-\frac{8}{3}\left[\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{(n+3)\times(n+4)}\right]\\ &+\frac{10}{3}\left[\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\cdots+\frac{1}{(n+4)\times(n+5)}\right]\end{aligned}$$

bulunur.[56]

Hasan Fehmi son eşitlikte $\frac{1\times 2}{3\times 4\times 5\times 6}+\frac{2\times 3}{4\times 5\times 6\times 7}+\cdots+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ toplam ifadesini $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\times(n+3)}\right]-\frac{8}{3}\left[\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{(n+3)\times(n+4)}\right]+\frac{10}{3}\left[\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\cdots+\frac{1}{(n+4)\times(n+5)}\right]$ formuna dönüştürmüştür. Bir toplamın limiti, toplamı oluşturan terimlerin limitleri toplamına eşittir. Dolayısıyla, elde edilen yeni ifadenin limit değerinin hesaplanması için yapılması gereken tek şey terimlerin ayrı ayrı limit değerini hesaplayıp toplamaktır. Hasan Fehmi de söz konusu özelliğe dikkat çekerek ilgili konuyu şu şekilde sonlandırmıştır:

> Bir toplamın limiti terimlerinin limitleri toplamına eşit olduğundan verilen toplamın limitini bulmak için kendisini teşkil eden üç kısmın limitleri toplamını alalım. Bu limitler ise:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots\right]=\frac{1}{3}$$
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots\right]=\frac{1}{4}$$
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\cdots\right]=\frac{1}{5}$$
>
> den ibarettir.
>
> Dolayısıyla:
>
> $$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdots$$
>
> tarzında bu kesirlerin sıra ile iki kesrin farkı oldukları dikkate alarak söz konusu limitlerin sonucu tayin olunabilir. Şu halde:
>
> $$istenen\ limit{:}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{10}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{9}$$
>
> olduğu görülür.[57]

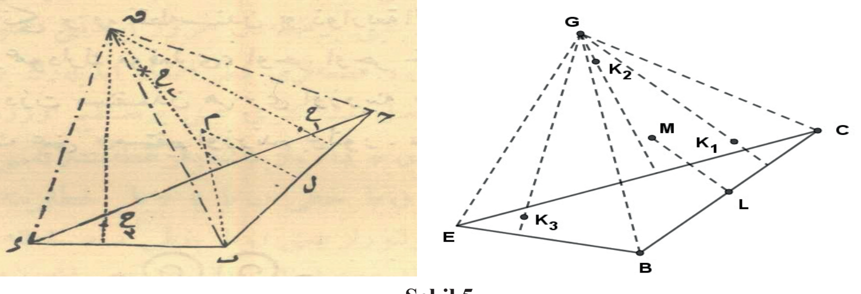
56 Hasan Fehmi [Çayköy], "Bir Gâye Meselesi", 345.
57 Hasan Fehmi [Çayköy], "Bir Gâye Meselesi", 345-46.

Hasan Fehmi temel limit kurallarını kullanarak $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\times2}{3\times4\times5\times6}+\frac{2\times3}{4\times5\times6\times7}+\cdots+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\right)$ limit değerinin $\frac{1}{9}$ ’a eşit olduğunu makalesinde izah etmiştir.

3.5. “Müsellesât[2]”

Hasan Fehmi’nin “Müsellesât[2]” isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*’nın Teşrîn-i Evvel 1332/1916 tarihinde yayımlanan dördüncü sayısında yer almıştır. Günümüz Türkçesi ile “Trigonometri[2]” olarak ifade edilebilecek bu makalede Hasan Fehmi eş üçgenlere dair özel bir problemi trigonometri yardımıyla çözümlemiştir. Ayrıca makalenin son bölümünde bir limit problemini de çözüme kavuşturmuştur. Hasan Fehmi öncelikle eş üçgenlere dair problem durumunu şu şekilde ifade etmiştir:

> *BCE* gibi bir üçgenin dışında rasgele seçilecek bir *G* noktasından, *BC* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde, *BGC* üçgenine ait K_1 diklik merkezi; *EC* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde *EGC* üçgenine ait K_2 diklik merkezi; *EB* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde *BGE* üçgenine ait K_3 diklik merkezi belirlensin. K_1, K_2, K_3 noktalarının birleştirilmesi ile elde edilecek olan $K_1\ K_2\ K_3$ üçgeninin alanı ile *EBC* üçgeninin alanı birbirine eşittir (Şekil 5).[58]



Şekil 5

Hasan Fehmi, GK_1, GK_2, GK_3 yüksekliklerini çizdikten sonra ve oluşan $K_1\ GK_3$ ve *CBE* açılarının birbirlerinin bütünleri olduklarına dikkat çektikten sonra, $K_1\ GK_3$ ve *BCE* üçgenlerinin yüzey alanları arasındaki oranın, bu açıları oluşturan kenarların çarpımları arasındaki orana eşit olduğunu söylemiştir:[59]

$$\frac{K_1GK_3}{BCE}=\frac{GK_1\times GK_3}{BC\times BE}$$

Bu eşitliği Hasan Fehmi, herhangi bir üçgenin bir köşesine ait açının sinüs değerinin yarısının, bu açıyı oluşturan kenarların uzunluklarının çarpımının, söz konusu üçgenin alanını vereceğine dair trigonometrik bağıntıya dayanarak yazmış görünmektedir. Zira K_1

58 Hasan Fehmi [Çayköy], “Müsellesât [2]”, *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 4 (1332), 440.
59 Hasan Fehmi [Çayköy], “Müsellesât [2]”, 440.

GK_3 ve CBE açılarının birbirlerinin bütünleri olduklarından sin $K_1\ GK_3$ = sin BCE yazılabilir. Bu durumda,

$$Alan\ (K_1GK_3) = \frac{1}{2}GK_1 \times GK_3 \sin(K_1GK_3)$$

$$Alan\ (BCE) = \frac{1}{2}BC \times BE \sin(CBE)$$

eşitliklerinden Hasan Fehmi'nin ifade ettiği $\frac{K_1GK_3}{BCE} = \frac{GK_1 \times GK_3}{BC \times BE}$ eşitliğe ulaşılabilmektedir.

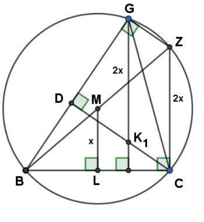
Hasan Fehmi bu eşitliği elde ettikten sonra *GCB* üçgenin dış çemberinin merkezini *M* ile gösterip *ML* dikmesi ile ilgili şu tespitte bulunmuştur:

> *GCB* üçgeninin dışına çizilmiş daire merkezini *M* ile gösterelim. Geometride bilinir ki[60] *M* merkezinden *BC* kenarına çizilen *ML* dikmesi GK_1 uzunluğunun yarısına eşittir.
>
> $$s(\widehat{BGC}) = n$$
>
> varsayımıyla:
>
> $$GK_1 = 2ML = BC \cot n$$
>
> elde edilir.[61]

MC doğru parçası çizildiğinde elde edilecek olan $\widehat{BMC}$ merkez açısı $\widehat{BGC}$ çevre açısının iki katına eşit olacağından $2s(\widehat{BGC}) = s(\widehat{BMC}) = 2n$ olur. $\widehat{BML}$ açısı da $\widehat{BMC}$ açısının yarısına eşit olduğundan $s(\widehat{BGC}) = s(\widehat{BML}) = n$ eşitliğine ulaşılır. *BML* dik üçgeninde kotanjant değeri hesaplandığında ise $\cot n = \frac{ML}{BL} = \frac{2ML}{BC}$ eşitliğine ve buradan da Hasan Fehmi'nin ifade ettiği $GK_1 = 2ML = BC \cot n$ eşitliğe ulaşılmaktadır. Bu durumda GK_1 uzunluğu tespit edilebilmiştir.

Hasan Fehmi makalenin devamında *BGC* üçgeni için yapmış olduğu işlemleri *GBE* üçgeni için de tekrarlamıştır:

60 Hasan Fehmi'nin ifade ettiği $2ML = GK_1$ eşitliğine "9 nokta çemberinin" sonuçlarından ulaşılabilmektedir:



M, *GBC* üçgenin çevrel çemberinin merkezi ve K_1 yüksekliklerin kesişim noktasıdır. *ML*, GK_1 ve *ZC* birbirine paralel ve *M* orta nokta olduğundan $2ML = ZC$ olur. Benzer şekilde *GZ* ve CK_1 birbirlerine paralel olduklarından $GK_1 = ZC$ ve dolayısıyla $2ML = GK_1$ olur.

61 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 440-41.

> *GBE* üçgeninin dışına çizilmiş dairenin merkezi *M′* ve bu noktadan *BE* kenarına indirilen dikmenin mevki *T* ile gösterilirse *BM′T* açısı *BGE* açısına eşit olup:
> $$s(\widehat{BGE}) = h$$
> varsayımıyla:
> $$GK_3 = 2M'T = BE\cot h$$
> bulunur.[62]

GK_1 ve GK_3 için bulunan değerler $\frac{K_1GK_3}{BCE} = \frac{GK_1 \times GK_3}{BC \times BE}$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\frac{K_1GK_3}{BCE} = \cot n \,.\, \cot h \ldots \ldots (1)$$

eşitliğine ulaşılmıştır.

Hasan Fehmi, K_2GK_3 açısı ile *BEC* açısının birbirine eşit olduğuna dikkat çektikten sonra, K_2GK_3 ve *BCE* üçgenlerinin yüzey alanları arasındaki oranın, bu açıları oluşturan kenarların çarpımları arasındaki orana eşit olduğunu söylemiştir:[63]

$$\frac{K_2GK_3}{BCE} = \frac{GK_2 \times GK_3}{CE \times BE}$$

Buradan hareketle *GCB* ve *BEC* üçgenleri için yaptığı işlemleri *GCE* üçgeni için de tekrarlamıştır:

> *GCE* üçgeninin dışına çizilmiş daire merkezini *M″* ve bu noktadan *CE* kenarına indirilen dikmenin mevki de *H* ile gösterildiğinde *CM″H* açısı *CGE* açısına eşit olacağından $s(\widehat{CGE}) = t$ varsayımıyla:
> $$GK_2 = 2M''H = CE\cot t$$
> bulunur ve GK_2, GK_3 için bulunan değerler yerine konularak:
> $$\frac{K_2GK_3}{BCE} = \cot t \,.\, \cot h \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$
> elde edilir.[64]

Hasan Fehmi, $K_1\,GK_2$ üçgeni ile *BCE* üçgeninde $K_1\,GK_2$ açısıyla *BCE* açısının birbirine eşit olduğuna dikkat çekip daha önce yapmış olduğu işlemlere atıf yaparak,

$$\frac{K_1GK_2}{BCE} = \cot n \,.\, \cot t \ldots \ \ldots \qquad (3)$$

eşitliğine ulaşmıştır. Arık Hasan Fehmi’nin elinde $K_1\,GK_3$, $K_2\,GK_3$ ve $K_1\,GK_2$ üçgenlerinin alanlarının *BCE* üçgeninin alanı ile oranları mevcuttur. $K_1\,K_2\,K_3$ üçgeninin alanını elde etmek isteyen Hasan Fehmi, $K_1\,GK_3$ üçgeninin alanından $K_2\,GK_3$ ve $K_1\,GK_2$ üçgenlerinin alanları çıkararak amacına ulaşmıştır:

62 Hasan Fehmi [Çayköy], “Müsellesât [2]”, 441.
63 Hasan Fehmi [Çayköy], “Müsellesât [2]”, 441.
64 Hasan Fehmi [Çayköy], “Müsellesât [2]”, 441.

(1) numaralı ifadeden (2), (3) numaralı ifadeler taraf tarafa çıkarılarak:

$$\frac{K_1GK_3 - K_2GK_3 - K_1GK_2}{BCE} = \cot n \cot h - \cot t \cot h - \cot n \cot t$$

$$\frac{K_1K_2K_3}{BCE} = \cot n \cot t \cot h\,(\tan t - \tan n - \tan h)$$ [65]

bulunur.[66]

Hasan Fehmi, Şekil 4'te $t = n + h$ olduğundan elde ettiği son eşitlikte, tan t yerine $\tan(n+h) = \frac{\tan n + \tan h}{1 - \tan n \tan h}$ ve cot t yerine de $\cot(n+h) = \frac{1 - \tan n \tan h}{\tan n + \tan h}$ ifadelerini yerlerine koymak suretiyle:

$$\frac{K_1K_2K_3}{BCE} = \cot n \cot t \cot h\,(\tan t - \tan n - \tan h) = 1$$ [67]

sonucuna ulaşmıştır.[68] $\frac{K_1K_2K_3}{BCE} = 1$ olması ile birlikte $K_1K_2K_3$ üçgeni ile BCE üçgeninin alanlarının birbirine eşit olduğu ispatlanmıştır.

Hasan Fehmi makalesinin ikinci bölümünde "Bir Gâye Meselesi" başlığı altında bir limit problemini ele almıştır. Söz konusu problemi Hasan Fehmi şu şekilde ifadelendirmiştir:

> *BCEH* dışbükey dörtgeninde köşelerin *CH*, *BE* köşegenleri üzerindeki izdüşümleriyle *B'C'H'E'* dörtgeni ve bu ikinci dörtgenin köşelerinde tekrar köşegenler üzerindeki izdüşümleri vâsıtasıyla *B''C''H''E''* dörtgeni ve bu suretle sonsuza kadar devam edilerek dörtgenler çizilse:
>
> $$\frac{B'C'H'E' + B''C''H''E'' + \cdots}{BCHE}$$
>
> oranının limitini tayin etmek (Şekil 6).[69]

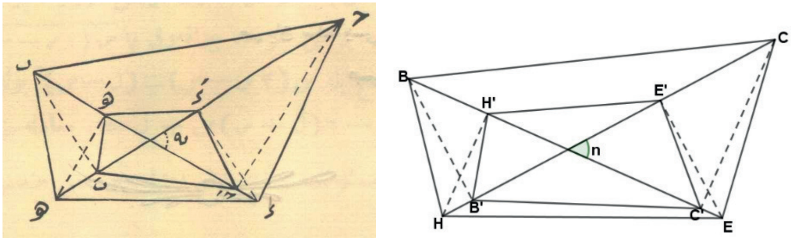
65 $\cot n \cot h - \cot t \cot h - \cot n \cot t = \cot n \cot h \cot t \tan t - \cot t \cot h \cot n \tan n - \cot n \cot t \cot h \tan h$
$\cot n \cot h - \cot t \cot h - \cot n \cot t = \cot n \cot t \cot h\,(\tan t - \tan n - \tan h)$

66 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 442.

67 $\frac{K_1K_2K_3}{BCE} = \cot n \cot t \cot h\,(\tan t - \tan n - \tan h)$
$= \cot n \cot h \left(\frac{1-\tan n \tan h}{\tan n + \tan h}\right)\left(\frac{\tan n + \tan h}{1 - \tan n \tan h} - \tan n - \tan h\right)$
$= \frac{1}{\tan n}\frac{1}{\tan h}\left(\frac{1-\tan n \tan h}{\tan n + \tan h}\right)\left(\frac{(\tan n + \tan h) - (\tan n + \tan h)(1 - \tan n \tan h)}{1 - \tan n \tan h}\right)$
$= \frac{1}{\tan n}\frac{1}{\tan h}\left(\frac{1-\tan n \tan h}{\tan n + \tan h}\right)\left(\frac{(\tan n + \tan h)\tan n \tan h)}{1 - \tan n \tan h}\right) = 1$

68 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 442.

69 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 442.



Şekil 6

Herhangi bir dörtgenin alanı, köşegenlerinin arasındaki açının sinüs değerinin yarısı ile köşegenlerin uzunluklarının çarpımı neticesinde elde edilebilir. Bu özellikten faydalanan Hasan Fehmi problemin çözümüne dair şu şekilde bir giriş yapmıştır:

CH.BE köşegenleri arasındaki açıya *n* diyelim:

$$BCHE = \frac{1}{2} CH \times BE \sin n$$

olduğu malumdur. Bunun gibi:

$$B'C'H'E' = \frac{1}{2} C'H' \times B'E' \sin n$$

olur.[70]

HH'CC altıgeninde *HH'* ve *CC'* kenarları *EB*'ye dik olduklarından, gerekli geometrik düzenlemeler yapıldığında $C'H' = CH \cos n$ ve $B'E' = BE \cos n$ eşitliklerine ulaşılabilir. Hasan Fehmi bu ifadeleri kullanarak *B'C'H'E'* dörtgeninin alanını şu şekilde izah etmiştir:

$$B'C'H'E' = \frac{1}{2} C'H' \times B'E' \sin n$$

olup:

$$C'H' = CH \cos n$$
$$B'B' = BE \cos n$$

olduklarından:

$$B'C'H'E' = \frac{1}{2} CH \times BE \cos^2 n \sin n$$

bulunur.[71]

Benzer bir akıl yürütme ile $B''C''H''E'' = \frac{1}{2} CH \times BE \cos^4 n \sin n$ alan bağıntısına ulaşılabilecektir. Sonsuza kadar devam eden bu dörtgenlerin alan bağıntılarının toplamını Hasan Fehmi limiti kullanarak hesaplamıştır:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B'C'H'E' + B''C''H''E'' + \cdots}{BCHE} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2} CH \times BE \sin n \,(\cos^2 n + \cos^4 n + \cdots + \cos^{2x} n)}{\frac{1}{2} CH \times BE \sin n}$$

$$\lim_{x\to\infty} (\cos^2 n + \cos^4 n + \cdots + \cos^{2x} n) = \frac{\cos^2 n}{1 - \cos^2 n} = \cot^2 n$$

olur.[72]

70 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 443.
71 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 443-44.
72 Hasan Fehmi [Çayköy], "Müsellesât [2]", 444.

Hasan Fehmi makalesinin son bölümünde $\frac{B'C'H'E'+B''C''H''E''+\cdots}{BCHE}$ ifadesinin limit değerini $\cot^2 n$ olarak hesaplamıştır.

3.6. "Cebir"

Hasan Fehmi'nin "Cebir" isimli makalesi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nın Ağustos 1333/1917 tarihinde yayımlanan altıncı sayısında yer almıştır. Bu makalede Hasan Fehmi bazı trigonometrik fonksiyonların türevlerini hesaplamıştır.

Hasan Fehmi makalenin girişinde y_1, y_2 ve y_3 fonksiyonlarını ve bu fonksiyonlara ait 3 problem durumunu şu şekilde ifade etmiştir:

$$y_1 = \frac{1}{b^2-c^2}\left[\frac{b\sin x}{b+c\cos x} - \frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-c^2}\sin x}{c+b\cos x}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{b^2-c^2}\left[\frac{b\sin x}{b+c\cos x} - \frac{2c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left(\frac{b-c}{\sqrt{b^2-c^2}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$y_3 = \frac{1}{b^2-c^2}\left[\frac{b\sin x}{b+c\cos x} - \frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arccos\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)\right]$$

> (**1**°) fonksiyonlarının türevleri hesap etmek. (**2**°) y_1, y_2, y_3 fonksiyonlarının türevlerinin birbirine eşit olduğunu incelemek. (**3**°) Adı geçen fonksiyonların türevlerinin eşitliğini incelemeden göstermek. [y_3 fonksiyonunda mevcut arccos'un (0) ile π arasında sınırlı olduğunu ve $\frac{b+c\cos x}{\sin x}$'nin pozitif olduğu kabul edilecektir]. (**1**°. **2**°) y_1, y_2, y_3 fonksiyonların türevleri hesap etmek ve söz konusu türevlerin eşitliğini incelemek.[73]

Hasan Fehmi y_1 fonksiyonunun türevi hesaplamak için öncelikle $\frac{b\sin x}{b+c\cos x}$ ifadesinin türevinin[74] $\frac{b(c+b\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$'ne eşit olduğunun kolaylıkla gösterilebileceğini ifade etmiştir. Fonksiyonun ikinci kısmı olan $-\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\frac{\sqrt{b^2-c^2}\sin x}{c+b\cos x}$ ifadesinin türevinin[75] ise $\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$'ne eşit olduğunu işlem basamaklarını anlatmadan yazmıştır. Bu iki türev değerinin toplamında ibaret olan y_1 fonksiyonunun türevi $\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$ ifadesine eşit[76] olur.[77]

Hasan Fehmi, benzer bir işlemi y_2 fonksiyonu için de yaparak

---

73 Hasan Fehmi [Çayköy], "Cebir", *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 2, 6 (1333), 616.

74 İlgili işlem şu şekildedir:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d}{dx}\frac{b\sin x}{b+c\cos x} = \frac{b\cos x(b+c\cos x)-b\sin x(-c\sin x)}{(b+c\cos x)^2} = \frac{b^2\cos x+bc\cos^2 x+bc\sin^2 x}{(b+c\cos x)^2} = \frac{b(b\cos x+c\cos^2 x+c\sin^2 x)}{(b+c\cos x)^2} = \frac{b(b\cos x+c)}{(b+c\cos x)^2}$$

75 İlgili işlem şu şekildedir: $$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{d}{dx}\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\frac{\sqrt{b^2-c^2}\sin x}{c+b\cos x} = -\frac{c\left(\frac{\sqrt{b^2-c^2}\cos x}{c+b\cos x}+\frac{b\sqrt{b^2-c^2}\sin^2 x}{(c+b\cos x)^2}\right)}{\sqrt{b^2-c^2}\left(\frac{(b^2-c^2)\sin^2 x}{(c+b\cos x)^2}+1\right)} = \frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$$

76 İlgili işlem şu şekildedir:

$$\frac{1}{b^2-c^2}\left(\frac{b(c+b\cos x)}{(b+c\cos x)^2}+\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}\right) = \frac{bc+b^2\cos x-cb-c^2\cos x}{(b^2-c^2)(b+c\cos x)^2} = \frac{(b^2-c^2)\cos x}{(b^2-c^2)(b+c\cos x)^2} = \frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$$

77 Hasan Fehmi [Çayköy], "Cebir", 616-17.

$-\frac{2c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left(\frac{b-c}{\sqrt{b^2-c^2}}\tan\frac{x}{2}\right)$ ifadesinin türevinin[78] de $-\frac{c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$ ’e eşit olduğunu, dolayısıyla y_2’nin türevinin[79] $\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$ ’ne eşit olduğunu, dolayısıyla y_1 ve y_2’nin türevlerinin $\left(\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}\right)$ birbirine eşit olduğunu göstermiştir.[80]

Hasan Fehmi son olarak y_3 fonksiyonun türevini hesaplamak için $-\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arccos\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)$ ifadesinin türevini araştırmış ve türev alma kurallarını kullanarak sonucu $\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)^2}}\cdot\frac{(b+c\cos x)(-b\sin x)-(c+b\cos x)(-c\sin x)}{(b+c\cos x)^2}$ bulmuştur. Bu ifadenin $\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b^2-c^2)\sin^2 x}}\cdot\frac{-(b^2-c^2)\sin x}{(b+c\cos x)^2}$ ’ne eşit olduğunu ise işlem yapmadan[81] göstermiştir. $\frac{b+c\cos x}{\sin x}$ ifadesi pozitif kabul edildiğinde $\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b^2-c^2)\sin^2 x}}\cdot\frac{-(b^2-c^2)\sin x}{(b+c\cos x)^2}$ ifadesini Hasan Fehmi gerekli şekilde düzenleyerek,

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{b+c\cos x}{\sin x}\cdot\frac{-(b^2-c^2)\sin x}{(b+c\cos x)^2}=\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$$

sonucuna ulaşmıştır. Bu durumda y_3 fonksiyonun türevinin de diğerleri gibi $\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$ ’ne eşit olduğunu tespit etmiştir. [82]

Hasan Fehmi makalenin girişinde belirttiği birinci ve ikinci problem durumlarını çözüme kavuşturarak y_1, y_2 ve y_3 fonksiyonlarının türevlerinin birbirlerine eşit olduklarını $\left(\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}=\frac{dy_3}{dx}=\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}\right)$ tespit etmiştir. Makalenin bu bölümünde ise üçüncü problem durumunda ifade ettiği, söz konusu fonksiyonların türevlerinin eşitliğinin pratik yoldan nasıl hesaplanabileceği konusunu ele almış ve şu şekilde bir dönüşüm yaparak işe başlamıştır:[83]

78 İlgili işlem şu şekildedir: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{d}{dx}\frac{2c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left(\frac{b-c}{\sqrt{b^2-c^2}}\tan\frac{x}{2}\right)=-\frac{c\left(\sec^2\frac{x}{2}\right)}{(b-c)\tan^2\frac{x}{2}+b+c}=\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$

79 İlgili işlem şu şekildedir: $\frac{1}{b^2-c^2}\left(\frac{b(c+b\cos x)}{(b+c\cos x)^2}+\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}\right)=\frac{bc+b^2\cos x-cb-c^2\cos x}{(b^2-c^2)(b+c\cos x)^2}=\frac{(b^2-c^2)\cos x}{(b^2-c^2)(b+c\cos x)^2}=\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$

80 Hasan Fehmi [Çayköy], “Cebir”, 617.

81 İlgili işlem şu şekildedir:

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)^2}}\cdot\frac{(b+c\cos x)(-b\sin x)-(c+b\cos x)(-c\sin x)}{(b+c\cos x)^2}=\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b+c\cos x)^2-(c+b\cos x)^2}}\cdot\frac{\left(-b^2\sin x-bc\sin x\cos x\right)-\left(-c^2\sin x-bc\sin x\cos x\right)}{(b+c\cos x)^2}=$$

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b+c\cos x)^2-(c+b\cos x)^2}}\cdot\frac{-b^2\sin x-bc\sin x\cos x+c^2\sin x+bc\sin x\cos x}{(b+c\cos x)^2}=\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b+c\cos x)^2-(c+b\cos x)^2}}\cdot\frac{-\sin x(b^2-c^2)}{(b+c\cos x)^2}$$

82 Hasan Fehmi [Çayköy], “Cebir”, 618.

83 Hasan Fehmi [Çayköy], “Cebir”, 619.

(**3°**) y_1, y_2, y_3 fonksiyonlarının türevlerinin eşitliğini, inceleme yapmadan elde etmek. Bunun için $y_1 - y_2$ ve $y_1 - y_3$ farkları şu şekilde:

$$z_1 = \arctan\frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

$$z_2 = \arctan\frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\frac{x}{2}$$

$$z_3 = \arccos\left(\frac{c + b\cos x}{b + c\cos x}\right)$$

varsayılır ise $z_1 - 2z_2$ ve $z_1 - z_3$ farklarının sabit olduğunu ispatlamak gerekir.

Hasan Fehmi arctanjant tanımından yola çıkarak söz konusu fonksiyonların birbirinden farklılaştığı bölümleri z_1, z_2 ve z_3 sembolleri ile ifade ederek yeniden düzenlemek istemiştir. Söz konusu bu yeni fonksiyonların birbirlerinden farkının sabit bir değere (içerinde x olmayan bir değere) eşit olduğu gösterilebilirse, türevlerinin de eşit olduğu ispatlanmış olacaktır. y_2 fonksiyonunun söz konusu teriminin katsayısı diğer iki fonksiyondan farklı olarak 2 olduğundan incelenmesi gereken fark $z_1 - 2z_2$ olacaktır. Buna ek olarak $z_1 - z_3$'ün de sabit bir değere eşit olduğu gösterildiği takdirde başta alınan fonksiyonların türevlerinin eşitliği türev işlemini gerçekleştirmeden tespit edilmiş olacaktır. Dolayısıyla Hasan Fehmi'nin göstermek istediği eşitlikler şu şekilde özetlenebilir:

$$y_1 - y_2 = \left(\frac{-c}{(b^2 - c^2)^{3/2}}\right)(z_1 - 2z_2)$$

ve

$$y_1 - y_3 = \left(\frac{-c}{(b^2 - c^2)^{3/2}}\right)(z_1 - z_3)$$

olur. Dolayısıyla $z_1 - 2z_2$ ve $z_1 - z_3$ ifadelerinin x'den bağımsız olması gerekir. Nitekim Hasan Fehmi söz konusu durumu şu şekilde ele almıştır:

$z_1 - 2z_2$ ve $z_1 - z_3$ farklarının sabit olduğunu ispatlamak gerekir.
$z_1 - 2z_2$ farkı sabittir çünkü:

$$\tan(z_1 - 2z_2) = \frac{\tan z_1 - \tan 2z_2}{1 + \tan z_1 \tan 2z_2}$$

olup:

$$\tan z_1 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

olduğu gibi:

$$\tan z_2 = \frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\frac{x}{2}$$

ve bundan $\tan 2z_2$'nin değeri olan:

$$\tan 2z_2 = \frac{2\dfrac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\dfrac{x}{2}}{1 - \dfrac{b - c}{b + c}\tan^2\dfrac{x}{2}}$$

bulunarak yerlerine konulur ise:

$$\tan(z_1 - 2z_2) = 0$$

ve buradan:

$$z_1 - 2z_2 = k\pi$$

olduğu bulunmuş olur.[84]

Hasan Fehmi'nin yapmış olduğu bu hesaplamalar sonucunda ortaya çıkan $z_1 - 2z_2 = k\pi$ ifadesi x'e bağlı bir değişkeni içinde barındırmayan sabit bir değerdir, dolayısıyla türev işleminde etkisiz bir terimdir.

Hasan Fehmi makalenin devamında $z_1 - 2z_2$ işlemi için yaptığı işlemleri $z_1 - z_3$ için de tekrarlayıp $z_1 - z_3 = k\pi$ sonucuna ulaşmıştır. Bu durumda y_1, y_2 ve y_3 fonksiyonlarının türevlerinin eşitliği türev işlemi yapılmaksızın hesap edilebilmiştir.

4. Değerlendirme ve Sonuç

Hasan Fehmi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda 1916-1917 yılları arasında matematik alanında toplam 6 makale yayımlamıştır. Makalelerinde ele aldığı konuları ayrıntılı olarak sade bir üslup benimseyerek açıklamış ve gerekli gördüğü noktalarda özenli çizilmiş şekiller kullanmıştır.

Hasan Fehmi "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı" isimli ilk makalesinde, r yarıçaplı herhangi bir kürenin hacim formülü olan $\frac{4}{3}\pi r^3$ ifadesinin nasıl ortaya çıktığını cebirsel yöntemler kullanarak tespit etmiştir. Bu işlemler için Hasan Fehmi, $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2}{n^3}$ ifadesinin n sonsuza giderken limit değerini hesaplamış; r yarıçaplı yarım bir dairenin çap uzunluğunu $2n$ parçaya ayırıp söz konusu yarım çemberi kendi çapı etrafında döndürerek r yarıçaplı, $2n$ tane silindirden oluşan bir küre elde etmiş, n sayısının sonsuza yaklaştırılması ile de çok ince silindir parçalarının üst üste yığılmalarından oluşan bir küre ortaya çıkarmış; elde etmiş olduğu kürenin hacmini hesaplamak için de küreyi oluşturan çok ince silindir parçalarının hacimlerini, makalenin başında hesap ettiği $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2}{n^3}$ cebirsel ifadesinin n sonsuza giderken limit değerini yardıma çağırarak hesaplamış, ve en nihayetinde kürenin hacim formülü olan $\frac{4}{3}\pi r^3$ bağıntısına ulaşmıştır.

Hasan Fehmi "Hendese Meselesi" isimli ikinci makalesinde, bir çember ve bir üçgenin birbirleriyle ilişkisine dair kurgulanmış iki problem durumunu ele almıştır. Birinci problemde, düzlem üzerinde belirlenmiş *XVY* gibi herhangi bir açının kolları üzerinde, *VH* + *VB* sabit olacak şekilde seçilecek *H* ve B noktaları vasıtasıyla çizilecek *VHB* üçgenlerinin çevrel çemberlerinin sabit bir noktadan geçeceği ifade edilmiş ve ispatı sorgulanmıştır. Söz

84 Hasan Fehmi [Çayköy], "Cebir", 619.

konusu ispatı yapabilmek için Hasan Fehmi, "çemberde kuvvet" bağıntıları merkezde olmak üzere çemberin temel özelliklerinden faydalanmıştır. Hasan Fehmi ikinci problemde, ilk problemde ele aldığı üçgende *BVH* açısına ait açıortayın, üçgenin dışına çizilmiş olan çevrel çemberi *L* gibi bir noktada kesmesiyle elde edilen *VBLH* dörtgenine "Batlamyus Teoremi"nin uygulanmasını incelemiştir. Bu işlemler için üçgende ve çemberde açı konularına müracaat etmiştir.

Hasan Fehmi "Müsellesât [1]" isimli üçüncü makalesinde, çember ve üçgen ilişkisine dayalı ortaya çıkan bir trigonometri probleminin çözümünü izah etmiştir. Bu problemde, *BLC* gibi bir üçgende yüksekliklerin kesiştiği *K* noktasından ve üçgenin çevrel çemberinin *M* merkezinden geçen *MK* doğru parçasının, üçgenin tabanının yarısına eşit olması için gerekli şartlar incelenmiştir. Hasan Fehmi bu problemin çözümünde, trigonometrik eşitliklerin yanı sıra çemberde açı, üçgende açı, üçgende benzerlik, üçgende açıortay ve yüksekliğin özellikleri gibi geometrinin temel konularından yararlanmıştır.

Hasan Fehmi "Bir Gâye Meselesi" isimli dördüncü makalesinde, $\frac{1\times2}{3\times4\times5\times6}+\frac{2\times3}{4\times5\times6\times7}+\cdots+\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ toplamının limit değerinin $\frac{1}{9}$ 'a eşit olup olmadığını incelemiştir. Hasan Fehmi öncelikle söz konusu ifadede yer alan genel terimi (*n*'ye bağlı terim) düzenleyecek çözüm için daha avantajlı bir hâl olan $\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\equiv\frac{E}{(n+2)(n+3)}+\frac{B}{(n+3)(n+4)}+\frac{C}{(n+4)(n+5)}$ formuna dönüştürmüş ve *n*'ye 1, 2, 3, … değerlerini verip sonuçları taraf tarafa toplamış, elde edilen sonuçlara *n* sonsuza giderken limit konumunda yaklaşmıştır. Limitin temel özelliklerini kullanmak suretiyle de sonuca ulaşmıştır.

Hasan Fehmi "Müsellesât [2]" isimli beşinci makalesinde iki problem durumunu ele almıştır. İlk problemde, *BCE* gibi bir üçgenin dışında rasgele seçilecek bir *G* noktasından, *BC* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde, *BGC* üçgenine ait K_1 diklik merkezi; *EC* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde *EGC* üçgenine ait K_2 diklik merkezi; *EB* kenarına çizilecek olan yüksekliğin üzerinde *BGE* üçgenine ait K_3 diklik merkezi olduğunda, K_1, K_2, K_3noktalarının birleştirilmesi ile elde edilecek olan K_1 K_2 K_3 üçgeninin alanı ile *EBC* üçgeninin alanının birbirine eşit olduğu ifade edilmiştir. Hasan Fehmi bu iki üçgenin alanlarının eşitliğini trigonometri yardımı ile göstermiştir. Bu işlemler için trigonometrinin temel özelliklerinin yanı sıra, diklik merkezi, çevrel çemberin merkezi, bütünler açı, çevre açı, merkez açı, 9 nokta çemberi gibi temel geometri konularından faydalanmıştır. Hasan Fehmi ikinci problemde ise, *BCEH* gibi dışbükey bir dörtgenin köşelerinin köşegenler üzerindeki izdüşümleri ile elde edilen *B'C'E'H'* dörtgeni, bu ikinci dörtgen için de aynı işlem tekrarlandığında elde edilen *B''C''E''H''* dörtgeni ve bu şekilde sonsuza kadar oluşturulmaya devam edilen dörtgenlerin alanlarına ait $\frac{B'C'H'E'+B''C''H''E''+\ldots}{BCHE}$ oranın limit konumunda hesaplanmasını içermektedir. Bu işlem için, trigonometri yardımıyla üçgende alan hesabını çözüme dâhil ederek söz konusu sonsuz toplamı limitin temel özelliklerini kullanarak $\cot^2 n$ olarak hesaplamıştır.

Hasan Fehmi "Cebir" isimli altıncı makalesinde, bazı özel trigonometrik fonksiyonların türevlerini, bu özel fonksiyonların türev değerlerinin birbirlerine eşitliğini ve son olarak söz konusu özel fonksiyonların türevlerinin eşitliğini türev işlemi yapmadan incelemeyi ele almıştır. Bu üç problemin çözümü için, trigonometrik dönüşümleri ve trigonometrik fonksiyonların türev alma kurallarını kullanmıştır.

Hasan Fehmi *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda yayımladığı makalelerinde geometri, trigonometri ve cebir alanlarında bazı özel problem durumlarına ve çözümlerine yer vermiştir. Eldeki çalışma kapsamında söz konusu makalelerin ayrıntılı olarak matematiksel analizleri yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre söz konusu problemlerin günümüzde lisans seviyesinde kabul edilebilecek ve ilgili derslerde sıklıkla gündeme gelebilecek düzeyde oldukları, bu anlamda yaygın bir tanınırlığa sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu problemlere getirilen çözümler tam ve doğru olmakla birlikte uluslararası dergilerde yayımlanabilecek seviyededir. Hasan Fehmi makalelerinde ele aldığı problemlere original bir çözüm getirdiği iddiasında değildir, onun birincil hedefi problemlerden ve çözümlerden matematik öğrencilerini ve matematiğe ilgi duyanları haberdar etmektir. Çok başarılı ve yetenekli bir öğretmen olan Hasan Fehmi'nin ülkenin zor şartlarında bu tür matematik problemleriyle uğraşıp Osmanlı bilim dünyasını bilgilendirmeye çalışması çok değerlidir ve onun bu çalışmaları Cumhuriyet'in ilanından sonra bilim alanında yapılan atılımların fikrî timeline katkı sunmuştur. *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*'nda yayımlanan makalelerin bir kısmı popüler bilim dergilerinde yayımlanabilecek makale sınıfında yer almaktadır. Hasan Fehmi'nin de söz konusu dergide yayımladığı eserler özelinde bu sınıfa dâhil olduğu anlaşılmaktadır. Fakat Hasan Fehmi'nin yayımladığı makaleler ve kitaplar bu çalışma kapsamında ele alınan eserlerle sınırlı değildir, daha sonra yapılacak çalışmalarla Hasan Fehmi'nin yurt içinde ve yurt dışında özgün bir eser kaleme alıp almadığı tespit edilmelidir.

Bir lise matematik öğretmeni olan Hasan Fehmi'nin yüksek bir motivasyonla pozitif bilimlerde uluslararası yayınları takip etmesi, bilimsel makaleler yayımlayan *Riyaziyyat* isimli derginin sahibi olması, bunun yanı sıra yine bilimsel yayın yapan eğitimci Mehmet İzzet'in sahibi olduğu *Talebe Mecmuası*'nda sorumlu müdürlük görevini üstlenmesi ve tüm bu işleri ülkenin en zor dönemleri olan 1910-1940 yılları arasında yapması takdire şayandır. Maltepeler'in de dikkat çektiği üzere Hasan Fehmi'yi ve bir grup bilim insanını harekete geçiren ve zinde olmasını sağlayan bu motivasyonun kaynağı, ülkenin içinde bulunduğu durumdan kurtulabilmesinin tek yolunun, fen bilimlerindeki seviyesinin batılı muadilleri seviyesine çıkarılmasıyla mümkün olabileceğine dair kuvvetli inançtır.[85] Hasan Fehmi bu bağlamda sadece makale yazmakla kalmamış aynı zamanda birçoğu Mehmet İzzet ile olmak üzere çok sayıda matematik ders kitabı yazmıştır.

Modernleşme dönemi ile birlikte yapılan reform çalışmaları neticesinde çok sayıda Osmanlı genci Batı ülkelerine nitelikli eğitim almak üzere gönderilmiş ve döndüklerinde ülkenin ihtiyacı olan birimlerde görev almışlardır. Bu gençler sadece ilgili alanlarda değil, fen bilimlerinin her sahasında bilgilerini ve görgülerini artırmışlar, ülkenin bilimsel birikimini hızla yukarı çekmişlerdir. Özellikle on dokuzuncu yüzyılın sonuna doğru Osmanlı aydınlarının bir kısmı, yeni bilgi üretme seviyesinde olmasa da ulaşılan bilgi seviyesi bağlamında, Batılı meslektaşlarıyla kendilerini denk görmeye başlamışlardır. Son zamanlarda yapılan akademik çalışmalar neticesinde Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa, Salih Zeki, Mehmet Nadir, Şükrü Sayan, Margosyan gibi bazı matematikçilerin özgün eser ortaya çıkarma gayreti ile ulusal ve uluslararası dergilerde yayınlar yaptıkları ortaya çıkmıştır. Hasan Fehmi ise şu ana kadar incelenen eserler özelinde Batı matematik seviyesini yakalamış bir öğretmendir. Çok sayıda olan yayınlarının tamamı incelendiğinde Hasan Fehmi'nin özgün bir esere sahip olup olmadığı tespit edilebilecektir.

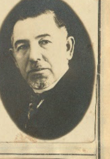
85 Maltepeler, "Meşrutiyet Döneminde", 20; Hasan Fehmi [Çayköy], "Arz-ı Maksat", *Riyâziyyât* 1, 1 (1911), 1.

EK-1: Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1

13 Muallimler **Memur ve muallimlere**

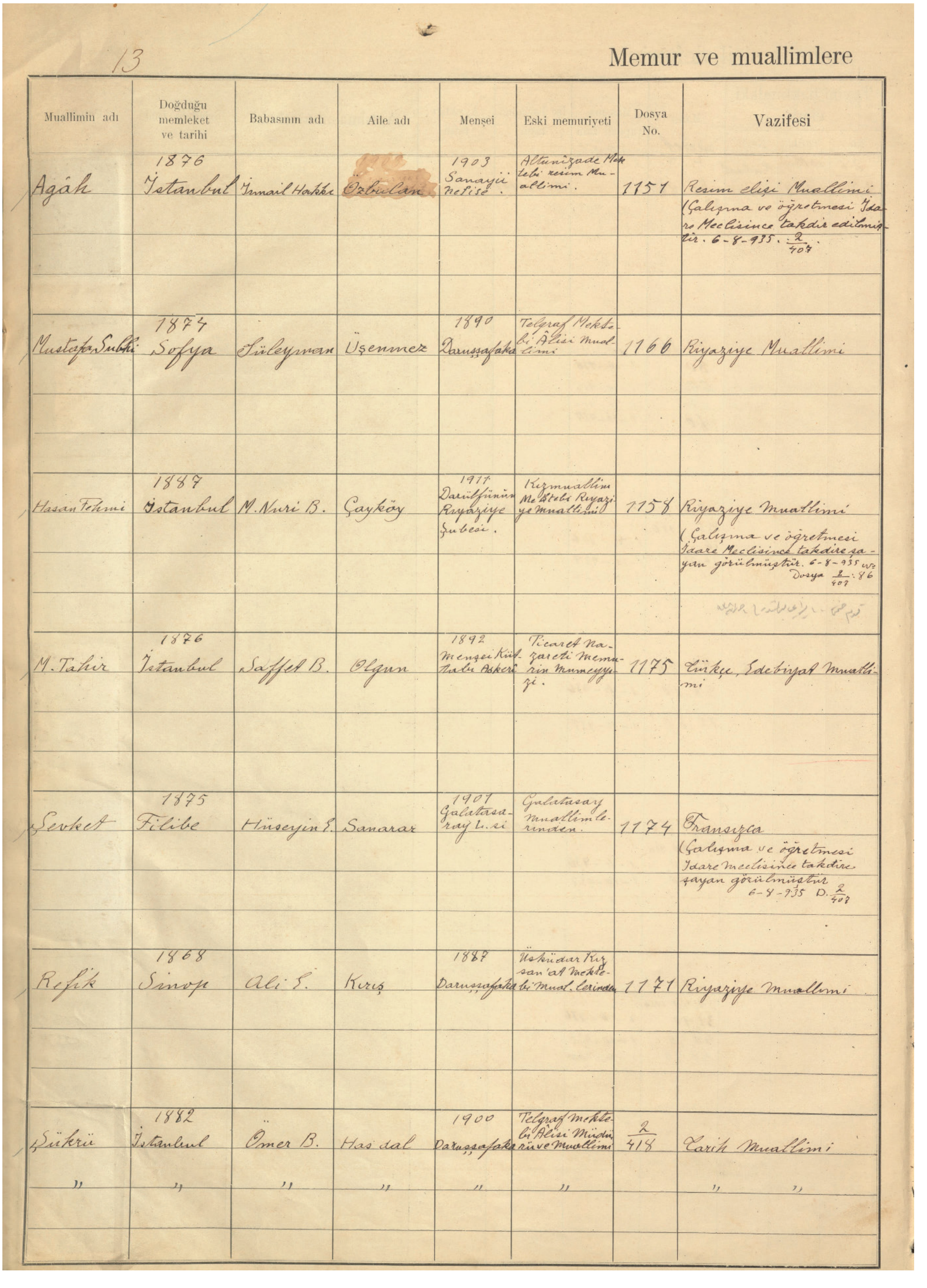
Muallimin adı	Doğduğu memleket ve tarih	Babasının adı	Aile adı	Menşei	Eski memuriyeti	Dosya №	Vazifesi
Yusuf Cemal bey	İstanbul 1269	Ahmet Nazmi efendi	Bayrakdar oğulları	Marsilya ticaret mektebi talebesi 1298	Galata Saray lisesi Fransızca muallimliği		Galigrafi Muallimliği
Hasan Hüsamettin bey	İstanbul 1290	Nuri bey	Yok	Galata Saray lisesi 1313	Galata Saray lisesinde Fransızca Muallimliği		Fransızca "
Hasan Fehmi bey	İstanbul 1303	Mehemmet Nuri bey	"	Darülfünun riyaziyat şubesi 1327	Kız Muallim mektebi riyaziye muallimliği		Riyaziye "
Mustafa Salih bey	Sofya 1290	Süleyman efendi	"	Darüşşafaka 1306	Telgraf yüksek ihtisas Mektebi Muallimliği		" "
Kazım bey	İstanbul 1290	Mustafa efendi	"	Darüşşafaka 1308	Mercanide Hesap Hendese Muallimliği		Türkçe, Hesap, Hendese "
Salim Ahmet bey	İstanbul 1313	Ahmet Refik efendi	"	Tıbbiye mektebi 1335	Zeynep Kamil hastanesi talebeleri		
Mehemmet [illegible] bey	İstanbul 1292	Saffet bey	"	Menşe-i Kıt'a Askeriye 1308	Ticaret nezareti memuriyet mümeyyizliği		Edebiyat, Türkçe "

mahsus sicil defteridir

Tayini hakkındaki emrin			Maaşı	Maaşına yapılan zam	İşe başladığı tarih	Ayrıldığı tarih	Ayrılmasının sebebi	Selefinin adı	Fotoğraf
№	Tarihi	Nev'i							
Tedrisat ruhsatnamesi	30 Mart 927		lira 20,40 17.1.932 5,40 15	lira 2,80 1.6.931	1.10.335	1.12.934	rahatsızlığı sebebile kadrosunun silindiği maarif müdürü dosya 4/22 21.3.1935 2040/1040		
Dosya numarası eski 15 355 yeni 1 324	〃		lira 48 1.1.930 12 36 1.6.931 12 24	lira 3 1.6.931 27 1.10.931	1.8.336		Çalışma ve öğretme ve idare meclisince şayanı takdir ve teşekkür görülmüştür 86 - 6-8-935	dosya 2/407	
maarif 8975 975	〃 11.3.935	dosya 4/21	〃 90 1.6.930 6 84	lira 6 12.1.930 6 19.10.930 16 1.6.931	Mart 336 336 maaş kadrosundan		〃 〃	〃	
	〃		lira 19,20	lira 9,60 28.11.930 9,60 1.6.931	16 Kanunuevvel 1338				
maarif 10 108 2108 62 399 2 399	〃 müdürü 14-6-935 Yazı muallimliği 13-3-936	Terfi dosya 4/14	lira 48	lira 6 1.6.931	320 senesi eski künye defter		Çalışma ve öğretme ve idare meclisince şayanı takdir ve teşekkür görülmüştür 86 -6-8-935 dosya 2/407	Yazı muallimliği Cemal	
	〃		lira 33,60 1.1.930 6 27 60 1.6.930 6 21,60	lira 1,80 4.10.930 3,30 1.6.931	1.12.340	1-10-934			
	〃		lira 73,20 1.1.930 18 55 20 1.6.930 18 37 20 1.12.931 24 80 12 40	lira 5,40 1.6.931 24,80 1.10.931	325 senesi eski künye defterinden				

Devlet Matbaası

EK-2: Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No: 1158.

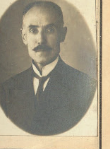


13

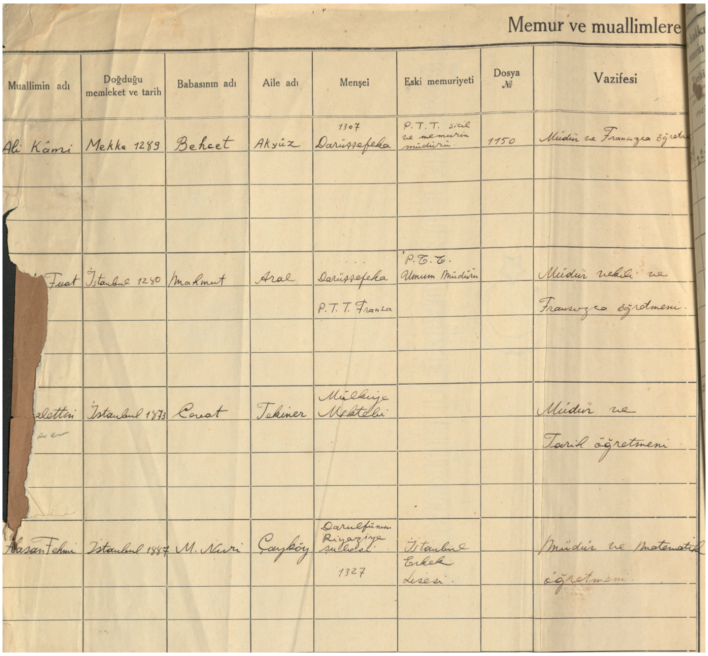
Memur ve muallimlere

Muallimin adı	Doğduğu memleket ve tarihi	Babasının adı	Aile adı	Menşei	Eski memuriyeti	Dosya No.	Vazifesi
Agâh	1876 İstanbul	İsmail Hakkı	Özbulan	1903 Sanayii Nefise.	Altunizade Mektebi resim muallimi.	1151	Resim elişi Muallimi (Çalışma ve öğretmesi İdare Meclisince takdir edilmiştir. 6-8-935. $\frac{2}{407}$.
Mustafa Subhi	1874 Sofya	Süleyman	Üşenmez	1890 Darüşşafaka	Telgraf Mektebi Âlisi Muallimi	1166	Riyaziye Muallimi
Hasan Fehmi	1887 İstanbul	M. Nuri B.	Çayköy	1911 Darülfünûn Riyaziye Şubesi.	Kız muallim Mektebi Riyaziye muallimi	1158	Riyaziye Muallimi (Çalışma ve öğretmesi İdare Meclisince takdire şayan görülmüştür. 6-8-935 ve Dosya $\frac{2}{407}$: 86
M. Tahir	1876 İstanbul	Saffet B.	Olgun	1892 Menşei Kütahya Askerî	Ticaret Nezareti Memurin Mümeyyizi.	1175	Türkçe, Edebiyat Muallimi
Şevket	1875 Filibe	Hüseyin E.	Sanarar	1901 Galatasaray L. si	Galatasaray muallimlerinden.	1174	Fransızca (Çalışma ve öğretmesi İdare meclisince takdire şayan görülmüştür 6-4-935 D. $\frac{2}{407}$
Refik	1868 Sinop	Ali E.	Kırış	1887 Darüşşafaka	Üsküdar Kız San'at Mektebi Mual. lerinden	1171	Riyaziye Muallimi
Şükrü	1882 İstanbul	Ömer B.	Has dal	1900 Darüşşafaka	Telgraf mektebi Âlisi Müdürü ve Muallimi	$\frac{2}{418}$	Tarih Muallimi
"	"	"	"	"	"		" "

mahsus sicil defteri 13

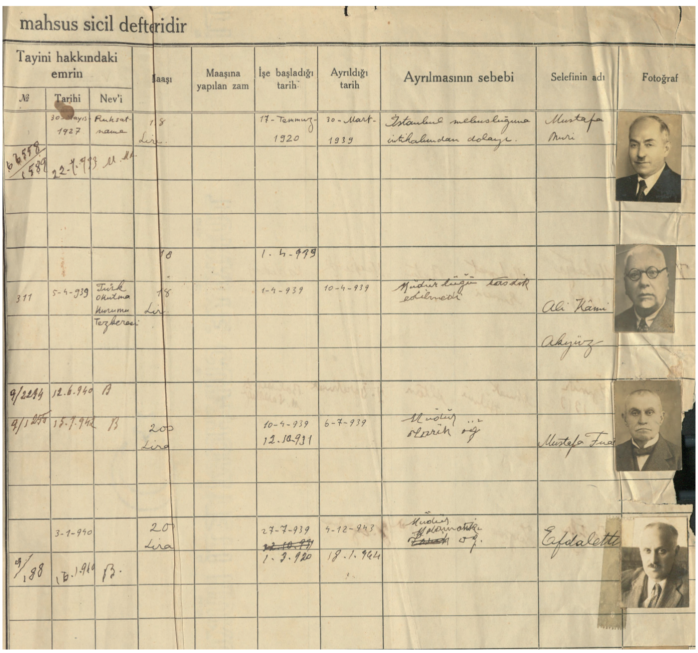
Tayini hakkındaki emrin No.	Tarihi	Nev'i	Maaşı	Maaşına yapılan zam	İşe başladığı tarih	Ayrıldığı tarih	Ayrılmasının sebebi	Selefinin ismi	Fotoğraf
26 / 250	30 mayıs 1927	Ruhsatname	ücret L. 73,20 53,20 37,40 47,80	L. 10 1-10-935	1910 1 Eylül			Binbaşı Ahmed Ziya	
,,	,,	,,	28,60 1936 29,10 29,60 30.10 49.60 ders 58.10	1-6-936 1-10-937 1-6-938 1-10-938	16-12-922 ~~1910~~			Sezayi	
,,	,,	,,	57,5 1936 58 51,50 52. 24	1-6-936 1-10-937 1-6-938	1-3-1920 1920			Abdullah	
,,	,,	,,	52,60 936	1-6-936	1909			Fahri	
,,	,,	,,	75,20 936 75,70 76,20 76.70	1-6-936 1-10-937 1-6-938	20-9-924 ~~1-10-1926~~	31-10-938	Ölmüştür	Ziya	
,, 2959	,, mart 1304	,, Sicilli	52,60 936 53,10 59. 59.50	1-6-936 1-10-937 1-6-938	1-10-926			Mustafa Subhi	
26 / 250	30 mayıs 1927	Ruhsatname	35,40 936 35,90 25,10 36.40 36.90	1-6-936 1-10-937 1-6-938	7 teşrinievvel 1926 tekrar 11-10-935	1-7-933 30-9-938	Telgraf mektebinin Ankaraya naklinden. İzmit Posta ve T. Başmüdürlüğüne	Fethi Sezayi	

EK-3: Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, Sayfa 1.



Memur ve muallimlere

Muallimin adı	Doğduğu memleket ve tarih	Babasının adı	Aile adı	Menşei	Eski memuriyeti	Dosya №	Vazifesi
Ali Kâmi	Mekke 1289	Behcet	Akyüz	1307 Darüşşafaka	P.T.T. sicil ve memurîn müdürü	1150	Müdür ve Fransızca öğret[illegible]
[illegible] Fuat	İstanbul 1280	Mahmut	Aral	Darüşşafaka P.T.T. Fransa	P.T.T. Umum Müdürü		Müdür vekili ve Fransızca öğretmeni
[illegible]alettin [illegible]ver	İstanbul 1873	Cevat	Tekiner	Mülkiye Mektebi			Müdür ve Tarih öğretmeni
Hasan Fehmi	İstanbul 1887	M. Nuri	Çayköy	Darulfünun Riyaziye şubesi 1327	İstanbul Erkek Lisesi		Müdür ve Matematik öğretmeni



mahsus sicil defteridir

Tayini hakkındaki emrin №	Tarihi	Nev'i	Maaşı	Maaşına yapılan zam	İşe başladığı tarih	Ayrıldığı tarih	Ayrılmasının sebebi	Selefinin adı	Fotoğraf
66558 / 1589	30 Mayıs 1927 22-7-933	Ruhsatname M. M.	18 Lira		17-Temmuz-1920	30-Mart-1939	İstanbul mebusluğuna intihabından dolayı.	Mustafa Nuri	
311	5-4-939	Türk Okutma Kurumu Tezkeresi	18 18 Lira		1-4-939 1-4-939	10-4-939	Müdürlüğü tasdik edilmedi	Ali Kâmi Akyüz	
9/2234 9/1[illegible]	12.6.940 13.7.942	B B	200 Lira		10-4-939 12-10-931	6-7-939	Müdür [illegible] Tarih öğ.	Mustafa Fuat	
9/188	3-1-940 13.1.940	B.	20 Lira		27-7-939 ~~[illegible]~~ 1-3-920	5-12-943 18.1.944	Müdür Matematik [illegible] öğ.	Efdalettin	

EK-4: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1. yıl, 2. sayısında yayımlanan "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı" isimli makalesinin tam transliterasyonu.

Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı

1) *n* müsbet bir aded-i tâmme işʿâr edildiği ve bu sûrette gayr-i mahdûdada tezâyud ettiği halde:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots(n-2)^2+(n-1)^2}{n^3}$$

İfadesinin gâyesi $\frac{1}{3}$'e müsâvîdir.

Fi'l-hakīka $(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1)\equiv 3n^2+3n$ mutâbakatında *n*'ye $1,2,3,\ldots,n-1$ kayyım-ı müteʿâkıbesi verilerek teşkîl edilen ifâdât taraf tarafa cemʿ ve tarafeynden aynı hadler ifnâ olunur ise:

$$(n+1)n(n-1)=3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]+3[1+2+3+\cdots+n-1]$$

bulunup burada da vâhidden $n-1$'e kadar aʿdâd-ı tabîʿiyyenin mecmûʿunun müsâvîsi olan $\frac{(n-1)n}{2}$ kıymeti mahalline konulur ve aʿdâd-ı tabîʿiyyenin murabbaʿları mecmûʿunu işʿâr eden birinci küre [kısım?] yalnız bırakılır ise:

$$\frac{2n^3-3n^2+n}{6}=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$$

ve tarafenyn-i müsâvât n^3'ne nisbet olunarak:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

bulunur.

Şimdi *n* suret-i gayr-i mahdûdada tezâyud eylediği halde $\frac{1}{2n},\frac{1}{6n^2}$ kesirleri sıfıra tekarrub edeceklerinden gâye de $\frac{1}{2n}=0,\frac{1}{6n^2}=0$ olmakla:

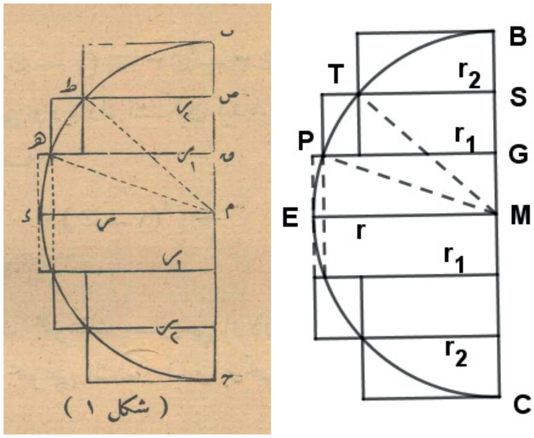
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

olduğu sabit olur.

[226]

2) *M* nısf-ı muhîti dâʾiresini ahz ederek *BC* kutrunu 2*n* aksâm-ı mütesâviyeye taʿbir-i âharla bu nısf-ı dâʿirenin nısf-ı kutrunu *n* müsâvî aksâma ayıralım. *B,C* noktalarıyla taksîmât noktalarından *BC* kutruna ʾamûdlar resm ve bu ʾamûdların nısf-ı muhîti katʿ eylediği noktalardan işbu kutra müvâzîler tersîm eyleyelim. Şimdi şeklin *BC* kutru etrafında devr eylediği tasavvur olunur ise nısf-ı muhîtin bir küre tevlîd edeceği tabîʿi olup bu kürenin

dâhil ve hâricine mersûm birer üstüvâne silsileleri de teşekkül edecektir. Hâric-i küreye mersûm üstüvânelerin ʿadedi $2n$ kadar olduğu halde dâhil-i kürede bulunan üstüvâneler $2(n - 1)$ kadardır. *ME* nısf-ı kutr-ı küresine r ve buna müvâzî olarak resmedilmiş ve üstüvâne kâʿidelerinin nısf-ı kuturlarından ʾibâret bulunmuş olan ʾamûdları da sırasıyla $r_1, r_2, r_3, ..., r_{(n-1)}$ ve hâric-i üstüvâneler mecmûʿu hacmini H_1 ve dâhil-i üstüvâneler mecmûʿu hacmini H_2 ile işʿâr edelim.



Şekil 7.

Üstüvânelerin irtifâʿ-ı müştereki $\frac{r}{n}$ olup bir nısıftaki hârici üstüvânelerin sırasıyla hacimleri:

$$\pi r^2 \times \frac{r}{n}, \pi r_1^2 \frac{r}{n}, \pi r_2^2 \frac{r}{n}, \dots, \pi r_{n-1}^2 \frac{r}{n}$$

olup ʿumûm-ı hârici üstüvânelerin mecmûʿu hacmini bulmak için 2. nısf-ı küredeki üstüvânelerde dâhil-i hesâb edilerek:

$$2\pi r^2 \times \frac{r}{n}, 2\pi r_1^2 \frac{r}{n}, 2\pi r_2^2 \frac{r}{n}, \dots, 2\pi r_{n-1}^2 \frac{r}{n}$$

hacim ifadeleri cemʿ olunarak:

$$H_1 = \frac{2\pi r}{n}[r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2]$$

bulunur.

Dâhil-i üstüvâneler mecmûʿu hacmini taʿyîn için kâʿidelerinin nısf-ı kuturları $r_1, r_2, r_3, ..., r_{(n-1)}$ olan ve küre dâhilinde mütenâzıran vâkiʿ bulunan üstüvâneler hacimlerini cemʿ ederek:

[227]

$$H_2 = \frac{2\pi r}{n}\left[r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2\right]$$

bulunur.

Bu iki hacim taraf tarafa tarh olur ise:

$$H_1 - H_2 = \frac{2\pi r^2}{n}$$

elde edilir. Eğer *n* nâmütenâhî tezâyud ederse $\frac{2\pi r^2}{n}$ kesri sıfıra tekarrub edeceğinden $H_1 - H_2$ tefâzılî de sıfıra tekarrub eyler. H_1 hacmi dâʾimâ tezâyud eylemekle beraber her zamân küre hacminden asgâr bulunacaktır. H_1, H_2 hacimleri için şu tahvilde gâye küre hacminden ʿibâret olduğu âşikâr ve gâyede ise $H_1 - H_2$ tefâzıli sıfıra müsâvî olmasından dolayı $H_1 = H_2$ olacağı tabîʿî bulunmakla küre hacmi *H* ile irâʾe olunarak:

$$Hacim\ H = \lim_{n\to\infty} H_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi r}{n}\left[r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{n-1}^2\right]$$

elde edilir. $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{(n-1)}$ nısf-ı kuturlarının *r* nısf-ı kutru cinsinden kıymetlerini taʿyîn edelim. *MPG* müselles-i kâʾimi'z-zâviyesinden:

$$MP = r, PG = r_1, MG = \frac{r}{n}$$

olmakla:

$$r_1^2 = r^2 - \frac{r^2}{n^2} = r^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

ve *MTS* müselles-i kâʾimi'z-zâviyesinden ise:

$$MT = r, ST = r_2, SM = \frac{2r}{n}$$

olmakla:

$$r_2^2 = r^2 - \frac{4r^2}{n^2} = r^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right)$$

ve kezâ bu suretle:

$$r_3^2 = r^2\left(1 - \frac{3^2}{n^2}\right), \ldots, r_{n-1}^2 = r^2\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

[228]

elde edileceğinden (r^2) madrûb-ı müşterek-i kerresine alınmak sûretiyle $r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{n-1}^2$ ifadeleri cemʿ ve bulunan kıymet mahalline vazʿ edildikte:

$$Hacim\ H = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi r}{n} r^2 \left(n - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^2}\right)$$

veyahut:

$$Hacim\ H = \lim_{n\to\infty} 2\pi r^3 \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}\right)$$

bulunur. Burada sol tarafın gâyesi alınarak:

$$Hacim\ H = 2\pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Hacim\ H = \frac{4}{3}\pi r^3$$

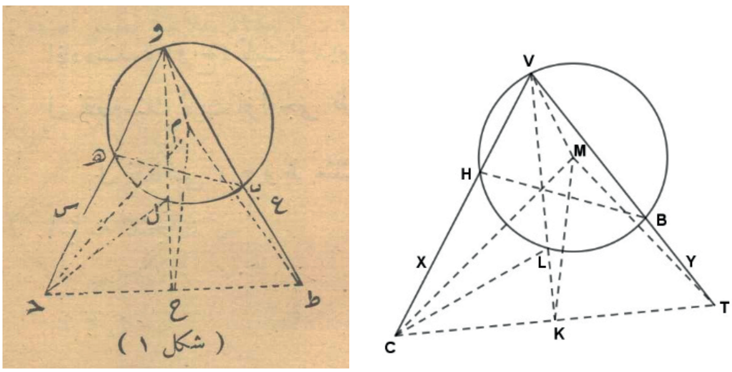
düstûru istihrâc olunur.

Mercân Sultânisi Devre-i Sâniye Riyâziye Muʿallimi Hasan Fehmi

EK-5: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün ***Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası*** **1. yıl, 2. sayısında yayımlanan "Hendese Meselesi" isimli makalesinin tam transliterasyonu.**

Hendese Meselesi

Mesʾele: Bir *XVY* zâviyesinin (*VX*) dılʿı üzere *H*, (*VY*) dılʿı üzerinde *B* noktaları dâʾimâ (Şekil 1) *VH* + *VB* sâbit kalmak üzere intihâb olunduğu halde (*VHB*) gibi müselleslerin hâricine mersûm muhît-i dâʾirelerin bir nokta-i sabiteden mürur edeceğini isbât ve irâʿe eylemek matlûbdur.



Şekil 8.

Hal: [Bir noktanın bir dâʾireye nazaran kuvvetine ʿâʾid nazariyâta tatbîkan] (*VH*) dılʿını (*VB*) ve (*VB*) dılʿını (*VH*) kadar temdîd edelim. Bu suretle:

$$VC = VT = VH + VB = u$$

olduğu gibi *CVT* müsellesi dahi bir müselles-i mütesâvî's-sâkeyn olacaktır.

C, T noktalarının (VHB) dâʾiresine nazaran kuvvetleri nazîr nazîre:

$$CH \times VC,\ TB \times VT$$

olup mecmûʿları:

$$CH \times VC + TB \times VT = u\,(CH + TB) = u^2$$

bulunur ki bu mecmûʿ sabittir. İşte bu hâssa mesʾelenin miftâhıdır. Fi'l-hakīka MM bu dâʾirenin merkezi ve (VM) de nısf-ı kutru olduğu halde kuvvetleri mecmûʿu:

$$(\overline{TM}^2 - \overline{VM}^2) + (\overline{CM}^2 - \overline{VM}^2) = u^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

şeklinde yazılabileceği maʿlûmdur. CMT müsellesinden hatt-ı vâsıt daʿvâsına tevfîkan:

$$(\overline{TM}^2 + \overline{CM}^2) = 2\overline{MK}^2 + 2\overline{CK}^2$$

kıymeti (1) numaralı ifâdede mahalline vazʿ olunarak:

$$2\overline{MK}^2 + 2\overline{CK}^2 - 2\overline{VM}^2 = u^2$$

[230]

$$\overline{MK}^2 - \overline{VM}^2 = \frac{u^2}{2} - \overline{CK}^2$$

bulunur. Bu ifâdenin taraf-ı evveli K noktasının M dâʿiresine nazaran kuvvetini işʿâr eylediği ve taraf-ı sânînin ise sâbit bir mikdâra müsâvî olduğu görüldüğünden K noktasının M dâʾiresine nazaran kuvvetinin sâbit olacağı istidlâl olunur.

M dâʿiresi VK ʿamûdunu L noktasında katʿ eylesin. İşte aranılan nokta-i sâbite bu noktadan ʿibârettir. Fi'l-vâkiʿ:

$$KL \times VK = \frac{u^2}{2} - \overline{CK}^2 \qquad (2)$$

ifâdesinde (VK) sâbit olduğu gibi taraf-ı sânîde esâsen sâbit olmakla KL buʿdunun ve binâʾen-ʿaleyh L noktasının sâbit olacağı tabîʿîdir.

L noktası, CVT müsellesinin hâricine mersûm dâʾirenin merkezini teşkil eder, bunun isbâtına gelince:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{\overline{VC}^2}{2}$$

kıymeti (2) numaralı ifâdede vazʿ olunarak:

$$KL \times VK = \frac{\overline{VC}^2}{2} - \overline{VK}^2 = \frac{\overline{VC}^2 - 2\overline{CK}^2}{2} = \frac{\overline{VK}^2 + \overline{CK}^2 - 2\overline{CK}^2}{2} = \frac{\overline{VK}^2 - \overline{CK}^2}{2}$$

veya:

$$2KL \times VK = \overline{VK}^2 - \overline{CK}^2$$

ve bu ifâdenin sol [sağ] tarafına:

$$\overline{KL}^2 - \overline{KL}^2$$

ʾilâvesiyle:

$$2KL \times VK = \overline{VK}^2 - \overline{CK}^2 + \overline{KL}^2 - \overline{KL}^2$$

[231]

$$\overline{KL}^2 + \overline{VK}^2 - 2KL \times VK = \overline{CK}^2 + \overline{KL}^2$$

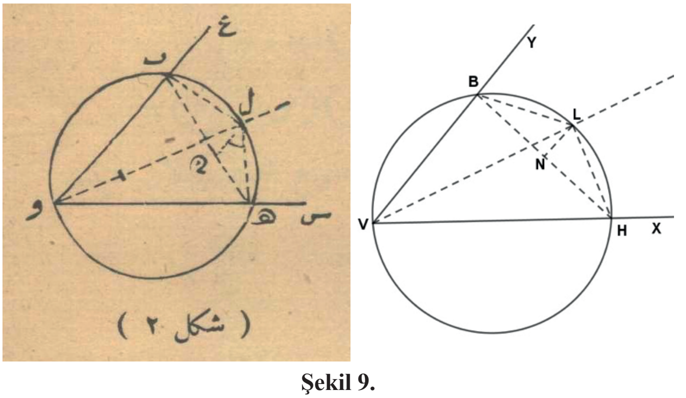
$$(VK - KL)^2 = \overline{CL}^2$$

$$\overline{VL}^2 = \overline{CL}^2$$

$$VL = CL$$

bulunur ki bundan da (L) noktasının (CVT) müsellesinin hâricine mersûm dâʾire-i merkezinden ʿibâret olduğu tezâhür eder.

İkinci Sûret-i Hal: [Batlamyûs Daʿvâsına tevfîkan] *BVH* müsellesinin hâricine mersûm muhît-i dâʾire *XVY* zâviyesinin hatt-ı münsafını *L* noktasında katʿ eylesin (Şekil 1). Batlamyûs daʿvâsını dâhil-i dâʾireye mersûm (*VBLH*) zû-erbeʿati'l-adlâʿına tatbîk edelim.



Şekil 9.

$$LH \times BV + LB \times HV = BH \times LV$$

veya:

$$kavs\ LB = kavs\ LH$$

olmasından dolayı:

$$LB = LH$$

vazʿ olunduğu gibi tarafeyn-i müsâvât BH ile de taksîm olunarak:

$$\frac{LH}{BH} \times BV + \frac{LH}{BH}\ HV = LV$$

$$\frac{LH}{BH}(BV + HV) = LV$$

bulunur.

Faraziyemiz mûcibince $BV + HV$ sâbittir. Diğer taraftan BHL müselles-i mütesâvî’s-sâkeyninde L zâviyesi V zaviyesinin mütemmimi olduğundan dolayı bir zâviye-i sâbiteden ʿibârettir.

Bu müselles-i mütesâvî’s-sâkeynde LN irtifâʿı resmolunarak husûle gelen LNH müselles-i kâʾimü’z-zâviyesinde:

$$\frac{HN}{LH} = \cos NHL = \cos\frac{1}{2}V$$

[232]

veya:

$$\frac{2NH}{LH} = \frac{BH}{LH} = 2\cos\frac{1}{2}V$$

ve buradan:

$$\frac{LH}{BH} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}V}$$

olur ki bundan da $\frac{LH}{BH}$ nisbetinin sâbit olduğu anlaşılır ve demek ki LV tûlü sâbit ve binâ’en-ʿaleyh L noktası bir noktâ-i sâbiteden ʿibârettir. O halde:

$$BV + HV$$

sâbit olduğu halde BVH müsellesinin hâricine mersûm muhît-i dâʾirenin L gibi bir noktâ-i sâbiteden mürur edeceği isbât edilmiş olur.

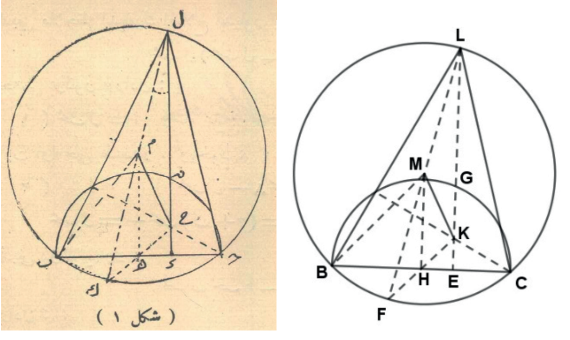
Mercân Sultânisi Devre-i Sâniye Riyâziye Muʿallimi

Hasan Fehmi

EK-6: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1. yıl, 3. sayısında yayımlanan "Müsellesât[1]" isimli makalesinin tam transliterasyonu.

Müsellesât [1]

16) (*BCL*) gibi bir müselleste irtifâʿların nokta-i tekâtuʿı ile hâricine mersûm dâʾire merkezi beynine mevsûl *MK* hattı müsellesin kâʾidesinin nısfına müsâvî olmak için iktizâ eden şerâʾitin taharrîsi matlûbtur.



Şekil 10.

Hal: *M* merkeziyle *L* reʾsini vasal edelim. Husûle gelen *LMK* müsellesinden:

$$\overline{MK}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LK}^2 - 2ML \times LK \cos MLK$$

ve *M* merkezinden *BC* kâʾidesine (Şekil1) *MH* ʿamûdunu ve (*L*) reʾsinde mürûr eden *LF* kutrunu resmedelim; bir hatt-ı müstakīm istikâmetinde bulundukları bi'l-hendese müsbet olan *F, H, K* noktaları arasını birleştirelim. Şu halde:

$$2MH = LK$$

ve halbuki *MBH* müselles-i kâʾimü'z-zâviyesinden:

$$MH = r \cos L$$

olmakla bundan:

$$2r \cos L = LK$$

bulunur. Bu kıymet bâlâda yerine konulur ve *ML* = *r* vazʿedilirse:

$$\overline{MK}^2 = r^2 + 4r^2 \cos L \left[\cos L - \cos(C - B)\right]$$

olur. Burada (*MLK*) yerine ($C - B$) vazʿ edilmiştir. Çünkü hendesece maʿlûm olacağı üzere irtifâʿ ile hatt-ı munsif arasındaki zâviye, kâʿide zâviyelerinin nısf-ı faslına müsâvî olup burada zâviye-i mezkûrenin iki misli olan *MLK* zâviyesi bi't-tabʿi $C - B$ tefâzuline müsâvîdir. Diğer taraftan:

[342]

$$L + C + B = \pi$$

olduğundan:

$$\cos L = - \cos(C + B)$$

olmakla:

$$\overline{MK}^2 = r^2 - 4r^2 \cos L \, [\cos(C + B) + \cos(C - B)]$$

ve buradan:

$$\overline{MK}^2 = r^2(1 - 8 \cos L \cos C \cos B)$$

elde edilir. Eğer burada:

$MK = BH = r \cos L$ farz olunur ve:

$$sin^2 L = 1 - cos^2 L$$

olduğu mülâhaza edilerek ıslâh edilir ise:

$$\cos L \, (\cos L - 8 \cos B \cos C)$$

netîcesi bulunur buradan:

1) $\cos L = 0$ ve binâ'en-ʿaleyh $L = 90^0$ olur ki müsellesin bir müselles-i kâʾimü'z-zâviyeden ʿibâret olacağı tabîʿîdir. Veyahut:

2) $\cos L - 8 \cos B \cos C = 0$ olur ki

$$\cos L = - \cos(B + C) = - \cos C \cos B + \sin C \sin B$$

olduğu düşünülerek:

$$\sin B \sin C - 9 \cos B \cos C = 0$$

buradan:

$$\tan B \tan C = 9$$

münâsebeti bulunur.

Bu münâsebette *B* zâviyesine verilen keyfî her bir kıymet için *C* zâviyesine ʿâʾit bir kıymet elde edileceğinden ʿaded-i hal nâmütenâhî olur.

Bu müsellesler gâyet basit bir tersîm-i hendesî ile kâbil-i teşkildir. Fiʾl-hakīka *BC* kutur olmak üzere bir nısf-ı dâʾire resm olunur ise:

$$\overline{GE}^2 = CE \times EB = \frac{\overline{LE}^2}{\tan B \tan C}$$

olup

[343]

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{LE}^2}{9}$$

veya:

$$3EG = LE$$

bulunur.

Bu hassa-i hendesiyye nazar-i dikkate alınarak *BC* gibi keyfi kâʿideler üzerine resm olunan nısf-ı dâʾire muhitini katʿ eden ʿamûdun tûlü daha iki misli temdîd olunarak bulunacak *L* gibi noktalarla teşkîl edilen müselleslerin kâffesi birer cevap olacaktır.

Hasan Fehmi

EK-7: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1. yıl, 3. sayısında yayımlanan "Bir Gâye Meselesi" isimli makalesinin tam transliterasyonu.

Bir Gâye Meselesi

17) $\frac{1\times2}{3\times4\times5\times6} + \frac{2\times3}{4\times5\times6\times7} + \cdots + \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ mecmûʿunun gâyesi $\frac{1}{9}$ 'a müsâvîdir.

Hal: Bu mecmûʿun *n*'ninci haddi:

$$\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \equiv \frac{E}{(n+2)(n+3)} + \frac{B}{(n+3)(n+4)} + \frac{C}{(n+4)(n+5)}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, *E, C, B*'nin kıymetlerini bulalım. Bu ifade:

$$n(n+1) \equiv (n+4)(n+5)E + (n+2)(n+5)B + (n+2)(n+3)C$$

şekline konularak bundan da:

$$n^2 + n \equiv (E + B + C)n^2 + (9E + 7B + 5C)n + (20E + 10B + 6C)$$

bulunur. Burada n^2, n’nin emsâlleri yekdiğerine müsâvî olacağından:

$$E + B + C = 1$$

$$9E + 7B + 5C = 1$$

$$20E + 10B + 6C = 0$$

muʿâdeleleri elde edilir.

Bu muʿâdelâtın halliyle:

$$E = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{8}{3} \quad C = \frac{10}{3}$$

kıymetleri bulunur.

Demek ki n’ninci hadd:

$$\frac{1}{3(n+2)(n+3)} - \frac{8}{3(n+3)(n+4)} + \frac{10}{3(n+4)(n+5)}$$

[345]

veya: $$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] - \frac{8}{3}\left[\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right] + \frac{10}{3}\left[\frac{1}{(n+4)(n+5)}\right]$$

şeklindedir. Şimdi n’ye 1, 2, 3, … kıymetlerini vererek husûle gelen ifâdâtı taraf tarafa cemʿ edelim.

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3 \times 4}\right] - \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4 \times 5}\right] + \frac{10}{3}\left[\frac{1}{5 \times 6}\right]$$
$$\frac{2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4 \times 5}\right] - \frac{8}{3}\left[\frac{1}{5 \times 6}\right] + \frac{10}{3}\left[\frac{1}{6 \times 7}\right]$$

.

.

$$\frac{n(n+2)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] - \frac{8}{3}\left[\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right] + \frac{10}{3}\left[\frac{1}{(n+4)(n+5)}\right]$$

Verilen Mecmûʿ

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(n+2) \times (n+3)}\right]$$
$$- \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3) \times (n+4)}\right]$$
$$+ \frac{10}{3}\left[\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(n+4) \times (n+5)}\right]$$

bulunur. Bir mecmûʿun gâyesi aksâmının gâyeleri mecmûʿuna müsâvî olduğundan verilen mecmûʿun gayesini bulmak için kendisini teşkil eden üç kısmın gâyeleri mecmûʿunu alalım. Bu gâyeler ise:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots\right]=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots\right]=\frac{1}{4}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\cdots\right]=\frac{1}{5}$$

den ʿibârettir.

[346]

Fi'l-hakîka:

$$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ldots$$

tarzında bu kesirlerin sıra ile iki kesir tefâzulî oldukları nazar-ı dikkate alarak mezkûr gâyelerin sıhhati taʿyîn olunabilir. Şu halde:

$$g\hat{a}ye-i\ matl\hat{u}ba=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{10}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{9}$$

olduğu görülür.

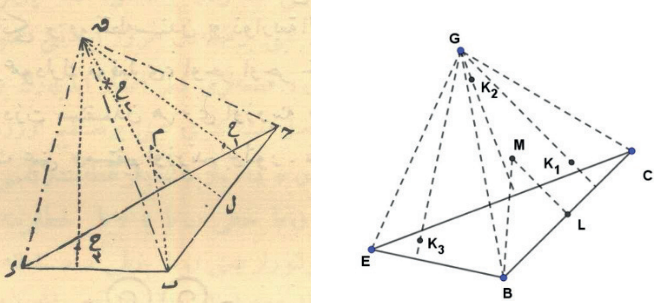
Mercan Sultânîsi Riyâziye Muʿallimlerinden

Hasan Fehmi

EK-8: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1. yıl, 4. sayısında yayımlanan "Müsellesât[2]" isimli makalesinin tam transliterasyonu.

Müsellesât[2]

23) *G* noktası *BCE* müsellesinin müstevîsinde vâkiʿ herhangi bir noktayı, K_1, K_2, K_3 noktaları da nazîreleri de nazîr nazîre *GCB*, *GCE*, *GBE* müselleslerinin irtifâʿlarının mahall-i telâkkīlerinin irâʾe eylediği halde: $K_1K_2K_3$, *BCE* müsellesleri yekdiğerine muʿâdil olur.



Şekil 11.

Hal: GK_1, GK_2, GK_3 hattlerini resmedelim. K_1GK_3, CBE zâviyeleri yekdiğerinin mütemmimi olduklarından K_1GK_3 müsellesiyle BCE müselleslerinde birer zâviye yekdiğeriyle mütemmim olup satıhlar arasındaki nisbet, bu zaviyelere muhît olan dılʿların hâsıl-ı darbları arasındaki nisbete müsâvî bulunur. O halde:

$$\frac{K_1GK_3}{BCE} = \frac{GK_1 \times GK_3}{BC \times BE}$$

olur.

GCB müsellesinin hâricine mersûm dâʾire merkezini *M* ile gösterelim. Hendesece maʿlûmdurki *M* merkezinden *BC* dılʿına tenzîl olunan *ML* ʿamûdu GK_1 tûlünün nısfına müsâvîdir.

$$BGC = n$$

farezîle:

[441]

$$GK_1 = 2ML = BC \cot n$$

elde edilir.

GBE müsellesinin hâricine mersûm dâʾirenin merkezi *M'* ve bu noktadan *BE* dılʿına tenzîl olunan ʿamûdun mevkıʿî *T* ile gösterilirse *BM'T* zâviyesi *BGE* zâviyesine müsâvî olup:

$$BGE = h$$

farezîle:

$$GK_3 = 2M'T = BE \cot h$$

bulunur.

GK_1. GK_3 için bulunan işbu kıymetler mahalline vazʿ olunarak:

$$\frac{K_1GK_3}{BCE} = \cot n \,.\cot h \ldots \qquad (1)$$

İstihsâl olunur.

K_2 GK_3 müsellesiyle BCE müsellesinde K_2 GK_3 zâviyesiyle BEC zâviyeleri birbirine müsâvî olduklarından bu iki müsellesin satıhları arasındaki nisbet bu zâviyeleri muhît olan dılʿların hâsıl-ı darbları arasındaki nisbete müsâvî olduğundan:

$$\frac{K_2GK_3}{BCE} = \frac{GK_2 \times GK_3}{CE \times BE}$$

olup GCE müsellesinin hâricine mersûm dâʾire merkezini M'' ve bu noktadan CE dılʿına tenzîl olunan ʿamûdun mevkıʿini de H ile irâʾe edersek $CM''H$ zâviyesi CGE zâviyesine müsâvî olacağından $CGE = t$ farezîle:

$$GK_2 = 2M''H = CE \cot t$$

bulunmakla GK_2.GK_3 için bulunan kıymetler mahalline konularak:

$$\frac{K_2GK_3}{BCE} = \cot t \,.\cot h \ldots \qquad (2)$$

elde edilir.

[442]

K_1GK_2 müsellesiyle BCE müselleslerinde K_1GK_2 zâviyesiyle BCE zâviyesi birbirine müsâvî olduklarından ʿaynı minvâl üzere:

$$\frac{K_1GK_2}{BCE} = \cot n \,.\cot t \ldots \qquad (3)$$

bulunur.

(1) numaralı ifâdeden (2), (3) numaralı ifâdât taraf tarafa tarh olunarak:

$$\frac{K_1GK_3 - K_2GK_3 - K_1GK_2}{BCE} = \cot n \cot h - \cot t \cot h - \cot n \cot t$$

$$\frac{K_1K_2K_3}{BCE} = \cot n \cot t \cot h \,(\tan t - \tan n - \tan h)$$

bulunur. Halbuki:

$$t = n + h$$

olduğundan:

$$\tan t = \tan(n+h) = \frac{\tan n + \tan h}{1 - \tan n \tan h}$$

kıymetini mahalline koyduğumuz gibi küre hâricindeki (cot *t*)yerine de:

$$\frac{1 - \tan n \tan h}{\tan n + \tan h}$$

vazʿ ederek ıslâh edecek olur isek:

$$\frac{K_1 K_2 K_3}{BCE} = 1$$

bulunacağından $K_1 K_2 K_3$müsellesinin *BCE* müsellesine muʿâdil olacağı sâbit olur.

Tenbîh: Eğer *G* noktası müsellesin dâhilinde alınacak olursa (1), (2), (3) numaralı ifâdâtın taraf tarafa cemʿi iktizâ edeceği gibi:

$t + n + h = 2\pi$ $t + n + h = 2\pi$

[443]

olacağından:

$$\tan t \,.\, \tan n \,.\, \tan h = \tan t + \tan n + \tan h$$

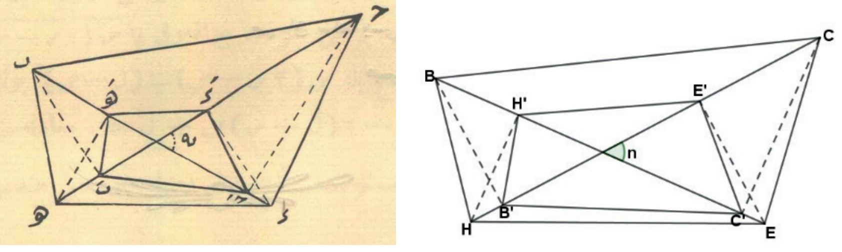
olduğunu düşünerek mecmûʿu mezkûrun ıslâhı icâb eder.

Bir Gâye Meselesi

24) *BCEH* münharif muhaddebinde, reʾslerin *CH*, *BE* kuturları üzerindeki mürtesimleriyle *B'C'H'E'* münharifi ve bu ikinci münharifin reʾslerinde tekrar kuturlar üzerindeki mürtesimleri vâsıtasıyla *B''C''H''E''* münharifi ve bu suretle bir suret-i gayr-i mahdûdada devâm olunarak münharifleri teşkil olunsa:

$$\frac{B'C'H'E' + B''C''H''E'' + \cdots}{BCHE}$$

nisbetinin gayesini taʿyîn eylemek.



Şekil 12.

Halli: *CH*, *BE* kuturları arasındaki zâviyeye *n* diyelim:

$$BCHE = \frac{1}{2} CH \times BE \sin n$$

olduğu maʿlûmdur. Bunun gibi:

$$B'C'H'E' = \frac{1}{2} C'H' \times B'E' \sin n$$

olup:

$$C'H' = CH \cos n$$

$$'E' = BE \cos n$$

[444]

olduklarından:

$$B'C'H'E' = \frac{1}{2} CH \times BE \cos^2 n \sin n$$

bulunur.

Bu minvâl üzere:

$$B''C''H''E'' = \frac{1}{2} CH \times BE \cos^4 n \sin n$$

ve ilâ-âhir bulunacağından:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B'C'H'E' + B''C''H''E'' + \cdots}{BCHE} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2} CH \times BE \sin n \left(\cos^2 n + \cos^4 n + \cdots + \cos^{2x} n\right)}{\frac{1}{2} CH \times BE \sin n}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos^2 n + \cos^4 n + \cdots + \cos^{2x} n\right) = \frac{\cos^2 n}{1 - \cos^2 n} = \cot^2 n$$

olur.

Mercan Sultânîsi Riyâziye Muʿallimlerinden

Hasan Fehmi

EK-9: Hasan Fehmi [Çayköy]'ün *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* **2. yıl, 6. sayısında yayımlanan "Cebir" isimli makalesinin tam transliterasyonu.**

Cebir

$$y_1 = \frac{1}{b^2 - c^2}\left[\frac{b\sin x}{b + c\cos x} - \frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{b^2 - c^2}\left[\frac{b\sin x}{b + c\cos x} - \frac{2c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\arctan\left(\frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$y_3 = \frac{1}{b^2 - c^2}\left[\frac{b\sin x}{b + c\cos x} - \frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\arccos\left(\frac{c + b\cos x}{b + c\cos x}\right)\right]$$

$(\mathbf{1}°)$ tâbiʿlerinin müştaklarını hesâb etmek. $(\mathbf{2}°)$ y_1, y_2, y_3 tâbiʿlerinin müştaklarının yekdiğerine müsâvî olduğunu tahkik etmek. $(\mathbf{3}°)$ Tevâbiʿ-i mezkûra-i müştakâtının müsâvâtını bilâ-tahkīk istihrâc etmek. [y_3 tâbiʿinde mevcûd kavs-i tamâm-ı ceybin (0) ile π arasında mahsûr bulunduğu ve $\frac{b+c\cos x}{\sin x}$ 'nin müsbet olduğu kabûl edilecektir]. $(\mathbf{1}°.\ \mathbf{2}°)$— y_1, y_2, y_3 tevâbiʿinin müştakâtını hesâb ve mezkûr müştakların müsâvâtını tahkik etmek. Bi'l-suhûle görüleceği üzere:

$$\frac{b\sin x}{b + c\cos x}$$

nin müştakı:

$$\frac{b(c + b\cos x)}{(b + c\cos x)^2}$$

olup:

$$-\frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\arctan\frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

[617]

nin müştakı ise:

$$\frac{-c(b + c\cos x)}{(b + c\cos x)^2}$$

dir.

O halde y_1'in müştakı olmak üzere:

$$\frac{\cos x}{(b + c\cos x)^2}$$

elde edilir.

Kezâ

$$-\frac{2c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left(\frac{b-c}{\sqrt{b^2-c^2}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

müştakı da

$$-\frac{c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$$

olduğundan y_2 tâbiʿinin de müştakı hesâb olunur ise:

$$\frac{\cos x}{(b+c\cos x)^2}$$

olduğu görülür.

Bundan:

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}$$

olacağı istihrâc edilmiş olur.

El-hâsıl

$$-\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\arccos\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)$$

nın müştakını alalım. Bunun için kavs tamâm-ı ceybin (0) ile π arasında mahsûr bulunduğu naza-ı dikkate alınarak:

[618]

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c+b\cos x}{b+c\cos x}\right)^2}}\cdot\frac{(b+c\cos x)(-b\sin x)-(c+b\cos x)(-c\sin x)}{(b+c\cos x)^2}$$

v

veya

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c\cos x)^2}{(b^2-c^2)\sin^2 x}}\cdot\frac{-(b^2-c^2)\sin x}{(b+c\cos x)^2}$$

olup $\frac{b+c\cos x}{\sin x}$'nin müsbet kabûl olunduğu mülâhaza olunarak:

$$\frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{b+c\cos x}{\sin x}\cdot\frac{-(b^2-c^2)\sin x}{(b+c\cos x)^2}$$

ve baʿde'l-ilâh:

$$\frac{-c(b+c\cos x)}{(b+c\cos x)^2}$$

bulunur. Bu netîceye nazaran y_3 tabîʿinin müştakı da:

$$\frac{\cos x}{(b + c\cos x)^2}$$

den ʿibâret olduğu görülür. O halde:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_3}{dx} = \frac{\cos x}{(b + c\cos x)^2}$$

olduğu tahkīk edilmiş olur.

$(\mathbf{3}°)$ y_1, y_2, y_3 tevâbiʿinin müştakâtının müsâvâtını bilâ-tahkīk istihrâc eylemek.

Bunun için $y_1 - y_2$ ve $y_1 - y_3$ tefâzullerinin taʿbîr-i âharla:

$$z_1 = \arctan\frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

$$z_2 = \arctan\frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\frac{x}{2} \quad (\mathbf{1}°. \mathbf{2}°)$$

[619]

$$z_3 = \arccos\left(\frac{c + b\cos x}{b + c\cos x}\right)$$

farzolunur ise $z_1 - 2z_2$ ve $z_1 - z_3$ tefâzullerinin sâbit isbât eylemek lâzımdır.

$z_1 - 2z_2$ tefâzuli sabittir çünkü:

$$\tan(z_1 - 2z_2) = \frac{\tan z_1 - \tan 2z_2}{1 + \tan z_1 \tan 2z_2}$$

olup:

$$\tan z_1 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

olduğu gibi:

$$\tan z_2 = \frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\frac{x}{2}$$

ve bundan $\tan 2z_2$'nin kıymeti olan:

$$\tan 2z_2 = \frac{2\dfrac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\tan\dfrac{x}{2}}{1 - \dfrac{b - c}{b + c}\tan^2\dfrac{x}{2}}$$

bulunarak mahallerine ikame olunur ise:

$$\tan(z_1 - 2z_2) = 0$$

ve buradan:

$$z_1 - 2z_2 = k\pi$$

olduğu istihrâc edilmiş olur.

$z_1 - z_3$ tefâzulî de sabittir çünkü:

$$\tan(z_1 - z_3) = \frac{\tan z_1 - \tan z_3}{1 + \tan z_1 \tan z_3}$$

olup:

[620]

$$\cos z_3 = \frac{c + b\cos x}{b + c\cos x}$$

olduğu ve z_3 kavsinin (0) ile π arasında mahsûr ve $\frac{b+c\cos x}{\sin x}$ 'nin müsbet olduğu mülâhaza olunarak:

$$\sin z_3 = \sqrt{-\left(\frac{c + b\cos x}{b + c\cos x}\right)^2} = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)\sin^2 x}{(b + c\cos x)^2}}$$

veya bi'l-ıslâh:

$$\sin z_3 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{b + c\cos x}$$

bulunur. Buradan:

$$\tan z_3 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}\sin x}{c + b\cos x}$$

elde edilir ki bu kıymete nazaran:

$$\tan z_3 = \tan z_1$$

olduğu anlaşılır.

O halde:

$$\tan(z_1 - z_3) = 0$$

ve buradan:

$$z_1 - z_3 = k\pi$$

olduğu istihrâc edilmiş olur.

Hasan Fehmi

Hakem Değerlendirmesi: Dış bağımsız.
Çıkar Çatışması: Yazar çıkar çatışması bildirmemiştir.
Finansal Destek: Yazar bu çalışma için finansal destek almadığını beyan etmiştir.
Teşekkür: Makalenin ilk okumalarını yapan Mertkan Şimşek'e ve eşim Semiha Betül Takıcak'a, benimle Hasan Fehmi'nin Darüşşafaka'daki arşiv bilgilerini paylaşan Darüşşafaka Müzesi Arşiv Uzmanı Gizem Yıldız Dikmen'e ve değerli görüşleriyle makaleye katkı yapan derginin hakemlerine teşekkür ederim.

Peer-review: Externally peer-reviewed.
Conflict of Interest: The author has no conflict of interest to declare.
Grant Support: The author declared that this study has received no financial support.
Acknowledgments: I would like to thank Mertkan Şimşek and my wife Semiha Betül Takıcak for the first reading of the article, Gizem Yıldız Dikmen, Archivist at Darüşşafaka Museum, who shared Hasan Fehmi's archival information with me, and the referees of the journal who contributed to the article with their valuable opinions.

KAYNAKÇA / BIBLIOGRAPHY

Arşiv Belgeleri Kaynakları

Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-1.

Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, Öğretmen Sicil Defteri-2, Dosya No:1158.

Darüşşafaka Cemiyet Müzesi, İdare Memurları Sicil Defteri, sayfa 1.

Basılı Kaynaklar

Baltacıoğlu, Ali. "Müderris Şükrü [Sayan (1884-1943)]." *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 20, 2 (2019): 127–32.

Gök, Mehmet. "Matematikçi Mehmet İzzet'in Hayatı ve Bilimsel Çalışmaları." Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, 2022.

Günergun, Feza. "Darülfünûn Fünun (Fen) Fakültesi Mecmuası (1916-1933)." *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 1 (1995): 285–349.

Güzel, Abdurrahim. "İlk Heyet-i İlmiye çalışmaları, alınan kararlar ve dini tedrisat." *Erciyes Üniversitesi İlahiyat Fakültesi Dergisi* 5, 4 (1987): 337–56.

Hasan Fehmi [Çayköy]. "Arz-ı Maksat." *Riyâziyyât* 1, 1 (1911): 1–2.

———. "Bir Gâye Meselesi." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 3 (1332): 344–46.

———. "Cebir." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 2, 6 (1333): 616–20.

———. "Hendese Meselesi." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 2 (1332): 229–32.

———. "Küre Hacminin Bi'l-Cebr İstihrâcı." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 2 (1332): 225–28.

———. "Merhum Riyaziyeci Mehmet İzzet." *Yeni Sabah Gazetesi*. 05 Ağustos 1940.

———. "Müsellesât [1]." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 3 (1332): 341–43.

———. "Müsellesât [2]." *Darülfünûn Fünûn Fakültesi Mecmuası* 1, 4 (1332): 440–44.

"İstanbul'un İkinci Seçmen Listesi." *Vakit Gazetesi*. 15 Şubat 1943.

Maltepeler, Selim. "Meşrutiyet Döneminde Yayımlanan Bir Matematik Dergisi ve Sorularının Analizi: Riyaziyat Örneği." Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 2013.

Şenoğlu, Kemal. "Heyet-i İlmiye." *Atatürk Ansiklopedisi*, https://ataturkansiklopedisi.gov.tr/bilgi/heyet-i-ilmiye/.

Tanır, Engin Deniz, ve Cengiz Aslan. "Birinci Heyet-i İlmiye ve Çalışma Esasları." *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi* 52, 1 (2019): 251–76.