KOMPLESK VARİYANS TAHMİNLERİ ve YAKLAŞIK F TESTLERİ

Fatin SEZGİN (1)

Ö Z E T

Araştırıcılar bazı hallerde, bir değişkenin varyansını, birden fazla bağımsız variyansın lineer bir fonksiyonu olarak tahmin etmek zorunda kalabilirler.

Bu tip variyans tahminlerinin dağılışı ve uygulanacak testler ana hatlarıyla açıklanmıştır. Problemin, güvenaralığı, ortalamaların mukayesesi ve variyans analizine uygulanışı gösterilmiştir.

I. GİRİŞ

Variyans analizinde çeşitli kaynakların önem kontrolü;

$$F = \frac{\text{KAYNAĞIN KARELER ORTALAMASI}}{\text{HATA KARELER ORTALAMASI}} \quad \ldots\ldots(1)$$

şeklinde ifade edilen F oranı yardımıyla yapılır. Tamamiyle şansa bağlı deneme planı, Latin Karesi, şansa bağlı tam bloklar gibi basit ve sade planların kullanılması halinde, test edilecek olan hipotez sayısı iki-üç tanedir ve bunların hepsi için kullanılacak hata kareler ortalaması aynıdır. Meselâ; Eisenhart (1974) tarafından tarif edilmiş bulunan çeşitli modeller kullanıldığında c sıralı bir Latin Karesinde, variyans analizi tablosu Cetvel-1 de gösterildiği gibi olacaktır.

(1) Atatürk Üniversitesi, Zir. Fak. Zootekni Bölümü Doçenti.
Ziraat Dergisine Geliş Tarihi :

Cetvel-1. Bir Latin Karesinde Kareler Ortalamalarının Beklenen Değerleri.

Kaynak	S.V.	E (K . O.)		
		Model I (Sabit)	Model II (Şansa bağlı)	Sıra, sütün, şansa bağlı muameleler sabit
Sıralar	c—1	$\sigma_e^2 + \frac{c}{c-1}\sum\alpha_i^2$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_a^2$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_a^2$
Sütunlar	c—1	$\sigma_e^2 + \frac{c}{c-1}\sum\beta_j^2$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_b^2$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_b^2$
Muameleler	c—1	$\sigma_e^2 + \frac{c}{c-1}\sum\gamma_k^2$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_m^2$	$\sigma_e^2 + \frac{c}{c-1}\sum\gamma_k^2$
Hata	(c—1) (c—2)	σ_e^2	σ_e^2	σ_e^2

Model ne olursa olsun, Cetvel-1 de bütün kaynaklar hataya göre kontrol edilir. Mesalâ, sıraların kontrolünde F değerinin, F cetvelindeki (c-1), (c-1) (c-2) S.V.'lı F_α değerinden büyük çıkması,

$$\frac{\sigma_e^2 + \frac{c}{c-1}\sum\alpha_i^2}{\sigma_e^2} = 1 + \frac{\frac{c}{c-1}\sum\alpha_i^2}{\sigma_e^2} \qquad ......(2)$$

eşitliğinde $\sum\alpha_i^2$'nin α önem seviyesinde sıfırdan büyük olması veya $H_O : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ..., = \alpha_c$ hipotezinin reddedilmesi anlamına gelir. α_i faktörleri bir populasyondan alınan şans örneği ise, o zaman $E(\alpha_i) = O$ $E(\alpha_i^2) = \sigma_a^2$ olmak üzere Model II ortaya çıkmış olur. F değerinin kritik bölgeye düşmesi ise,

$$\frac{\sigma_e^2 + c\,\sigma_a^2}{\sigma_e^2} = 1 + \frac{c\,\sigma_a^2}{\sigma_e^2} \qquad ...... (3)$$

oranını 1 den önemli derecede büyük çıkaran bir $\sigma_a^2 > 0$ variyans unsurunun varlığına işaret eder.

Kareler ortalaması beklenen değerlerinin oranı, yukarıda olduğu gibi, önemi kontrol edilen kaynağın tesirini belirten $\frac{c}{c-1} \sum \alpha_i^2$ veya $c\,\sigma_a^2$ gibi unsurlar hariç, pay ve paydada aynı terimleri ihtiva ediyorsa, uygulanan F testi sapmasızdır (unbiased) denir. Sapmalı F oranları, araştırıcıları yanlış hükümler vermeğe sevkeder. Bu sebepledir ki meselâ, içiçe sınıflamayla kurulmuş bir denemeden elde edilen Cetvel-2 de her kaynak, kendine en uygun düşen bir hata ile kontrol edilmelidir. Variyans analizi cetvelinin hazırlanışı esnasında E.(K.O) sütununu da yazmanın büyük pratik faydaları vardır. Böylece her bir kaynakta mevcut variyans unsurları ortaya çıkmış olur. Buna dayanılarak da F oranınında hangi kaynağın paydaya alınacağına karar verilebilir.

Cetvel-2. A Faktörü içinde B Faktörü, Bunlar İçinde de C Faktörü Halleri Bulunan Bir Denemede Variyans Analizi Cetveli (A faktörü halleri sabit olarak seçilmiştir.)

Kaynak	S.V.	K.T.	K.O.	E (K.O.)
A	2	1557,5	778,8	$\sigma_e^2 + n\sigma_{C:B}^2 + nc\sigma_{B:A}^2 + ncb\frac{\sum\alpha^2}{a-1}$
B/A	3	797,7	265,9	$\sigma_e^2 + n\sigma_{C:B}^2 + nc\sigma_{B:A}^2$
C/B/A	12	594,0	49,5	$\sigma_e^2 + n\sigma_{C:B}^2$
Hata	18	381,0	21,2	σ_e^2

Cetvel-2 de, E(K.O) sütununu gözönüne almadan bütün kaynakları Hata Kareler Ortalamasıyla kontrole kalkışmak önemli hatalara sebep olurdu. Bu yolla A faktörüne ait F değeri $F = \frac{778,8}{21,2} = 36,8$; B/A faktörüne ait F değeri ise, 12,6 bulunurdu. Bunlardan her ikisinin de son derece önemli olduğu hükmüne varıldı. Bunlar, uygulanan F testinin sapmalı oluşundan doğmuş yanlış hükümlerdir. Zira, B/A faktörünün E(K.O)' ında $nc\sigma_{B:A}^2$ ve σ_e^2 'ye ilâveten $n\,\sigma_{C:B}^2$ vardır. Dolayısiyle, $\sigma_{C:B}^2$ unsuru bu kaynağın önem derecesini, olduğundan daha yüksek göstermiştir. C/B/A kaynağına ait F = 2,34 değeri % 5 seviyesinde önemli çıktığından, $\sigma_{B:A}^2 = 0$ hipotezinin doğru ifadesi ;

$E\ (B/A\ K.O.) = E\ (H.K.O.)$ olmayıp,

$E\ (B/AK.O.) = E\ (C/B/A\ K.O.)$ şeklindedir. Aynı şekilde A kaynağı için hata terimi olarak B/A kaynağı kullanılmalıdır. Çünkü, yapılan testler $\sigma^2_{C:B} = O$ ve $\sigma^2_{B:A} = O$ hipotezlerinin reddiyle sonuçlandığına göre, $\sum \alpha^2_i = O$ yahut $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ hipotezinin doğru ifadesi;

$E(AK.O.) = E(B/A\ K.O.)$ şeklindedir.

Bazı hallerde, bir kaynağın kontrolünde diğer kareler ortalamalarından hiç birisi tek başına sapmazsız bir F testinin paydasını teşkil edemez. Düzgüneş (1963), bu duruma bir örnek vermiş ve çözüm yolunu göstermiştir. Bu makalenin gayesi, yaklaşık F testi diye bilinen bu metodu ayrıntılı olarak tanıtmak ve dayanaklarını açıklamaktır.

II. VARİYANSLARIN LİNEER FONKSİYONLARINA AİT DAĞILIŞ

Variyansı σ^2 olan normal hir populasyondan n fertlik bir şans örneği alındığında, örnek variyansı S^2 nin Ki kare dağılışı ile alâkalı olduğu bilinmektedir. Bu bağıntı ;

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \frown \chi^2_{n-1} \qquad \text{......(4)}$$

şeklinde ifade edilir. Yani, örnekteki müşahadelerin, örnek ortalamasından ayrılışları kareler toplamı, populasyon variyansına bölünürse (n-1) serbest variyantlı χ^2 dağılışına sahip bir şans değişkeni elde edilmiş olur. Buna dayanılarak S^2 nin dağılış fonksiyonu (n-1) serbest variyantlı χ^2 yardımıyla türetilebilir.

Bazı hallerde ise, bir değişkenin variyansı, birden fazla variyansın linear bir fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Crump (1946) tarafından analiz edilen bir araştırmada, bu durumun bir örneğini bulmak mümkündür. 25 farklı ırktan 12'şer tane dişi Drosophila melanogaster alınarak, toplam yumurta verimleri tesbit edilmiş ve bu deneme dört defa tekrarlanmıştır. Bütün faktörlerin şansa bağlı olarak seçildiği bu araştırmanın variyans analizi Cetvel-3 deki gibidir.

Cetvel-3. D.Melanogaster Dişilerinin Toplam Yumurta Verimleri.

Kaynak	S.V.	K.T.	K.O.	E (K.O.)
(A) Denemeler arası	3	139977	46659	$\sigma^2_e + 12\sigma^2_{AB} + 300\ \sigma^2_A$
(B) Irklar arası	24	77832	3243	$\sigma^2_e + 12\sigma^2_{AB} + 4\ \sigma^2_B$
(AB) Deneme x Irk	72	33048	459	$\sigma^2_e + 12\sigma^2_{AB}$
Hata	1100	254100	231	σ^2_e

Bu araştırmada, i nci ırkın ortalama veriminin, bu ırkın beklenen verimi olan $\mu + \alpha_i$ değeri etrafındaki variyansı ;

$$E\left[V(\bar{x}_{.i.})\right] = \frac{1}{4}(\sigma^2_A + \sigma^2_{AB}) + \frac{1}{4x12}\sigma^2_e \quad ...... (5)$$

beklenen değerine sahiptir. Yukarıdaki variyans unsurları, Cetvel-3 den tahmin edilecek olursa ;

$$V(\bar{x}_{.i.}) = \frac{1}{4}\left[\frac{AKO—ABKO}{300} + \frac{ABKO—HKO}{12}\right] + \frac{1}{48}HKO$$

$$= \frac{AKO}{1200} + \frac{ABKO}{50}$$

şeklinde iki kareler ortalamasının lineer bir fonksiyonu olduğu anlaşılır.

Bu ve benzeri durumlarda bir değişkene ait variyansın tahmini için, iki veya daha fazla variyanstan faydalanan kompleks ifadeler elde edilebilir. Hipotez testleri veya güven sınırları için, bu tahminin standart hatası ve dağılışını bilmek gerekmektedir. Daha genel bir ifade ile;

$$V(Y) = a_1 (KO_1) + a_2 (KO_2) + \text{.........} \quad ...... (6)$$

şeklinde birden fazla KO sının lineer bir fonksiyonu olan variyans tahminlerinin dağılışını, kesin veya yaklaşık bir şekilde ifade etmek icab eder.

Kompleks variyans tahminlerinin kesin dağılışları Satterthwaite (1941) tarafından incelenmiş olmakla beraber, varılan sonuçlar pratikte uygulanmayacak kadar karınaşıktır. Bu sebeple daha basit ve kullanışlı olan yaklaşık dağılışlar üzerinde durulmuştur. Smith (1936) tarafından, $a_1 = a_2 = 1$ olduğu iki variyansın toplamından ibaret tahminler için geliştirilen yaklaşık ifadeyi genelleştiren Satterthwaite (1946), kesin dağılışı tahminde kullanılacak yaklaşık bir ifade elde etmiştir. Yaklaşık dağılış, bir ki kare dağılışı olup, serbest variyant sayısı (6) no.lu ifadenin dağılışına uyum sağlıyacak şekilde seçilmiştir. Bu da, yaklaşık ki kare değişkenine ait variyansın kesin (exact) dağılışın variyansına eşit olmasını sağlamakla mümkün olmaktadır.

KO_1, KO_2, ... kareler ortalamaları sırasıyla r_1, r_2,... serbest variyantlarına sahipse V(Y) yi yaklaşık olarak temsil edebilecek olan kikare değişkeninin serbest variyantı r_v;

$$r_v = \frac{(a_1\, E(KO_1) + a_2\, E(KO_2) + \ldots)^2}{\frac{[a_1\, E(KO_1)]^2}{r_1} + \frac{[a_2\, E(KO_2)]^2}{r_2} + \ldots} \quad ...... (7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Uygulamada kareler ortalamalarına ait beklenen değerler bilinmediğinden bunlar yerine tahmini değerleri kullanılır ve r_v yerine bunun tahmini değeri olan $\hat{r}_v$ elde edilmiş olur.

$$\hat{r}_v = \frac{(a_1 (KO_1) + a_2 (KO_2) + \dots)^2}{\frac{[a_1 (KO_1)]^2}{r_1} + \frac{[a_2 (KO_2)]^2}{r_2} + \dots\dots} \qquad \dots\dots (8)$$

Bu bağıntı (5) no.lu ifadedeki kompleks varyans tahmini için uygulanırsa;

$$V(\bar{x}_{.i.}) = \frac{AKO}{1200} + \frac{ABKO}{50}$$

olup, $r_1 = 3$, $r_2 = 72$, $a_1 = \frac{1}{1200}$, $a_2 = \frac{1}{50}$ olmak üzere $KO_1 = AKO = 46659$ ve $KO_2 = ABKO = 459$ değerleri kullanılarak

$$\hat{r}_v = \frac{\left[\frac{46659}{1200} + \frac{459}{50}\right]^2}{\frac{\left[\frac{46659}{1200}\right]^2}{3} + \frac{\left[\frac{459}{50}\right]^2}{72}} = 4,57$$

bulunur.

Şu halde $V(\bar{x}_{.i.})$, 4,57 serbest varyantlı bir kikare dağılışı yardımıyla hipotez testi ve güven sınırları tahmininde kullanılabilir. Cetvel-3 de özetlenen denemede i nci ırkın ortalama veriminin parametreleri $\mu + \alpha_i$ ve σ^2 olan normal bir dağılıştan geldiği düşünülürse, σ^2 nin % 95 güven sınırları şu şekilde bulunabilir: (4) no.lu bağıntıdan dolayı ;

$$P(0,682 \leq \frac{4,57 . V(\bar{x}_{.i.})}{\sigma^2} \leq 12,11) = 0,95 \qquad \dots\dots (9)$$

Burada 0,682 ve 12,11 kikare cetvelinden interpolasyonla elde edilen değerlerdir. Kikare dağılış fonksiyonunda $F(\chi^2) = 0,025$ noktasına tekabül eden 4 S.V.'lı χ^2 değeri 0,484 , 5 S.V. li χ^2 değeri ise 0.831 dir. Bu iki değer arasında $\hat{r}_v = 4,57$ değeri için interpolasyon yapılırsa ;

$$\chi^2_{4,57;0,025} = 0,484 + 0,57\ (0,831-0,484) = 0,682$$

bulunur. Aynı işlem $F(\chi^2)$ değerinin 0,975 olduğu χ^2 değeri için de yapılarak;

$$\chi^2_{4,57;0,975} = 11,143 + (12,832 - 11,143) \times 0,57 = 12,11$$

olur. (9) no. lu denklem çözülürse ;

$$P(18,24 \leq \sigma^2 \leq 322,06) = 0,95 \qquad \dots\dots 10$$

güven sınırları elde edilmiş olur.

Yaklaşık kikare dağılışının kullanılışına ait örnekleri çoğaltmak mümkündür. Meselâ, normal dağılışlardan alınmış şans örnekleri yardımıyla, populasyon ortalamaları arasındaki farkın önemli olup olmadığı, t testiyle

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}\left[\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]}}$$

test istatistiğini kullanmak mahzurludur. Bu durum İstatistikte Fisher-Behren Problemi olarak tanınır ve üzerinde halen çılışılmakta olan bir konudur. Teklif edilen çözümler yaklaşıktır. Bu çözümler arasında $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ nin variyansı için kompleks bir tahmin kullanma yolu da yer almaktadır. Buna göre;

$$\mathrm{Var}\,(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

tahmini ele alınabilir. Bu tahminin yaklaşık kikare dağılışına ait serbest variyant sayısı ;

incelenebilir. Bu işlemin geçerli olması ise, populasyon variyanslarının eşit olmasına bağlıdır. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ hipotezini kabul etmemek için ciddi bir sebep varsa, o zaman ;

$$\hat{r} = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1}\right]^2}{n_1 - 1} + \frac{\left[\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{n_2 - 1}} \qquad \ldots (11)$$

şeklinde hesaplanarak t cetvelinde $\hat{r}$ serbest variyantlı değerler bulunmak suretiyle, hipotez testleri yapılabilir.

III. Yaklaşık F Testleri

Bir A kaynağına ait önem testi yapılırken, sapmasız bir F istatistiği elde etmek için, çoğu zaman F oranının paydasını iki veya daha fazla kareler ortalamasının lineer bir fonksiyonu olarak ifade etmek gerekir. Bu durumlarlarda F cetveline bakarken, kontrol edilen kaynağın serbest variyant değeri aynen alınır, hata olarak kullanılan tahminin (paydanın) serbest variyantı ise (8) no.lu bağıntı yardımıyla tahmin edilebilir. Durum Cetvel-4 deki örnekle açıklanmıştır. Herbiri üç seviyeli olan A, B ve C faktörleri 3^3 bir faktöriyel düzende denemeye alınmış olsun. Her muamele kombinasyonu da $n = 2$ deneme ünitesine uygulanmış bulunsun.

Üçlü interaksiyon hataya göre kontrol edilip, önemli bulununca E(K.O) sütunundaki ifadeler ikili interaksiyonların bu interaksiyona göre kontrol edilmesi gerektiğini gösterir. Çünkü, meselâ $\sigma^2_{BC} = 0$ hipotezi E(K.O.) cinsinden E(BCKO) = E(ABCKO) anlamına gelir ve elde edilen F testi sapmasızdır. Bu kontroller sonunda AB ve AC interaksiyonlarının önemli, Cetvel-4. Şansa Bağlı Modele Göre Seçilmiş A, B ve C Faktörlerinin 3^3 Faktörriyel Düzende Variyans Analizi (n=2).

Kaynak	S.V.	K.T.	K.O.	E (K.O.)	F
A	2	2650,8	1325,4	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2 + 6\sigma_{AC}^2 + 18\sigma_A^2$	5,97*
B	2	1034,6	517,3	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2 + 6\sigma_{BC}^2 + 18\sigma_B^2$	4,00
C	2	1869,6	934,8	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AC}^2 + 6\sigma_{BC}^2 + 18\sigma_C^2$	7,60*
AB	4	516,0	129,0	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2$	4,30*
AC	4	492,0	123,0	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AC}^2$	4,10*
BC	4	210,0	52,5	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{BC}^2$	1,75
ABC	8	240,0	30,0	$\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2$	2,50*
Hata	27	324,0	12,0	σ_e^2	

(*) : α = 0,05 seviyesinde önemli.

BC interaksiyonunun önemsiz olduğu anlaşılmaktadır. Ana faktörlere gelince, C ve B nin kontrolünde hiç bir problem yoktur. $\sigma_{BC}^2 = 0$ kabul edildiğine göre C nin kontrolü AC interaksiyonu ile, B nin kontrolü ise, AB interaksiyonu ile yapılacak demektir. Asıl problem A nın önem kontrolündedir. Çünkü, $\sigma_A^2 = 0$ hipotezinin kontrolü için, sapmasız bir F istatistiği paydada $18\,\sigma_A^2$ hariç, diğer bütün variyans unsurlarını Cetvel-4'ün A kaynağına ait E (K.O) sütununda gösterilen katsayılarla aynen ihtiva etmelidir. Yani, $\sigma_A^2 = 0$ hipotezi için ;

$$\frac{E(AKO)}{E\ (V)} = \frac{\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2 + 6\sigma_{AC}^2 + 18\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2 + 6\sigma_{AC}^2} \quad \text{...... (12)}$$

olacak şekilde bir V tahminini teşkil etmek gerekir.

$$V = ABKO + ACKO - ABCKO \quad \text{...(13)}$$

kompleks variyans tahmini bu özelliğe sahiptir.

$$E(V) = (\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2) + (\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AC}^2) - (\sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2)$$

$$= \sigma_e^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + 6\sigma_{AB}^2 + 6\sigma_{AC}^2$$

olduğundan σ_A^2 nın önemli bir variyasyon kaynağı olup olmadığı, yapılan F testiyle kontrol edilebilir. Cetvel-4 deki değerler kullanılırsa ;

$$V = 129 + 123 - 30 = 222$$

$$\hat{r}_v = \frac{(129 - 123 - 30)^2}{\frac{(129)^2}{4} + \frac{(123)^2}{4} + \frac{(-30)^2}{8}} = 6,\ 12$$

elde edilir. V ye ait S.V. burada yaklaşık olarak 6 kabul edilip F cetvelinde (2;6) S.V.'lı değere bakılabileceği gibi, interpolasyon da yapılabilir. (2; 6,12) deki cetvel değeri (2;6) ile (2;7) serbest variyantlı değerler yardımıyla bulunabilir. Cetvelde $F_{2;6} = 5.143$, $F_{2;7} = 4.737$ olup, $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik bölgeyi sınırlayan değer;

$$F_r = 5,143 - 0,12\ (5,143 - 4,737) = 5,059$$

bulunur. Denemeden elde edilen

$$F = \frac{1325,4}{222} = 5,97$$

değerinin red bölgesine düştüğü anlaşılır.

Burada ana hatlarıyla verilen bu metodu, çok daha karışık durumlara uygulamak mümkündür. Hatta, sadece paydası değil, payındaki variyans tahminleri de kompleks bir durum arzeden F oranlarında aynı yolla hem pay, hem payda için yaklaşık serbest variyantlar hesaplamak ve cetvel değerine ona göre bakmak mümkündür. Bu şekilde variyanslar arasındaki lineer bağıntıları test etme usulü Cochran (1951) tarafından etrafıca ele alınmıştır.

K A Y N A K L A R

Cochran, W.G. (1951). Testing a Lineer Relation Among Variances. Biometrics. 1951. Cilt 7 sf. 17-32.

Crump, S.L. (1946). The Estimation of Variance Components in the Analysis of Variance. Biometrics. Cilt 2, Sf. 7-11

Düzgüneş, O. (1963). Bilimsel Araştırmalarda İstatistik Prensipleri ve Metodları. Ege Üniversitesi Matbaası İzmir, Sf. 223-224.

Satterthwaite, F.E. (1941). Synthesis of Variance. Psyschometrika. Cilt. 6. Sf. 309 - 316.

Satterthwaite, F.E. (1946). An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics Cilt. 2. Sf. 110-114.

Smith, H.F. (1936). The Problem of Comparing the Result of Two Experiments with Unequal Errors. Journal of the Council of Scientific and Industrial Research. Cilt 9. Sf. 211-212.