Bursa Uludağ Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Bursa Uludağ Journal of Economy and Society
Aralık/December (2023), 42 (2):208-225
e-ISSN: 2750-9190
http://www.uludag.edu.tr/iibfdergi

Makale Geliş Tarihi/Article Received: 20.10.2023 **Makale Türü/Article Type**
Makale Kabul Tarihi/Article Accepted: 14.11.2023 Çeviri Makalesi

Dedüktif Bir Sistem Olarak Aristoteles'in Kıyası

Aristotle's Syllogistic as a Deductive System

İbrahim Oğulcan Erayman[1]

Öz

Aristoteles'in kıyası tarihteki ilk dedüktif sistemdir. Yüzyıllar sonra, Aristoteles'in fikirleri, çalışmalarını geliştirmeye devam eden, onun ulaştığı sonuçlardan ve hatta yöntemlerinden ilham alan mantıkçıların ilgisini hala çekmeye devam etmektedir. Makalede, Aristotelesçi kıyas sisteminin temel unsurlarını ve Łukasiewicz'in bunu modern formel mantığın araçlarına dayalı olarak yeniden inşasını tartışıyoruz. Her iki yazar tarafından da tartışıldığı gibi, dedüktif sisteminin eksiksizliği (completeness) kavramına özel önem atfediyoruz. Bir aksiyomatik çürütme sistemi kullanarak, eksiksizliğin nasıl tanımlanabileceğini ve ispatlanabileceğini ayrıntılı olarak tanımlıyoruz. Son olarak, bu metodolojiyi Łukasiewicz, Lemmon ve Shepherdson tarafından sunulan kıyasın farklı aksiyomlaştırmalarına uyguluyoruz.

Anahtar kelimeler: Aristoteles mantığı, kıyas, Jan Łukasiewicz, aksiyomatik sistem, aksiyomatik çürütme, eksiksizlik.

[1] **Sorumlu yazar/Corresponding author:** Dr. İbrahim Oğulcan Erayman, Bursa Uludağ Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Siyaset Bilimi ve Kamu Yönetimi Bölümü. ibrahim.erayman@gmail.com. ORCID: 0000-0002-6687-9973

Atıf/Citation: Erayman, İ. O. (2023). Dedüktif bir sistem olarak Aristoteles'in kıyası. *Bursa Uludağ Journal of Economy and Society, 42(*2), 208-225.

1.Giriş

Farklı dedüktif sistemler çağdaş mantığın kalbinde yer almaktadır. Hatta şöyle denebilir ki, günümüzde anlaşıldığı şekliyle mantığın kendisi, farklı akıl yürütme türlerine uygun dedüktif sistemlerin bir toplamıdır. İndüksiyon veya abdüksiyon gibi genellikle dedüksiyondan ayrılan akıl yürütme biçimleri ele alındığında bile, bunlar nihayetinde dedüksiyon benzeri katı bir sistem biçiminde sunulur. Dedüktif sistemlerin teorisi ve metodolojisi yerleşik ve gelişkindir, bu gelenek de mantıkçılar arasında yaygındır.

İlginçtir ki, çağdaş mantıktaki dedüktif sistemleri tartışırken hala Batı mantığının köklerine bir dönüş yapıyoruz ve bugün başardıklarımızı Aristoteles'in mirasıyla karşılaştırıyoruz. Şaşırtıcı olarak, bir şekilde, günümüzün gelişmiş dedüktif sistemlerinin birçok özelliğini onun kıyas sisteminde bulabiliriz. Robin Smith, Stanford Felsefe Ansiklopedisi'ne (1) yazdığı bir maddede, "modern formel teknikler konusunda eğitim almış akademisyenlerin, sonuçlarının doğruluğundan ziyade, çalışmalarının çoğu ile modern mantık arasındaki ruh bakımından dikkate değer bir benzerlik olması nedeniyle Aristoteles'e yeni bir açıdan baktığını vurgulamaktadır. Jonathan Lear'in ifade ettiği gibi, 'üstkuramda (metatheory) Aristoteles modern mantıkçılar ile temel bir ilgiyi paylaşır': onun birincil amacı, argümantasyon için pratik bir rehber sunmak değil, çıkarımsal (inferential) sistemlerin özelliklerini incelemektir." Bu nedenle Aristoteles'in kıyasını analiz etmek, onu kesin içeriğinden, bağlamından ve terminolojisinden soyutlayarak bir dedüktif sistemin temel özellikleri üzerine düşünmemize izin verir.

Son on yıllarda Aristoteles'in mantık eserlerine önemli bir ilgi gözlememizde şaşırılacak bir taraf yoktur. Klauss Glashoff (2) (2005, s.949) şöyle ifade eder: "birkaç on yıl öncesinden farklı olarak, Aristotelesçi mantık günümüzde artan bir ilgiyle karşılanıyor. Yalnızca filozoflar değil, bilgi ve iletişim kuramı uzmanları da izi açıkça Aristoteles'in kategoriler ve kıyaslar üzerine çalışmalarına kadar sürülebilecek fikirleri kullanırlar. (…) Bu oldukça yeni gelişmelerden bağımsız olarak, küçük bir grup mantıkçı tarafından, filozof ve filolog bakımından Aristoteles mantığının formelleştirilmesi meselelerine yenilenen bir ilgi duyuldu." O zamandan beri, sadece birkaçını zikretmek gerekirse, ya doğrudan Aristoteles'in yazıları üzerine (3-5) ya da onun kıyasının uzantıları veya teknik yönleri üzerine (6-19) pek çok yeni eser yayınlandı.

Aristoteles'ten sonra kıyas, asırlar boyunca, alimlerin birçok kuşağının ilgisini çeken baskın mantık biçimiydi. Yirminci yüzyılda, modern matematiksel mantığın yükselişinden önce, geleneksel kıyasın orta çağ sistemleştirmesi; Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından sunulan kıyasın birtakım matematiksel yorumları ve Leonard Euler ve John Venn tarafından tanıtılan şematik yaklaşım gibi teoriye en azından bazı önemli katkılar mevcuttu. Ancak bununla birlikte, biz bu çalışmada, Jan Łukasiewicz'in çalışmalarından ve bu bağlamda sunulan Aristoteles'ten ilham alan bazı fikirlerden yola çıkarak, çoğunlukla kıyasın modern yeniden inşalarını merkeze alıyoruz.

Temelde Aristoteles'in dedüktif sistemlerinin metodolojisinin izini sürebilmek kaygısı güderek, değerlendirmelerimize kıyasın (Aristoteles tarafından verilen) orijinal sunumu üzerine bazı yorumlarla başlayacağız. Akabinde Łukasiewicz tarafından sunulan sisteme bakacağız. Neredeyse bir asırlık perspektiften, kıyası formelleştirirken yaptığı seçimlerin izini sürüp, değerlendireceğiz. Kıyas sisteminin eksiksizliğine (completeness) ilişkin Aristotelesçi tartışmayı geliştirme biçiminin ise bilhassa üzerinde duracağız. Ayrıca, bu yaklaşımı çağdaş mantıktaki eksiksizlik araştırmalarının teori ve pratiği ile karşılaştıracağız. Nihayetinde, Łukasiewicz'in metodolojisinin kıyas sisteminin muhtelif varyantlarında nasıl çalıştığını sunacağız.

Bu makalede sunulan teknik sonuçlar, (pek de) yeni değildir. Teknik açıdan bakıldığında belki de en ilginç nokta, Sheperdson'un kıyas aksiyomatikleştirmesindeki çürütme karşılığıdır. Bu çalışmanın alana asıl katkısı, bir dedüktif sistemin eksiksizliğine dair metodolojik tartışmada yatmaktadır.

Çalışma ayrıca, kıyasın formelleştirilmesi konusundaki çeşitli çabaları içeren kaynaklar ve alandaki seçilmiş güncel çalışmaları içermesi bakımından referanslar açısından zengindir.

2.Orjinal sunum

Kıyasın modern formelleştirmelerinin bazı ayrıntılarını tartışmak amacıyla doğru perspektifi elde etmek için, onun orijinal Aristotelesçi sunumu üzerine birkaç sözle başlayalım. M. Bochenski, assertorik kıyasın düşünce tarihindeki rolü hakkında çok güçlü ve temelde haklı bir görüş dile getirmiştir: "assertorik kıyas, yalnızca değişkenlerle ilgili ilk formel teori olması bakımından değil, aynı zamanda şimdiye kadar inşa edilmiş ilk aksiyomatik sistem olduğu için de muhtemelen tüm formel mantık tarihindeki en önemli keşiftir." (20) (s.46). Bu iddia, Aristotelesçi sistemin sadece mantık alanına özgü olmayan (daha geniş anlamdaki) önemini de hesaba katmaktadır. Formel teori ve formel modellemeler, modern bilimde her yerde bulunur. Matematik ve matematiksel olarak temellendirilmiş fizik, bu araçları oldukça uzun süredir kullanmaktadır. Ancak diğer birçok doğa ve sosyal bilim disiplini, aynı kritik önemi haiz özellikleri paylaşan kendi formelleştirilmiş teorilerini oluşturmaktadır. Öklid geometrisi, modern dönemde dedüktif bir sistemin ikonu konumunu kazanmıştı (Ancak, Spinoza'nın ünlü *more geometrico*su bilimdeki formel teknikler için temel kavramsal çerçeveyi ve standardı önceden kuran bir kıyastı.).

Bochenski kıyasın önemine ilişkin savını gerekçelendirirken iki meseleye değinmektedir: Değişkenlerin kullanımı ve aksiyomatik bir sistemin biçimi. İlki basit olsa da ikincisini anlamak, aksiyomatik bir sistemin ne olduğu üzerine düşünmeyi gerekli kılmaktadır. Bir teorinin aksiyomatik bir sistem olarak kabul edilebilmesi için iki şey gereklidir. İlkin, sistemin öğelerinin aksiyomlar ve teoremler olarak iki gruba ayrılması elzemdir. Buna göre bazı önermeler (Şimdilik burada, kıyasın -geçerli kurallar, ya da belirli muhakeme kipleri gibi önerme dışındaki nesneler için tasarlanabilir olmasından dolayı- kendisinin de esasında bir önerme olabileceği hususunu bir sonraki başlıkta geri dönmek üzere atlayalım.) özel bir tarzda ele alınır ve aksiyom olarak kabul edilir. Diğer önermeler de bunlardan türetilir. İkinci gereklilik, aksiyomlar ve teoremler arasındaki ilişki ile alakalıdır. Teoremler türetilir ve türetme de dedüktif olmalıdır. Dedüksiyon metodolojisinin olgunluğunun gözlemlenebileceği yer burasıdır. Gelişmiş sistemlerde dedüksiyon kuralları açık ve formeldir.

Aristotelesçi kıyasta, birinci şeklin kıyasları kusursuzdur (aksiyomdurlar) ve diğer iki şeklin kıyasları kusurludur (yani, aksiyomlardan türetilmiştir). Bochenski (20) (ss.46-47), Aristoteles'in aksiyomatik kıyas sisteminde kullandığı dedüksiyonun üç kuralına işaret eder: redüksiyon, *abese irca (the reductio ad impossible)* ve ektez (ecthesis). Bu kurallar dedüktif olarak geçerlidir ve çağdaş mantıkta tanınmıştır. Modern terminolojide ise -transpozisyon ve ektez örneklerindeki gibi- bir öncülün kuvvetinin direkt redüksiyonuna abese irca denir. Biz sadece aksiyomatizasyon olgusu ve aksiyomatizasyon seviyesiyle ilgilendiğimiz için, tüm kuralların kesin formülasyonu ve çıkarımların detaylarının sunumunu burada yapmayacağız. (Tüm kıyas ispatlarının yeniden inşaları için, bknz. (20) ss. 49-54)

Posterior Analytics'e dağılmış bir dizi gevşek notta, aksiyomatik bir teori oluşturmak için genel kurallar da bulabiliriz. Bochenski bunları şu şekilde yeniden yapılandırıyor (20) (s. 46):

1. Teoremler çıkarsanırken bazı test edilmemiş aksiyomlar olması gereklidir ((21), 72b)
2. Aksiyomlar sezgisel olarak açık olmalıdır ((21), 99b),
3. Teoremlerin ispatlarında dedüksiyon adımlarının sayısı sonlu olmalıdır ((21), 81b).

Aristoteles'in aksimoyatikleştirmeye yaklaşımı, çağdaş olana benzemekle birlikte, bire bir aynısı değildir. Temel fark, aksiyomlarla ilgili yukarıdaki 2. başlıkta yatmaktadır. Apaçıklık, kesinlik ve ontolojik öncelik gibi koşullar artık onlara empoze edilememektedir. Bir aksiyom, bir sistemin diğer ifadelerinden yalnızca türetilmemiş olmasıyla ayrılır (bknz. (22) (ss.70-71). Aynı teorilerin farklı aksiyomlaştırmaları vardır ve aynı kabul edilen nesneler kümesini tanımlamaları kaydıyla eşit derecede doğrudurlar. Fakat yine de bazı aksiyomlar diğerlerinden daha yüksek olarak değerlendirilebilir. Bu noktada çağdaş mantıkçıların devreye soktuğu kriterler nelerdir? Bunun cevabı basit değildir. Elbette bu kriterlerin büyük bir kısmı katı ve formel değildir. Belli bir kısmı Aristoteles'in talep ettiği ölçütlere benzemektedir. Kimi zaman sezgisel olarak açık veya izahtan vareste olan daha yüksek aksiyomlara önem atfederiz. Bu ölçütlere benzer şekilde, aksiyomların basitliği bazen bir avantaj olarak vurgulanmaktadır. Öte yandan, bazen daha az sayıda aksiyom ihtiva eden aksiyomlaştırmalar daha yüksek olarak değerlendirilebilmektedir.

Aristoteles'in kıyas sisteminde, varlığına (ya da en azından izlerine) kimi yazarlar tarafından işaret edilen bazı daha metalojik (metalogic) kavramlar bulunmaktadır. İlerleyen bölümlerde eksiksizlik nosyonunu etraflıca tartışacağız. Şimdi burada, kompaktlık (compactness) kavramı üzerinde kısa da olsa duralım.

Aristoteles kıyasında kompaktlık meselesi Lear tarafından gündeme getirilmiştir (23). Lear, Aristoteles'in *Posterior Analytics I.19-22*'de, kompaktlığın *ispat-teorik* (*proof-theoretic)* bir benzerini tartıştığını iddia etmektedir. Kompaktlık, bir sistem için model teorik bir özelliktir ve şunu ifade eder: Eğer bir α önermesi, φ önermelerinin sonsuz kümesinin semantik bir sonucu ise, o zaman α'nın φ1'in semantik bir sonucu olduğu φ1 C φ adında bir sonlu küme bulunur. O halde kompaktlığın *ispat-teorik* benzeri nedir? Kanıtlanabilir her sonucun sonlu sayıda öncülden ispatlanabileceğini belirten bir özelliktir. Başka bir deyişle, sonsuz sayıdaki öncülü etkili biçimde kullanabilecek geçerli bir dedüktif akıl yürütme yolu yoktur.

Burada şu soru ortaya çıkmaktadır: Gerçekten de Aristoteles'in tartıştığı şey çağdaş metalojikde kullanılan anlamda mı kompaktlıkla ilgilidir? Yoksa bu durum sadece Aristoteles'in yanlış bir yorumundan mı ibarettir? İkinci görüş Micheal Scanlan (24) tarafından ortaya konmuştur. Ona göre, Aristoteles model teorisini hiç kullanmadığından dolayı, kompaktlığı kıyas bağlamında ele almak anakroniktir. Konuyla ilgili ilginç ve ölçülü bir tartışma ise Adam Crager tarafından (4)'te sunulmuştur. Bu çalışması bağlamında Crager, bazı çağdaş mantıkçıların, çok net olmasalar bile Aristoteles'in çalışmalarında modern mantık fikirlerinin izlerini bulmak istemelerini ve bu mantıkçıların haklı olabileceğini saptamanın yeterli olduğunu ifade etmektedir.

3. Lukasiewicz'in kıyası yeniden inşası: Formalizasyon seçenekleri

Łukasiewicz'in modern formel mantığın araçlarını kullanarak kıyası formelleştirirken kullanabileceği farklı imkanlardan haberdar olup olmadığını söylemek zordur. Kitabında *Aristotle's Sylologistic from the Standpoint of Modern Formal Logic* başlığını kullanmasını, Lukasiewicz'in nazarında (Aristo'nun yaklaşımının) teoriye ilişkin yegâne bakış açısı olduğu biçiminde okuyabiliriz.

Şimdi, kıyas üzerine daha sonra yapılan çalışmaları dikkate alırsak, bunun o kadar basit olmadığını görebiliriz. Bir kıyas sistemi oluşturmak için uygulanabilecek birçok olası formel araç ve teorinin içeriğinin birçok çeşidi vardır. Bugünün perspektifinden bakıldığında en temel karar, kıyasın ne çeşit bir nesne olması gerektiği üzerinedir. Daha sonraki literatüre (bkz. (25,26)) bakıldığında bir (doğru) kıyasın en az üç yorumu tartışılmaktadır: 1) geçerli öncül-sonuç argümanı 2) doğru önerme 3) kuvvetli argümantasyon veya dedüksiyon. Formel yapı açısından bakıldığında iki açık olasılık vardır: (1) için çıkarım kuralları ve (2) için gerektirme önermeleri. Yorum (3), kıyasın daha az doğrudan formel bir açıklamasını gerektirir.

Łukasiewicz, kıyasların önermeler olarak temsil edildiği bir teori inşa etti. Bu yaklaşım temelde mantık olarak 30'ların ruhuyla uyumlu görünüyordu. Aksiyomlaştırma için heyecan ise, şimdilerde

Hilbert tarzı olarak adlandırdığımız şey üzerineydi. Doğal dedüksiyon, onun bir alternatifi olarak, Gentzen ve Jaskowski tarafından henüz inşa edilmiş ve yeni yeni filizleniyordu. Gödel'in 1939'daki Notre Dame derslerinde (27), matematiksel mantığı kullanmak suretiyle kıyasın bir formalizasyonunu da sunduğu ve onun sisteminin Łukasiewicz'in sistemine benzer bir şekilde inşa edildiği pek bilinmez. İkisi arasındaki temel fark, aksiyom seçimleri ve Łukasiewicz'in tam teşekküllü bir teori sunarken, Gödel'in sadece bir taslak sunmasından kaynaklanmaktaydı.

Bir diğer önemli mesele de kıyas yaklaşımlarının farklılık gösterebileceği yerlerden biri olarak, kıyasların bileşenleri olan kategorik cümlelerde kullanılabilecek isim türleri ile ilgilidir. Burada iki ayrım önemlidir: bireysel/ortak adlar ve boş/boş olmayan adlar. Bu mesele, Łukasiewicz'den sonra da kapsamlı bir şekilde tartışıldı ve şimdi bu hususta farklı öneriler mevcut. Takip eden başlıklarda Łukasiewicz'in yaklaşımı üzerinde ayrıntılı olarak duracağız.

3.2.Klasik önermeler mantığına dayalı aksiyomatik teori

Aristoteles mantığına dair daha önce adı geçen tüm yorumlarda ortak olarak paylaşılan nokta, kıyasın, kategorik önermelerin hem öncüller hem de sonuç olduğu akıl yürütmeyi inceleme amacında olmasıdır. Daha önce de belirttiğimiz gibi, böylesi bir akıl yürütme modern formel mantığın sağladığı araçlarla çeşitli şekillerde (örneğin, gerektirme yapısına sahip dil cümleleri ve çıkarım kuralları ya da şemaları olarak) formelize edilebilir.

İlk durumda, muhakemenin öncülleri, gerektirmenin önbileşenini oluşturan tümel-evetlenmenin (conjunction) faktörleri olarak ve gerektirmenin sonucu olarak ele alınabilir. Sonuçlar, doğal bir şekilde kurallara dönüştürülebilen formüllerdir. Kıyasları bu tür gerektirmeler olarak görmek, gerektirmenin ve tümel-evetlenmenin bir yorumunun yapılmasını da zaruri hale getirmektedir. Łukasiewicz, bu operatörlerin klasik önermesel kalkülüsünden alındığı kendisi için olabilecek en basit çözümü benimsemiştir. Bununla birlikte, operatörlerin klasik yorumu hiçbir şekilde net değildir. Kıyasın kendisinin *Prior Analytics*'den türetilen tanımı şu şekildedir: "kıyas öyle bir argümandır ki, bazı şeylerin ortaya konulmasıyla, bu şeylerden başka bir şey, sadece bu şeyler dolayısıyla gerekli olarak çıkar." (21) (24b, 20). Bu tanım kıyasın iki özelliğini akla getirir: klasik kalkülüsün reddi – totolojik olmama ve bağlantılılık (bağlantılılık meselesi ile ilgili bir tartışma için bknz. (3))

Łukasiewicz, kıyasın klasik önermesel kalkülüsün üzerine inşa edildiğini varsayarak ve bu yüzden kıyas biçimindekilerden başka yapılara da müsaade ederek daha da ileri gitmiş ve bu suretle de kurallarla doğrudan ilişki kesilmiştir. Aristoteles'in kıyasına yönelik Łukasiewicz'in yaklaşımının bu unsuru bilhassa tartışmalı görünmektedir.

Bu nedenle, Łukasiewicz'in kıyas yaklaşımının özünü daha iyi kavramayı sağlayacak 3 temel unsur ayrılabilir: (1) akıl yürütmenin bir gerektirme yapısı olan dil cümleleriyle formelleştirilmesi (2) önerme operatörlerinin klasik anlayışının kullanılması (3) Herhangi bir konfigürasyonda karmaşık formüller oluşturmak için önermeler hesabı operatörlerinin kullanımı.

Łukasiewicz'in yaklaşımı, John Corcoran (28, 29) tarafından şiddetle eleştirildi. Onun eleştirisi özellikle hemen yukarıda paylaşılan 1. Maddeyle ilgiliydi. 1.maddedeki yaklaşımın yerine Corcoran, kıyasları doğal bir dedüksiyon sistemi içindeki kurallar olarak formelleştirmeyi önerdi. Bununla birlikte, perspektifi biraz genişlettiğimizde, iki yaklaşım arasında çok ciddi bir fark bulunmamaktadır. Gerektirme biçimindeki önermeler ele alındığında önermelerin doğruluğu ile çıkarım kurallarının sağlamlığı arasında yakın bir ilişki vardır. Gerçek gerektirmeler, doğru kuralların temeli iken doğru kurallar da, karşılık gelen gerçek önermelere dönüştürülebilir. Gerektirmelerin böylesi bir önerme-kural ikiliği kendisini özellikle mantık programlama bağlamında gösterir. Mantık programları, Horn yan tümceleri kümeleridir. Bildirsel yorumda cümleler -sonuçların atomlar, önbileşenlerin de atomların birleşimi olduğu- gerektirmelerdir. Prosedürel yorumda ise (cümleler), belirli durumlarda tetiklenen çoklu öncüllerdir. Kıyasların aynı yapıya sahip oldukları ve bundan dolayı ikili bir şekilde de yorumlanabilecekleri kolayca görülmektedir.

Łukasiewicz'in yaklaşımının diğer yönleri gerçekten de daha tartışmalı görünmektedir. Klasik önermeler kalkülüsü, Aristotelesçi düşünme tarzını yeterince açıklayabilen bir mantık değildir. Dahası, Aristoteles, standart kıyaslar ve çoklu kıyaslar -sorites- (ikiden fazla öncülü olan kıyas) haricinde herhangi bir yapı kullanmamıştır. Bununla birlikte, Aristoteles'in teorisiyle bu teorinin Łukasiewicz tarafından yeniden inşası arasındaki bahsi geçen uyuşmazlıklar, Łukasiewicz'in pratiğini ciddi şekilde baltalamaz. Bunun temel sebebi ise, Łukasiewicz'in önerme mantığını, Aristoteles tarafından kabul edilenlerle uyumlu argümanları yeniden inşa etmek için gerekli olandan daha fazla kullanmamasıdır.

3.3. Kabul edilebilir isim türleri

Mantıksal semiyotikte, kıyasın formelleştirilmesi bakımından ilginç olan iki ad bölümü bulunmaktadır. Bunlardan ilki, referans türüne göre yapılır ve ortak -common- ve özel -proper- adlar arasında ayrım yapar. Birtakım kuralları karşıladıkları ve her zaman bu koşulları temsil eden uygun yüklemlerle ilişkilendirilebilmeleri sebebiyle ortak adlar nesneleri belirtir. Özel adlar ise, bir dil kuralı altında belirli nesneleri belirtir. Diğer bölünme ise belirtmelerin sayısına göre yapılır ve boş -empty- adlar (yani hiçbir belirtimi olmayan), belirli -particular- adlar (yani tam olarak bir belirtimi olan isimler) ile genel adlar (yani birden fazla belirtimi olanlar) arasında ayrım yapar. Boş ve belirli adların, ortak ve özel adlar olabileceğini de not etmek gerekir. Ortak boş isme örnek olarak "unicorn" veya "kare daire", belirli boş isme örnek olaraksa "Pegasus" veya "Noel Baba"yı gösterebiliriz.

Kıyas gibi bir adlar mantığı sistemi oluştururken, hemen yukarıdaki gibi bölünmelere dayalı olarak seçilen kategorilerde kullanılabilecek adların aralığı daraltılabilir. Böylesi postülalar muhtelif motivasyonlara ve gerekçelendirmelere sahiptir. "On Sense and Reference" (30) adlı meşhur eserinde Gottlob Frege, boş adların bilim dilinden çıkarılmasını önermiştir. Frege boş adların bilim dilinden çıkarılmasını gerekçelendirirken, isimlerin kaplamsız kullanımının, anlamsız tartışma ve manipülasyona sebebiyet verdiği iddiasıyla özetlenebilecek bir akıl yürütme kullanmaktadır. Aristoteles, isimlerin kaplamsız kullanımına, bu tür adların geçtiği çekirdek önermelerin yanlış olduğunu varsayarak izin verir. Łukasiewicz'in kıyas formelleştirmesi ise tüm isimlerin boş-olmadığını farz eder. Ancak, onun tarzıyla kurulmuş birçok sistem, (31-34)'deki gibi, boş adların kullanımını kabul eder.

Łukasiewicz bireysel adları da kıyas sisteminden çıkarır. Benzer bir daraltma, geleneksel kıyasta bireysel ve özel adları birleştirenleri, "mantığın yozlaşması"nın (35) önemli bir kaynağı olarak gören Peter Geach'te de gözlemlenebilir. Aristoteles'in kendisinin bu meseledeki konumu ise tam olarak net değildir. *Prior Analitics*'te (26a–46b) geçerli kıyaslar sunduğunda her zaman "hayvan", "insan" ve "beyaz" gibi genel isimler kullanır. Ancak bununla birlikte, *Prior Analitics* 47b'de bazı geçersiz formları tartışırken, "hiçbir kıyas ihtimali olmadığı" durumlarda bu formlara, Aristomenes ve Miccalus gibi özel isimler koyar. *Kıyasların mümkün olmamasının* sebebinin özel isimlerin kullanılması mı yoksa tesadüf mü olduğu net değildir ve Aristoteles bu hususu açıkça belirtmez.

Aynı argümanın iki kez ortaya çıktığı önermelerin kabul edilebilirliği, başka bir tür şüpheyi daha gündeme getirmektedir. Modern mantıkta, bu tür formüller doğaldır ve herhangi bir ifadede aynı değeri (sabit veya değişken) değiştirerek oluşturulabilirler. Öyle ki, Aristoteles'in kıyasını formelleştiren sisteminde Łukasiewicz, aksiyom olarak "her S, S'dir" ve "belirli S'ler S'dir" formüllerini dahi kullanır. Bununla birlikte, böylesi cümleler, Aristoteles tarafından verilen tasım modları tanımından görülmez.

Bu durum, kıyasların yeni bilgiye öncülük etmesine istinaden yukarıda bahsedilen gereklilik ile ilişkilendirilebilir. Buna dayanarak, "varsayılandan başka" bir şey türetilebilir ve diğer bir yandan, türetilen şey, "varsayıldığından ötürü sonuçlanmalıdır". Bu bağlamda, kıyasların normal kullanımıyla kendilerinden yeni bir şey çıkmayacağı ve belirli kabullerden kaynaklanan yeni bilgiler oluşturamayacakları için, "Her S, S'dir" ve "belirli S'ler, S'dir" cümleleri kullanışlı değildir. Łukasiewicz, değiştirim konusunda herhangi bir kısıtlama düzenlememektedir.

4. Eksiksizlik

Formel bir sistemin niteliğini değerlendirmenin başlıca kriteri, onun temelinde yatan sezgilerine göre yeterliliğidir. Eksiksizlik ve geçerlilik ise yeterliliği oluşturan iki özelliktir. Söz konusu aksiyomatik bir sistem olduğunda, geçerlilik sistemin tüm teoremlerinin temeldeki sezgileri takip etmesi anlamına gelirken, eksiksizlik ise sezgisel olarak kabul edilen tüm formüllerin ayrıca sistem içinde kabul edilmesi anlamına gelmektedir. Literatür içerisinde bu temel sezginin önemli ayrıntılarda farklılık gösteren pek çok cisimleşmesi bulunabilir. Aşağıda bunların bazılarına atıfta bulunacağız. Bunlar içerisinden ilk ikisinde, eksiksizlik doğrudan formül kümelerine atıfta bulunur ve bu formüllerin doğruluğu sezgisel kabul ölçütü olarak kabul edilir. Kazimierz Ajdukiewicz, eksiksizlik kavramını aşağıdaki gibi kullanır:

"Bu teorinin dilinde formüle edilebilecek her doğru cümle, sahip olduğu kanıtlar kullanılarak ispatlanabilir (bu teorinin bir aksiyomu değilse)." (36) (s.215)

Ludwik Borkowski eksiksizliğin tanımını hemen aşağıdaki gibi verir:

"S sistemi, ancak ve ancak S sisteminin her bir gerçek ifadesi S sisteminin bir tezi ise tamamlanır." (37) (s.378)

Metalojik mülahazalarda, genellikle gerçeğin klasik tekabüliyeti kavramı kullanılır. Ajdukiewicz'in formülasyonu şu şekildedir:

"Herhangi bir bildirsel tümce (declarative sentence) tam olarak söylediği şeyi söylüyorsa doğrudur; beyan ettiği şey değil ise yanlıştır." (36) (s.29)

Bununla birlikte, yukarıdaki çerçevelerin bir dezavantajı vardır. Mantığın uğraştığı tüm formel sistemler doğruluğa atıfta bulunmaz. Buna bir örnek olarak, hedefinin doğruyu yakalamadan ziyade yapıcı olarak kanıtlanabilir olanı yakalamak olan sezgici mantık gösterilebilir. Bununla birlikte, aynı yöntemin, bu tür mantığa yönelik formel yaklaşımlarla ilgili eksiksizliği hesaba katmak için hala uygulanabilir olduğunu ifade etmek gerekir. Genel olarak, hemen yukarıdaki eksiksizlik kavramı korunabilir, sadece "doğru" terimi "makbul" veya "kabul edilebilir" terimiyle yer değiştirilmelidir.

Diğer tanımlar, eksiksizliği çıkarım veya akıl yürütme yöntemleri kümeleriyle ilişkilendirir ve cümlelerin doğruluğuna karşılık gelen geçerliliğine veya güvenilirliklerine atıfta bulunur. A. Grzegorczyk eksiksizlik ile ilgili şunları belirtir:

"Mantığın doğal, tarihi gelişimi; herhangi bir konuda doğru çıkarımın tüm mantıksal yöntemlerini içerdiği kanıtlanabilen, böylesi bir mantık sisteminin yaratımına yol açmıştır. Biz bu özelliğe eksiksizlik diyoruz." (38) (s.121)

W. A. Pogorzelski ise bu kavramla ilgili aşağıdaki cümleleri kullanır:

"Eksiksizlik meselesi, akıl yürütmenin tüm güvenilir yollarının aslında formel mantığın yasalarına dayanıp dayanmadığı sorusu olarak formüle edilebilir." (39) (s.366).

Daha önce dikkati çektiğimiz gibi, önermelerin doğruluğu ve akıl yürütmenin geçerliliği (çıkarımın kuralları) arasında yakın bir ilişki söz konusudur. Doğru cümleler, aslında doğru muhakemenin inşasına temel oluşturabilir ve doğru muhakeme, karşılık gelen doğru cümlelere dönüştürülebilir. Bu gerçek, yukarıdaki tüm tanımların, tartışmaya yol açmayan aynı sezgiyi kendi yollarıyla ifade ettiğini varsaymamızı sağlar. Tüm tanımlarda eksiksizlik, biçimsel bir sistemi dışsal bir şeye, gerçekliğe veya en azından gerçeklik hakkında düşünmenin bir biçimine atıfta bulunması anlamında semantiktir.

Hangi önermelerin doğru olduğunu teyit etme bakımından ve özellikle de bu tasdikin mantık araştırmalarında tam olarak yeterli bir biçimde kullanılabilmesi bakımından hala bir problem önümüzde durmaktadır. Çoğu zaman formel modeller bu amaçla kullanılır ve doğruluk, modeldeki nesnelere dayatılan formel koşullar tarafından tanımlanan bir modeldeki doğruluk olarak tanımlanır. Sonuç olarak, pratikte önermelerin doğruluğu genellikle, bir formel modelde veya model sınıfında kendilerinin doğruluğuyla eş tutulur. Nihayetinde, modeller, Witold Marciszewski tarafından düzenlenen "Small Encyclopedia of Logic'"te verdiği tanımda olduğu gibi, doğrudan eksiksizliğin tanımı içinde görülürler:

"Dedüktif mantık sistemi, ancak ve ancak her modelde doğru önermeler olan tüm önermeler aksiyomlarından türetilebiliyorsa tamamlanır." (40) (s.236)

Ancak, bu pozisyonu benimseyerek, eksiksizliğin semantik karakterini bir kenara bırakıyoruz. Aksiyomatik sistem ve formel modeli tanımlayan sistem gibi iki formel sistem arasındaki karşılıklı ilişkileri göz önünde bulunduruyoruz. İki formel yaklaşım, şüphesiz formel teorinin daha tamamlanmış bir resmini sunar, ancak teoriyi gerçeklikle ilişkilendirmez. Temel sezgilere dayanan aksiyomatik sistemin eksiksizliği meselesi, bir modele göre eksiksizliğin gösterilmesiyle çözülmez, sadece bir kenara bırakılmasına sebebiyet verir. Formel modelin gerçekliğe göre yeterliği hususunda başka bir problem belirir. Bazen bir modelin teorik yapısı sezgiseldir, ancak bağıntı mantığı, lineer mantık ve hatta sezgisel mantık gibi bazı durumlarda, kanıt-teorik bir yaklaşım, sistemlere uyacak şekilde inşa edilmiş modellerden çok sezgilere daha yakındır.

Söz konusu kıyas olduğunda, anaokulundan beri küme temelli düşünmeye alışkın olan bilhassa çağdaş insan için, küme-teorik modeller oldukça sezgisel ve doğal görünmektedir. Ancak yine de küme teorik modellere bağlı olmayan bir kıyas teorisi üzerine düşünmek için nedenler var. Bunlardan birisi tarihseldir: Aristoteles'in kendisi küme teorisini bilmiyordu. Bu yüzden, sadece anakronizmlerden kaçınmak için bile kümeler olmadan kıyasla alakalı metalojik değerlendirmeleri yürütebilmek hiç fena olmaz. Diğer neden ise, bazı araştırmacıların modern mantıkta kullanılan küme-teorik yaklaşımın, dili doğal kullanma biçimimizle uyuşmadığını iddia etmeleri üzerine temellenmektedir (40).

Aristoteles'i takip eden ve ona atıfta bulunan Łukasiewicz, farklı bir çözüm önerdi. Aristoteles "Prior Analytics"de, kabul ettiği kıyaslar dışındaki tasım şemalarının kabul edilmemesi gerektiğini gösterir. Bu yolla, kendi kıyas sisteminin eksiksizliğini kanıtlar. Üç Şekilden her birine ait iki öncül ile olası tüm şemaları göz önünde bulundurur. Çoğu durumda, aşağıdaki pasajda görülebileceği gibi, bir karşı örnek vererek şemaların reddedilmesini gerekçelendirir:

"İster olumlu ister özel olsun, her iki aralık da tikel ise veya biri olumlu, diğeri özel olarak belirtilmişse veya biri belirsiz, diğeri belirli veya her ikisi de belirsiz ise asla bir kıyas olmayacaktır. Bütün bu hallerde müşterek terim misalleri: hayvan, ak, at; hayvan, ak, taş." (21) (26b)

Örneğin, herhangi bir sayıda öncül ile akıl yürütme ele alınırsa, tüm kabul edilemez formülleri yanlışlayan örnekler göstermek emek yoğundur ve birçok durumda sınırsız sayısından sebep olanaklı değildir. Bununla birlikte, daha Aristoteles'te, Łukasiewicz'in çıkardığı ve genişlettiği bu tür formülleri reddetmenin farklı bir yoluna ilişkin bir ipucu bulunabilir. Aşağıdaki metin Aristoteles'in *Prior Analytic*'inde geçer:

"Mademki, M'nin, hiçbir X'e ait olmadığında dahi bazı X'e ait olmadığı doğrudur ve mademki hiçbir X'e ait olmadığında kıyastan bahsedilemiyorsa, bu durumda da ortada kıyasın olmayacağı açıktır." (21) (27b)

Aristoteles'in bu kısa notundan Łukasiewicz, ilk olarak Słupecki ve ekibi tarafından daha da ileri götürülen ve sonraları daha geniş bir mantık topluluğuna hitap eden bir aksiyomatik çürütme fikri türetmiştir. Reddedilen önermelerin mantığına ilişkin önemli bir teori ise (42) içinde sunulmuştur. Son zamanlarda bu alandaki başarılar (43) içerisinde özetlenmiş ve Łukasiewicz-Słupecki yaklaşımı (44) içinde tartışılmıştır.

Łukasiewicz'in temel fikirleri aşağıdaki gibidir. Olağan aksiyom ve kurallara ilave olarak, reddedilen aksiyomlar ve çürütme kuralları da tanıtılır. Reddedilen aksiyomlar geçerli olmamalıdır ve çürütme kuralları da geçerli-olmayan formüller üretir. Bir sistemin, dilinin her formülü ya bir teorem ya da reddedilen bir formül ise, çürütmesel olarak tamamlanmış olduğu söylenir. Łukasiewicz ve Słupecki kendi çalışmalarında, belirli koşullar altında çürütmesel olarak tam sistemlerin karar verilebilir olduğunu vurguladılar.

Bu makalenin yazarının görüşüne göre, daha da ilginç olan argüman, çürütmesel olarak tamamlanmış sistemlerin yukarıda tartışılan en temel yeterlik anlamında yeterli (geçerli ve eksiksiz) olduğudur. Takip eden başlıkta, Łukasiewicz'in sisteminde ve tarzında inşa edilen diğer bazı kıyas aksiyomlaştırmalarında çürütmenin nasıl çalıştığını sunacağız.

5. Çürütme muadilleriyle kıyaslamanın aksiyomatik sistemleri

Bu bölümde tartışılan tüm sistemlerin dili aynıdır. Bu dil S,P,M,N…, gibi ad değişkenlerini içerir, önerme operatörleri ve kıyas mantığına özgü iki ilkel yönetici ise klasik şekilde okunur: Örneğin SaP: "Her S, P'dir" biçiminde, SiP ise "Bazı S'ler P'dir" ya da "Belirli bir S, P'dir" biçiminde. Biz SaP ya da SiP gibi formülleri "atomlar" olarak adlandırdık. Formel olarak, bir dil formülü (Backus-Naur gösterimiyle) şu şekilde ifade edilebilir:

$$\alpha = SaS \mid SiS \mid \neg\alpha \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \vee \alpha \mid \alpha \rightarrow \alpha \mid \alpha \equiv \alpha$$

Klasik negatif kıyas yöneticileri olan (mesela SeP'nin "Hiçbir S, P değildir ve SoP'nin "Bazı S'ler P değildir" ya da "Belirli bir S, P değildir" biçiminde okunan) 'e' ve 'o' ise; ilkel yöneticilerin değilleyicileri olarak okunur:

$$SeP \triangleq \neg SiP,$$

$$SoP \triangleq \neg SaP.$$

Tüm sistemlerde klasik totolojinin tüm değiştirimleri birer aksiyomdur. 'e'nin bir isim değişkeni yerine kullanıldığı aşağıdaki tabloda bulunan ortak çıkarsama kuralları ise Modus Ponens (MP) ve Değiştirimlilik (Sub) kurallarıdır:

$$\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta; \vdash \alpha}{\vdash \beta}$$

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash e(\alpha)},$$

5.1. Łukasiewicz

Lukasiewicz sistemiyle başlayalım. Bu dizgeye özgü aksiyomlar şu şekildedir:

$$SaS, \quad (1)$$

$$SiS, \quad (2)$$

$$MaP \wedge SaM \rightarrow SaP, \quad (3)$$

$$MaP \wedge MiS \rightarrow SiP. \quad (4)$$

Sistemin Negatif (reddedilmiş) bölümü ise aşağıdaki üç kural ile tanımlanır: (├ *evetlenmiş bir formülü,* ┤ *ise değillenmiş bir formülü ifade eder.)*

- Ayırma yoluyla değilleme MP^{-1}: $\dfrac{\vdash \alpha \rightarrow \beta; \dashv \beta}{\dashv \alpha}$,

- Değiştirim yoluyla değilleme Sub^{-1}: $\dfrac{\dashv e(\alpha)}{\dashv \alpha}$,

(Aşağıda ‘e’ isim değişkenleri için bir değiştirimdir)

- Ayrışma kuralı $Comp^{-1}$:

∝’nın atomların birleşimi ve $\beta_i(1 \leq i \leq \mathrm{n})$’ nin birer atom olduğu aşağıdaki örnekte ise:

$$\frac{\dashv \alpha \rightarrow \beta_1; \ldots; \dashv \alpha \rightarrow \beta_n}{\dashv \alpha \rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n}, n \geq 1,$$

Son kural ise; Slupecki, Lukasiewicz ve Sheperdson’un Horn teorilerinin daha genel bir sonucunu yansıtacak biçimde (46)da kullandığı, Slupecki kuralının bir çeşitlemesidir (45).

Aşağıdaki formül ise, tek değillenmiş aksiyomdur:

$$PaM \wedge SaM \rightarrow SiP. \quad (5)$$

Aksiyomatik sistemin nasıl çalıştığını görmek için, aşağıda bulunan Genel Olumsuz cümleler için döndürme kuralının bir ispatını gösterelim: (önermesel salt biçimsel dizge uygulamaları için “PC” kısaltmasını, e(M)=P gibi değiştirimler için M / P kısaltmasını kullandık)

$$SeP \rightarrow PeS$$

1.	$MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$	axiom (4)
2.	$PaP \wedge PiS \rightarrow SiP$	Sub : 1 (M/P)
3.	$PaP \rightarrow (PiS \rightarrow SiP)$	PC: 2
4.	MaM	axiom (1)
5.	PaP	Sub : 4 (M/P)
6.	$PiS \rightarrow SiP$	MP: 3, 5
7.	$\neg SiP \rightarrow \neg PiS$	PC: 6
	$SeP \rightarrow PeS$	definition of SeP: 7

*(SeP: 7’nin tanımı)

Olumsuz Çıkarsamaya bir örnek olarak, Genel Olumlu cümlelerin analojik döndürmesinin bir çürütmesini gösterelim:

SaP → PaS

1.	$\vdash MaP \wedge SaM \to SaP$	axiom (3)
2.	$\vdash MaP \wedge MiS \to SiP$	axiom (4)
3.	$\vdash SiS$	axiom (2)
4.	$\vdash SaP \wedge SiS \to SiP$	Sub: 2 (M/S)
5.	$\vdash SiS \to (SaP \to SiP)$	PC: 4
6.	$\vdash SaP \to SiP$	MP: 5,3
7.	$\vdash MaP \wedge SaM \to SiP$	PC 1, 6
8.	$\vdash (MaP \wedge SaM \to SiP) \to ((PaM \to MaP) \to (SaM \wedge PaM \to SiP))$	PC
9.	$\vdash (PaM \to MaP) \to (SaM \wedge PaM \to SiP)$	MP: 8, 7
10.	$\dashv PaM \wedge SaM \to SiP$	rejected axiom (5)
11.	$\dashv PaM \to MaP$	MP^{-1}: 9, 10
	$\dashv SaP \to PaS$	Sub^{-1}: 12 $(S/P, P/M)$

*10'da aksiyom 5'in reddi var)

Lukasiewicz göstermiştir ki; tüm Aristotelesci assertorik kıyas ve Aristoteles'in bahsettiği tek öncüllü geçerli akıl yürütme şeması mukabili; Lukasiewicz'in dizgesinde ispatlanabilir çıkarımlar biçiminde mevcuttur. Hatta; bu dizge tüm klasik önermeler kalkülüsünü içerdiği için; Aristoteles'in tartıştığı akıl yürütme şemasıyla direkt bağlantılı olmayan, (ya da çıkarsanmayan) aşağıdaki gibi çoğu denklem de ispatlanabilirdir.

$$SaP \to SaP,$$

$$SiP \vee SoP,$$

$$\neg(SaP \vee SeP)$$

Lukasiewicz'in sistemi çürütmesel anlamda eksiksizdir; örneğin her dil formülü ya teoremdir ya da değillenebilirdir. Bunun delilleri pek bilinirdir (bkz. 47-48) ve biz de burada tekrar etmeyeceğiz. Yalnızca ispatın temelde şu gözleme dayandığını belirtelim: $\propto$'nın atomların birleşimi olduğu $\propto \longrightarrow SaP$ biçimindeki formül yalnızca ve yalnızca $\propto$, S'yi P'ye bağlayan bir zincir içerirse bir teoremdir; ve bu formül, bir teorem olmadığında değillenir. Bir zincir, aşağıdaki biçimde bir birleşimdir.

$$SaM_1 \wedge M_1aM_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{M}_naP \; (n \geq 0).$$

Bu şekilde sonuçlar; evetlenmiş tarafta temel önermeler mantığı çıkarsamaları dili tarafından, değillenmiş tarafta ise MP^{-1} ve $Comp^{-1}$ kurallarından faydalanılarak tüm formüllere yayılır.

5.2. Lemmon

Şimdi boş-olmayan ad kısıtlamalarından azade sistemlere bakalım. Bu fikre uygun birçok aksiyomlaştırma mevcuttur. Bu aksiyomlaştırmalar, aksiyomların seçiminden öte olacak biçimde, temelde iki noktada ayrılırlar. İlki, bazılarının Lukasiweicz'deki a ve i gibi aynı operatörleri; bazılarının ise i yerine nominal reddetmeyi kullandığı bir dizi ilkel tasımdır. Diğer farklılık ise operatör a'nın (güçlü ya da zayıf olabilecek) yorumuna ilişkindir. Kuşkusuz ikisinde de SaP'nin doğru olabilmesi için S'nin P'yi içermesi gerekir; ancak güçlü yorumda S'nin mutlaka boş-olmayan olması gerekirken, zayıf yorumda bu geçerli değildir.

Güçlü yorum, -başka araştırmacılar yanında- Wedbergi Menne ve ve Lemmon (32, 33, 49) tarafından benimsenmiştir. Değilleme kısmı zayıf olan yorumdan çok daha basit olduğu için bu yorumdan başlayacağız. Burada Lemmon'un dizgesinin (45'teki) bir çeşitlemesini ve Denklem 3 ve 4'e ek olarak aşağıdakileri aksiyom olarak kullandık:

$$SaP \rightarrow SiP, \qquad (6)$$

$$PiS \rightarrow SaS \qquad (7)$$

Dizgenin değilleme karşılığı, Lukasiewicz dizgesindeki kuralların aynısından, Eşitlik 5 ve aşağıdaki aksiyomun değillenmiş önerme olarak tanımından oluşur.

$$PaP \rightarrow SiS \qquad (8)$$

Lukasiewicz'nin sistemindekine benzer biçimde, dizgenin değilleme eksiksizliği (50)'de görülebilir.

5.3. Shepherdson

Şimdi – (51'de p.311) Brentano tarzı kıyas olarak da adlandırılan- Sheperdson dizgesine geçebiliriz. Bu dizgeye özgü önermeler, 1, 3 ve 4. Denklemlerde:

$$SiP \rightarrow SiS, \qquad (9)$$

ve hemen aşağıda görülebilir:

$$SaP \vee SiS. \qquad (10)$$

Lemmon'un sisteminin doğruluğunu varsayarsak, Sheperdson'un dizgesini Lemmon'unkine dahil ederek Sheperdson'da doğruluk sonucu elde edebiliriz. Sheperdson ve Lemmon dizgeleri arasındaki ilişkiyi tanımlamak için, a operatörünün iki dizgede gerçekleşen iki varyantını a_S ve a_L biçiminde ayıralım. Bu şekilde bir operatörü diğer operatörle tanımlayacak şekilde aşağıdaki denklemleri formüle edebiliriz:

$$Sa_SP \equiv Sa_LP \vee \neg(SiS),$$

$$Sa_LP \equiv Sa_SP \wedge SiS.$$

Şimdi de Shepherdson sistemindeki değilleme karşılıklarına bakalım. Bu dizge ilk defa (uzun ve oldukça zahmetli fakat oldukça öngörülebilir olan) tam ispatın verildiği (50)'de sunuldu. Biz burada sadece ispatın bir eskizini yapacağız ve eksiksizlik tartışmalarında değilleme yaklaşımındaki kullanışlılığı üzerine yorumlarda bulunacağız.

Önce kolay kısmından başlayalım: Denklem 1, 3, 4 ve 9'un aksiyomlar olarak alındığı, Shepherdson sisteminin Horn fragmanının değilleme sistemine bakalım.

Burada değilleme kuralları Lukasiewicz'in sistemiyle aynıdır, değillenmiş aksiyomlar ise şunlardır:

$$SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \rightarrow SiP \qquad (11)$$

$$PiP \wedge SaP \rightarrow SiS. \qquad (12)$$

Buradaki değilleme eksiksizliği, Lukasiewicz'in sistemiyle kıyaslanabilirdir.

Şimdi Sheperdson'un tüm dizgesine ve değilleme karşılığına dönelim. Tanımlamak için -Lukasiewicz'in dizgesindeki gibi- MP^{-1} ve $Comp^{-1}$ kuralları ile; modifiye edilmiş $Comp^{-1}$ ve $Comp_2^{-1}$ biçimindeki versiyonları kullanacağız. Aşağıda ∝ atomların birleşimi ve β_i (1 ≤i ≤ n) birer atomdur:

$$\frac{\dashv \alpha \to \beta_i \vee \beta_j, \text{ for each i, j, such that: } 1 \leq i < j \leq n}{\dashv \alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n}, n \geq 2,$$ [2]

Burada tek değillenmiş aksiyom şu şekildedir:

$$MaS \wedge MaP \wedge MaQ \wedge SaR \wedge PaR \wedge RaN \wedge QaN \wedge SiS \wedge PiP \wedge QiQ \to SiP \vee RiQ. \qquad (13)$$

Değillenmiş aksiyomun seçimi tamamen tekniktir; eksiksizliği ispat için yeterli olarak görülmüştür. Bir sonraki bölümde bunun geçerli olmadığını ve bu yüzden de reddedilmesi gerektiğini bir örnek yoluyla göstereceğiz. $Comp^{-1}$ kuralının rolü de -değillenebilirlik tamlığının ispatını açıklamak olarak-benzer biçimde tekniktir. İlerleyen bölümde bunun geçerliğini temellendirmeye çalıştık.

Öncelikle Denklem 11 ve 12'nin değillendiğini fark edelim: Bunu her iki formülden de ayrı ayrı Denklem 13'deki değillenmiş aksiyomu çıkarsayarak kanıtlayabiliriz. Denklem 11'den Denklem 13'ü çıkarsamak için R'yi M ile değiştirdikten sonra yalnızca önbileşeni zayıflatıp ardbileşeni güçlendirmemiz yeterlidir. Denklem 12 için öncelikle P yerine S, ve S yerine M değişikliğini yapalım. Ardından, $MiM \wedge MaS \wedge MaP \to SiP$ olgusunu dizgenin bir teoremi olarak alıp, klasik önermeler mantığı kalkülüsünü kullanarak Denklem 13'ü çıkarsamaya çalışalım. Böylece, sistemdeki her Horn formülü ya teorem, ya da değillenmiş bir formül olacaktır.

Şimdi aynı olguyu, (∝'nın atomların birleşimi, β_1 ve β_2'nin birer atom olduğu) aşağıdaki biçim formülleri için ispatlamamız gerekiyor:

$$\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2, \qquad (14)$$

Bu amaç doğrultusunda belirtmek gerekir ki, değillenmiş aksiyom, aşağıdaki daha uzun formüle denktir:

$$\begin{gathered}
MaM \wedge MaS \wedge MaP \wedge MaR \wedge MaQ \wedge MaN \wedge SaS \wedge SaR \wedge SaN \wedge \\
PaP \wedge PaR \wedge PaN \wedge RaR \wedge RaN \wedge QaQ \wedge QaN \wedge NaN \wedge \\
SiS \wedge SiR \wedge RiS \wedge SiN \wedge NiS \wedge PiP \wedge PiR \wedge RiP \wedge PiN \wedge NiP \wedge \\
RiR \wedge RiN \wedge NiR \wedge QiQ \wedge QiN \wedge NiQ \wedge NiN \to \qquad (15) \\
SaM \vee SaP \vee SaQ \vee PaM \vee PaS \vee PaQ \vee RaM \vee RaS \vee RaP \vee RaQ \vee \\
QaM \vee QaS \vee QaP \vee QaR \vee NaM \vee NaS \vee NaP \vee NaR \vee NaQ \vee \\
MiM \vee MiS \vee SiM \vee MiP \vee PiM \vee MiR \vee RiM \vee MiQ \vee QiM \vee \\
MiN \vee NiM \vee SiP \vee PiS \vee SiQ \vee QiS \vee PiQ \vee QiP \vee RiQ \vee QiR.
\end{gathered}$$

Bu formülün sezgisel anlamı tam olarak doğrudan değil. Teknik açıdan; eksiksizlik sonuca ulaşmak için ardbileşenin önbileşenden çıkarsanmasına izin vermeyen gerektirmelerin iki tarafına 6 değişkenden oluşan atomların eklendiği bir maksimal kombinasyondur bu.

[2] Pay kısmında, "her i ve j: 1 $\leq i < j$ ≤ n olacak biçimde" yazmaktadır.

Denklem13'ün önbileşen ve ardbileşeni Denklem 15'in sırasıyla önbileşeni ve ardbileşeni olduğu için, Denklem 13'ten 15'e yapılan çıkarsama geçerlidir. Denklem15'ten 13'e yapılan çıkarsama ise sistemin aşağıdaki teoremlerine dayanmaktadır:

- Denklem 15'in önbileşenlerinin elemanlarını barındıran gerektirmeler, Denklem 13'ün öbileşenlerinde mevcut değildir; benzer şekilde Denklem 13'ün ardbileşeninin, önbileşen (ya da bir fragmanının) olarak alındığı aşağıdaki örnekteki gibi de geçerlidir:
$MaS \wedge SaR \rightarrow MaR,$

- Denklem 15'in ardbileşenlerini barındıran gerektirmeler de Denklem 13'ün ardbileşenlerinde mevcut değildir; benzer şekilde Denklem 13'ün, önbileşeninin (ya da bir fragmanının) ardbileşen olarak alındığı aşağıdaki örnekteki gibi de geçerlidir:
$SaM \wedge SiS \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP.$

Böylece, Denklem 13'te bulunmayan tüm Denklem 15 elemanları elimine edilebilir.

Şimdi ispatın asıl noktasına geçebiliriz: Yani denklem 14'ün tüm muhtemel biçimlerinin analizine. Bu eşitliğin ardbileşeni, şu üç biçimden biri olacaktır:

(i) $SiP \vee RiQ$, (ii) $SiP \vee RaQ$, (iii) $SaP \vee RaQ$

(i) durumunda; $\alpha \rightarrow SiP$ veya $\alpha \rightarrow RaQ$ bir teorem olursa $\alpha \rightarrow SiP \vee RiQ$ biçimiyle ilgili formüller de birer teorem olacaktır.

(ii) durumunda, bir formülün teorem olması aşağıdaki üç koşuldan birinin sağlanması gerekmektedir:

- $\alpha \rightarrow SiP$ bir teoremdir,
- $\alpha \rightarrow RaQ$ bir teoremdir,
- Şu koşullar oluşursa: (I) alfa R'yi S'ye (ya da S ve R yerine geçecek eşit bir değişken) bağlayan bir zincir barındırıyorsa, ve (II) alfa R'yi P'ye (ya da P ve R yerine geçecek eşit bir değişken) bağlayan bir zincir barındırıyorsa.

(iii) durumunda, $\alpha \rightarrow SaP$ veya $\alpha \rightarrow RaQ$ bir teorem olursa $\alpha \rightarrow SaP \vee RaQ$ biçimiyle ilgili tüm formüller de birer teorem olacaktır.

Üç durumda da (i-iii); eğer bahsi geçen formül yukarıdakilerden biri değilse; (gerekirse değişkenler yeniden adlandırıldıktan sonra) önbileşeninde yalnızca Denklem 15'in önbileşen elemanlarını, ardbileşeninde de yalnızca Denklem 14'ün ardbileşen elemanlarını barındıracaktır. Bu koşulu yerine getiren tüm formüller değillenir. Dolayısıyla Denklem 14'teki formüldeki biçim ya bir teoremdir ya da değillenebilir.

Geriye teoremler kümesinin ve değillenen formüller kümesinin ayrık olduğunu kanıtlamak kalıyor. Bunun için, a) Teorem-olmayanlardan diğer teorem olmayanlara uzanacak bir değilleme kurallarını, ya da b) Değillenmiş aksiyomun teorem olmadığını göstermek durumundayız.

a) durumunda; MP^{-1} ve Sub^{-1} olguları için kurallar bariz olduğundan, ilginç kısım $Comp^{-1}$ 'in zayıf versiyonudur. Burada göstermeliyiz ki; ∝'nın atom olduğu, β_1 β_2 ve β_3 'ün de atomlar bileşeni olduğu durumda $\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3.$ formülü sistemin bir teoremi ise, o zaman en azından $\alpha \rightarrow \beta_i \vee \beta_j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ formülü de bir teoremdir. Bu olgunun ispatı ise, Denklem 10'un her Horn-olmayan sistem aksiyomunun, sistem içinde bir türetimde efektif biçimde iki defa kullanılamayacağı varsayımından temellenir. Dolayısıyla $\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$ formülünü elde etmenin tek yolu, klasik önermeler kalkülüsünün münhasır kurallarından faydalanarak yeni bir ardbileşen elemanı eklemektir.

Değillenmiş aksiyomun bir teorem olmadığını göstermek için, aşağıdaki matrisi kullanabiliriz:

a	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
n_1	1	1	1	1	1	1
n_2	0	1	0	1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	1
n_4	0	0	0	1	0	1
n_5	0	0	0	0	1	1
n_6	0	0	0	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
n_1	0	0	0	0	0	0
n_2	0	1	0	1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	1
n_4	0	1	1	1	0	1
n_5	0	0	0	0	1	1
n_6	0	1	1	1	1	1

Bu matris; formüllerde $n_i \; (1 \leq i \leq 6)$ değerlerinin nominal değişkenler yerine kullanıldığında atomların doğruluk değerlerini göstermektedir. Shepherdson'un aksiyomlarının normalde sadece 1 değeri aldığına dikkat edelim. Denklem 13'te değillenmiş aksiyom; (M yerine n1, S yerine n2, P yerine n3, R yerine n4, Q yerine n5 ve N yerine n6 koyduğumuzda) 0 değeri alacaktır.

5.4. Çürütme ve yeterlik

Belirtmeliyiz ki, bir önceki bölümde sistemlerin sunumunda kategorik cümlelerin küme-teorik modellerinden hiç bahsetmedik. Bu kıyasın; günümüzde onu anlamak için çoğunlukla kullanılan küme teorik (set-theoretical) sezgilerinden bağımsız, kendine münhasır bir teori olarak görmemizi sağlamaktadır.

Kıyas'ın tam aksiyomatik sunumu; belki de formelleştirmemizin doğruluğunu kontrol etmemizi sağlayabilir. Bu sistemin doğruluğunu kontrol için, aksiyomların sezgisel olarak doğru olduğunu (ve değillenmiş aksiyomların doğru olmadığını), ayrıca aksiyomlardan teorem dedükte etttiğimiz (ve değillenmiş aksiyomlardan ve teoremlerden çıkarsan değillenmiş formüllerin) kuralların düzgün çalıştığını göstermeliyiz. Burada doğruluk -küme modeli gibi- diğer formel sistemlerle uyumlu olmadığı için, buradaki argümantasyon da yalnızca biçimsel olamaz.

Üç sistemdeki aksiyomlar için; öncelikle Denklem 3 ve 4'teki ortak bölümü oluşturan aksiyomlara bakalım. Bunlar Aristoteles'den gelmektedir ve sezgisel olarak oldukça açık ve ikna edici görünmektedir. Sistemin geri kalan kısmında ise boş-adlarla ilgili sorunun çözülmesi gerekir. Lukasiewicz'in dizgesinde boş-adlara izin verilmez. Dolayısıyla; pozitif kategorik cümlelerde sadece (SaS ve SiS gibi) aynı adı iki kez kullanmayı kabul edersek, mantıklı olur ki, bu cümlelerin de doğru olduğunu kabul etmeliyiz. Lemmon'un sisteminde ise Denklem 6 ve 7 'deki spesifik aksiyomlar, i'ye varoluşsal bağlılıkla birlikte SaP'nin güçlü yorumunu içeren bir çekirdek barındırmaktadır. Sheperdson'un sisteminde Denklem 1'de kabul edilen aksiyomda -a'nın zayıf yorumu içerecek biçimde- ve dolayısıyla boş-adlar için de doğru yapacak biçimde SaS'nin kabulünü görmekteyiz. Denklem 9, i'ye varoluşsal bağlılık anlamında Eşitlik 7 ile benzerdir. Ve son olarak, Denklem 10 göstermektedir ki N adı ya boştur (böylece SaP, a'nın zayıf yorumu altında doğru olur) ya da boş-değildir (böylece SiP doğrudur) Dolayısıyla, söylenebilir ki her sistem, sezgisel arka planlarını doğru biçimde yansıtmaktadır.

Değillenmiş bir aksiyomun değillenmesi gerektiğini göstermek için, sadece geçerli olmadığını göstermemiz gerektiğinden yalnızca bir karşı örnek bulmak yeterlidir. Aristoteles'in çalışma yöntemi bu şekildedir. Bunun için değillenmiş aksiyomlar olarak yukarıda kullanılmış aksiyomatik sistemlere bakalım.

Denklem 5'te; S yerine kedi, P yerine köpek ve M yerine hayvan diyelim. Kedi ve köpek birer hayvandır fakat hiçbir kedi, köpek değildir. Denklem 8 için; P yerine kedi, S yerine (tekboynuzlu atların gerçek olmadığını ve "bazı tekboynuzlu atlar birer tekboynuzlu attır" ifadesinin yanlış olduğunu varsayarak) tekboynuzlu at diyelim. Her kedi, kedi olsa bile; bu durum bazı tekboynuzlu atlar tekboynuzlu attır önermesi için geçerli değildir. Denklem 13 biraz daha karmaşık olduğu için, karşı örneği de takibi biraz daha zor biçimde karmaşık olacaktır. M'ye tekboynuzlu at, S'ye kedi, P'ye köpek, R'ye memeli, Q'ya papağan ve N'ye de hayvan diyelim. Bu şekilde Denklem 13'ün önbileşenlerinin tüm elemanları doğru olacaktır: (tekboynuzlu atlar gerçek olmadığından) her tekboynuzlu at bir kedidir, her tekboynuzlu at bir papağandır, her kedi memelidir, her köpek memelidir, her memeli bir hayvandır, her papağan bir hayvandır, bazı kediler kedidir, bazı köpekler köpektir ve bazı papağanlar papağandır; fakat hiçbir kedi köpek değildir ve hiçbir memeli papağan değildir.

MP ve Sub kuralları ile MP^{-1} ve Sub^{-1}yanlışlama karşılıkları mantıkta oldukça doğal ve yaygın olarak görülmektedir. Ayrışma kurallarının gerekçelendirilmesi ise bundan daha az nettir. Comp-, güçlü versiyonunda kıyasın açık netice veren tek-sonuçlu şemasının yalınlığını yansıtır. Modifiyeli versiyon olan $Comp_2^{-1}$ daha zayıftır; çünkü Sheperdson'un sistemi Denklem 10'u bir aksiyom olarak barındırdığı için $Comp^{-1}$ burada geçerli değildir. Dolayısıyla sistem kıyas bakımından iki sonuca izin verir, ancak daha fazlasına değil. Bu prensip, $Comp_2^{-1}$ tarafından sınırlanan Denklem 10 ve sonuçlarını bir istisna olarak kabul ederek anlaşılabilir.

Hülasa; yukarıda tartışılan dizgelerde gerekli olan koşullara yönelik biçimsel olarak oluşturulan tüm sezgisel temsiller doğru biçimde gerçekleştirilmiştir. Bu da bize, Aristotelesci mantıkta kaynağını bulan çürütme tekniklerinden temellenen modelsiz mantığın doğruluğunu (geçerlilik ve eksiksizlik) nasıl tartışacağımız yönünde bir örnek sunmaktadır.

6. Sonuç

Aristoteles ve modern mantıkçılar, doğru akıl yürütmenin hassas formülasyonu konusunda benzer sezgisel arzuyu paylaşırlar. Burada gösterdik ki Lukasiewicz'in Aristoteles'den etkilendiği aksiyomatik çürütme sistemi, böyle bir formülasyonun değerlendirme aracı olarak çalışmaktadır. Spesifik olarak, Lukasiewicz, Lemmon ve Shepherdson tarafından öne sürülen kıyasın üç aksiyomatik sisteminin doğruluğunu tartıştık.

Bu çalışmadaki temel sonuçlarımızı belirtelim. Öncelikle kabul etmeliyiz ki kıyas, Aristoteles'in ilginç metalojik çalışmalar yürüttüğü, tam-yetkin dedüktif bir sistemdir. İkincisi, kıyasın modern yeniden inşalarına baktığımızda, kanaatimizce, teorilerin içeriğine bakmak belli formelleştirme araçlarına odaklanmaktan daha ilginçtir. Üçüncü olarak, -zikredilen yeniden inşaları dahil- bir teorinin kalitesini değerlendirmek için en önemli özellik, doğruluk ve eksiksizliğini içerecek şekilde o teorinin yeterliğidir. Aksiyomatik çürütme, yeterlik göstermek için ilginç bir yöntemdir. Günümüz mantığında sıkça kullanılan Model-Teorik yaklaşımına bir alternatif olarak kullanılabilir.

Son olarak; Lukasiewicz'in bu çalışmada kullanılan üç sistemi için diyebiliriz ki, bunların hepsi için de çürütme karşılıklarını oluşturabiliriz. Üç çürütme karşılığı formalizasyonu da sistemlerin takip ettikleri sezgisel temele göre yeterliği göstermeye yardımcı olabilir. Ne var ki, Shepherdson'un dizgesi atomik formüllerin tümel evetlemesi biçiminde bir aksiyom barındırdığı için, çürütme sistemi ve yeterlik ispatı çok daha karmaşıktır.

Kaynakça

Smith, R. Aristotle's Logic. In The Stanford Encyclopedia of Philosophy; Zalta, E.N., Ed.; Metaphysics Research Lab, Stanford University: Stanford, CA, USA, 2019.

Glashoff, K. Aristotelian Syntax from a Computational-Combinatorial Point of View. J. Log. Comput. 2005, 15, 949–973.

Steinkrüger, P. Aristotle's assertoric syllogistic and modern relevance logic. Synthese 2015, 192, 1413–1444.

Crager, A. Meta-Logic in Aristotle's Epistemology. Ph.D. Thesis, Princeton University, Princeton, NJ, USA, 2015.

Read, S. Aristotle's Theory of the Assertoric Syllogism. Available online: https://philarchive.org/archive/REAATO-5 (accessed on 1 April 2020).

Moss, L. Completeness theorems for syllogistic fragments. In Logics for Linguistic Structures; Hamm, S.K., Ed.; Mouton de Gruyter: Berlin, Germany; New York, NY, USA, 2008; pp. 143–174.

Pratt-Hartmann, I.; Moss, L. Logics for the relational syllogistic. Rev. Symb. Log. 2009, 2, 1–37.

Glashoff, K. An Intensional Leibniz Semantics for Aristotelian Logic. Rev. Symb. Log. 2010, 3, 262–272.

Moss, L.S. Syllogistic Logics with Verbs. J. Log. Comput. 2010, 20, 947–967.

Kulicki, P. On a Minimal System of Aristotle's Syllogistic. Bull. Sect. Log. 2011, 40, 129–145.

Moss, L.S. Syllogistic Logic with Comparative Adjectives. J. Log. Lang. Inf. 2011, 20, 397–417.

Rini, A. Aristotle's Modal Proofs. Prior Analytics A8-22 in Predicate Logic; Springer: Berlin, Germany, 2011.

Kulicki, P. On minimal models for pure calculi of names. Log. Log. Philos. 2012, 1, 1–16.

Bellucci, F.; Moktefi, A.; Pietarinen, A. Diagrammatic Autarchy: Linear diagrams in the 17th and 18th centuries. In Proceedings of the First InternationalWorkshop on Diagrams, Logic and Cognition, Kolkata,India, 28–29 October 2012; Burton, L.C., Ed.; CEUR Workshop Proceedings: Kolkat a, India, 2013.

Pratt-Hartmann, I. The Syllogistic with Unity. J. Philos. Log. 2013, 42, 391–407.

Castro-Manzano, J. Re(dis)covering Leibniz's Diagrammatic Logic. Tópicos Revista de Filosofía 2017, 52, 89–116.

Pietruszczak, A.; Jarmu˙ zek, T. Pure Modal Logic of Names and Tableau Systems. Stud. Log. 2018, 106, 1261–1289.

Sautter, F.T.; Secco, G.D. A Simple Decision Method for Syllogistic. In Proceedings of the Diagrammatic Representation and Inference—10th International Conference, Diagrams 2018, Edinburgh, UK, 18–22 June 2018. Lecture Notes in Computer Science; Chapman, P., Stapleton, G., Moktefi, A., Pérez-Kriz, S., Bellucci, F., Eds.; Springer: Berlin, Germany, 2018; Volume 10871, pp. 708–711.

Endrullis, J.; Moss, L.S. Syllogistic logic with "Most". Math. Struct. Comput. Sci. 2019, 29, 763–782.

Boche´ nski, I.M. Ancient Formal Logic; North-Holland: Oxford, UK, 1951.

Aristotle. Prior Analytics. Book I; Translated with an Introduction and Commentary by Gisela Striker; Clarendon Press: Oxford, UK, 2014.

Boche´ nski, I.M. The Methods of Contemporary Thought; D. Reidel: Dordrecht, The Netherlands, 1965.

Lear, J. Aristotle's compactness proof. J. Philos. 1979, 76, 198–215.

Scanlan, M. On finding compactness in aristotle. Hist. Philos. Log. 1983, 4, 1–8.

Smiley, T. What is a syllogism? J. Philos. Log. 1973, 2, 136–154.

Boger, G. Completion, reduction and analysis: Three proof-theoretic processes in Aristotle's Prior Analytics. Hist. Philos. Log. 1998, 19, 187–226.

Adžic, M.; Došen, K. Gödel's Notre Dame Course. Bull. Symb. Log. 2016, 22, 469–481.

Corcoran, J. Completeness of an ancient logic. J. Symb. Log. 1972, 37, 696–702.

Corcoran, J. Aristotle's Natural Deduction System. In Ancient Logic and Its Modern Interpretations; Reidel Publishing Co.: Dordrecht, The Netherlands, 1974; pp. 1–100.

Frege, G. Sense and Reference. Philos. Rev. 1948, 57, 209–230.

Słupecki, J. Uwagi o sylogistyce Arystotelesa. Ann. UMCS 1946, I, 187–191.

Wedberg, A. The Aristotelian theory of classes. Ajutas 1948, 15, 299–314.

Menne, A. Logik und Existenz; Westkulturverlag Anton Hain: Berlin, Germany, 1954.

Shepherdson, J. On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic. J. Symb. Log. 1956, 21, 137–147.

Geach, P.T. History of the Corruption of Logic (1968). In Logic Matters; University of California Press: Berkeley, CA, USA, 1980; pp. 44–61.

Ajdukiewicz, K. Logika Pragmatyczna; PWN: Warszawa, Poland, 1965.

Borkowski, L. Logika Formalna; PWN: Warszawa, Poland, 1970.

Grzegorczyk, A. Zarys Logiki Matematycznej; PWN: Warszawa, Poland, 1969.

Pogorzelski,W.A. Elementarny Słownik Logiki Formalnej; DziałWydawnictw Filii UniwersytetuWarszawskiego: Białystok, Poland, 1992.

Marciszewski, W. (Ed.) Mała Encyklopedia Logiki; PWN: Warszawa, Poland, 1988.

Waragai, T.; Oyamada, K. A System of Ontology Based on Identity and Partial Ordering as an Adequate Logical Apparatus for Describing Taxonomical Structures of Concepts. Ann. Jpn. Assoc. Philos. Sci. 2007, 15, 123–149.

Słupecki, J.; Bryll, G.; Wybraniec-Skardowska, U. Theory of rejected propositions. I. Stud. Log. 1971, 29, 75–115.

Goranko, V.; Pulcini, G.; Skura, T. Refutation Systems: An Overview and Some Applications to Philosophical Logics. In Knowledge, Proof and Dynamics; Liu, F., Ono, H., Yu, J., Eds.; Springer: Singapore, 2020; pp. 173–197.

Wybraniec-Skardowska, U. Rejection in Łukasiewicz's and Słupecki's Sense. In The Lvov-Warsaw School. Past and Present; Garrido, Á., Wybraniec-Skardowska, U., Eds.; Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2018; pp. 575–597.

Kulicki, P. The Use of Axiomatic Rejection. In The Logica Yearbook 1999; Childers, T., Ed.; Filosofia: Prague, Czech Republic, 2000; pp. 109–117.

McKinsey, J. The Decision Problem for some Classes of Sentences without Quantifiers. J. Symb. Log. 1943, 8, 61–76.

Słupecki, J. Z badan´ nad sylogistyka˛Arystotelesa; Wrocławskie Towarzystwo Naukowe: Wrocław, Poland, 1948.

Lukasiewicz, J. Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic; Clarendon Press: Oxford, UK, 1952.

Lemmon, E.J. Quantifiers and Modal Operators. Proc. Aristot. Soc. 1958, 58, 245–268.

Kulicki, P. Aksjomatyczne Systemy Rachunku Nazw; Wydawnictwo KUL:Warszawa, Poland, 2011.

Prior, A.N. Formal Logic; Clarendon Press: Oxford, UK, 1962.