



Comparison of system identification methods on movement dynamics of weakly electric fish

Onurcan Yılmaz¹, Eren Cem Göksülük¹, İsmail Uyanık*¹

Department of Electrical and Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Hacettepe University, 06800, Ankara, Türkiye

Highlights:

- Dataset of 7 different weakly electric fish of the *Apteronotus albifrons* species during refuge tracking behavior is used
- Eight different system identification methods are applied on weakly electric fish data
- Root-Mean-Square Estimation Errors of each method are compared using 7-fold cross validation

Keywords:

- System Identification
- Prediction Error
- Subspace Identification
- Weakly Electric Fish

Article Info:

Research Article
Received: 01.11.2023
Accepted: 04.08.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1384350

Acknowledgement:

This study is supported by TUBITAK (120E198). We would like to thank Emin Yusuf Aydın for his support during the data collection process. The experiments were carried out with the approval of Hacettepe University Animal Experiments Ethics Committee.

Correspondence:

Author: İsmail Uyanık
e-mail: ismailuyanik@hacettepe.edu.tr
phone: +90 312 297 7025

Graphical/Tabular Abstract

In this study, we compared system identification methods using the behavioral response data of *Apteronotus albifrons*, a species of weakly electric fish, during refuge tracking behavior. Experiments conducted in the Hacettepe University Neuroscience and Robotics Laboratory with the approval of the Hacettepe University Animal Experiments Ethics Committee. During the experiments, refuge movements were generated from the sum of sine waves collected at 13 different frequencies [0.1 Hz, 0.15 Hz, 0.25 Hz, 0.35 Hz, 0.55 Hz, 0.65 Hz, 0.85 Hz, 0.95 Hz, 1.15 Hz, 1.45 Hz, 1.55 Hz, 1.85 Hz, 2.05 Hz]. The selected frequencies are multiples of 0.05 Hz. Additionally, the 11-ese frequencies were chosen within a range in which weakly electric fish could perform refuge tracking behavior in a linear manner (Roth et al., 2011). On the other hand, a complex signal was generated to prevent the fish from memorizing the movements. Root-Mean-Square Estimation Errors of system identification methods -Frequency Response Function, Power Spectral Analysis, Recursive Least Squares, Wiener-Hopf, Nonlinear Hammerstein-Wiener, ARX, ARMAX, n4sid- are compared using 7-fold cross validation and their results can be seen in Table A.

Table A. The mean and variances of estimation errors of each method

Method	Performance on Reference Dataset	Performance on Train Dataset
FRF	0,1122 ± 0,0456	0,0338 ± 0,0089
PSA	0,1555 ± 0,0566	0,1199 ± 0,0305
RLS	0,1219 ± 0,0682	0,1256 ± 0,0338
W&H	0,1220 ± 0,0682	0,1258 ± 0,0389
NLHW	0,1502 ± 0,1050	0,1518 ± 0,0851
ARX	0,1177 ± 0,0653	0,1190 ± 0,0357
ARMAX	0,1162 ± 0,0679	0,1175 ± 0,0340
N4SID	0,1169 ± 0,0664	0,1180 ± 0,0342

Purpose:

The aim of this study is to compare eight different system identification methods on a biological system. In this study, the motion dynamics of the refuge-tracking behaviour of weakly electric fish were used as a dataset.

Theory and Methods:

Frequency Response Function, Recursive Least Squares Method, Spectral Analysis Method and Wiener-Hopf Method were used in this study. ARX, ARMAX and Nonlinear Hammerstein-Wiener methods were used as parametric methods. As a subspace identification method, the n4sid method, which is widely used in the literature, was preferred.

Results:

The results obtained show that despite various differences and disadvantages, the estimation performance of all methods gives good results. Methods such as Frequency Response Function, ARX and ARMAX Models and N4SID gave better results in general.

Conclusion:

Compared to the alternatives, subspace identification methods stand out due to their ability to eliminate noise well and to express even complex systems with low-dimensional linear systems. Especially in studies on complex systems such as living organisms, the use of subspace identification methods will help to produce more effective results.



Sistem tanılama yöntemlerinin zayıf elektrik balıklarının hareket dinamikleri üzerinden karşılaştırılması

Onurcan Yılmaz^{ID}, Eren Cem Göksülük^{ID}, İsmail Uyanık*^{ID}

Hacettepe Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06800, Çankaya, Ankara, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Zayıf elektrik balıklarından elde edilen veriye sekiz farklı sistem tanılama metodu uygulandı
- Tüm metodların tahmin hatasının karesel ortalamasının karekökleri 7 katlamalı çapraz doğrulama kullanılarak karşılaştırıldı
- Tüm metodlar için performans sonuçları değerlendirildi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 01.11.2023

Kabul: 04.08.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1384350

Anahtar Kelimeler:

Sistem tanılama,
tahmin hatası,
alt uzay tanılama,
zayıf elektrik balıkları

ÖZ

Sistem tanılama, fiziksel sistemlerin matematiksel temsillerini geliştirme veya iyileştirme sürecini ifade eder. Genellikle mühendislik ve kontrol sistemleri alanında kullanılır. Bu çalışmada, zayıf elektrik balıklarının sığınak takibi davranışının hareket dinamiklerini kullanarak sistem tanılama tekniklerini karşılaştırılmalı olarak inceledik. Sistem tanılama yöntemleri iki ana kategoriye ayrılır: Tahmin Hatası Yöntemi ve Alt Uzay Tanılama. Tahmin hatası yöntemi ise yine kendi altında parametrik ve parametrik olmayan olarak ikiye ayrılır. Parametrik olmayan tanılama yöntemleri arasından literatürde sıklıkla kullanılan Frekans Tepki Fonksiyonu, Yinelemeli En Küçük Kareler Metodu, Spektral Analiz Yöntemi ve Wiener-Hopf Metodunu, parametrik yöntemler olarak ise ARX, ARMAX ve Doğrusal Olmayan Hammerstein-Wiener modellerini kullandık. Alt Uzay Tanılama için ise n4sid yöntemini tercih ettik. Elde edilen sonuçlar çeşitli farklara ve dezavantajlara rağmen tüm yöntemlerde kestirim başarımının iyi sonuçlar verdiğini ortaya koymaktadır. Alternatiflerine oranla alt uzay tanılama yöntemi, hem gürültüyü iyi elimine etme özelliği hem de karmaşık sistemleri dahi düşük boyutlu doğrusal sistemlerle ifade edebiliyor olması nedeniyle öne çıkmaktadır.

Comparison of system identification methods on movement dynamics of weakly electric fish

H I G H L I G H T S

- Eight different system identification methods are applied on weakly electric fish data
- Performance of Root-Mean-Square Estimation Errors are compared using 7-fold cross validation
- Performance results were evaluated for all methods

Article Info

Research Article

Received: 01.11.2023

Accepted: 04.08.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1384350

Keywords:

System identification,
prediction error,
subspace identification,
weakly electric fish

ABSTRACT

System identification refers to the process of developing or improving mathematical representations of physical systems. It is often used in the field of engineering and control systems. In this study, we comparatively investigate system identification techniques using the motion dynamics of the refuge-following behaviour of weakly electric fish. System identification methods fall into two main categories: Prediction Error Method and Subspace Identification. The prediction error method is divided into two categories: parametric and non-parametric. Among the non-parametric identification methods, we used the Frequency Response Function, Iterative Least Squares Method, Spectral Analysis Method and Wiener-Hopf Method, which are frequently used in the literature, and ARX, ARMAX and Nonlinear Hammerstein-Wiener as parametric methods. For subspace identification, we preferred the n4sid method. The results obtained show that despite various differences and disadvantages, all methods give good results in estimation performance. Compared to its alternatives, the subspace identification method stands out both because of its ability to eliminate noise well and because it can represent even complex systems in the form of low-dimensional linear systems.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : eren.goksuluk@hacettepe.edu.tr, onurcan.yilmaz@hacettepe.edu.tr,

*ismailuyanik@hacettepe.edu.tr / Tel: +90 312 297 7025

1. Giriş (Introduction)

Sistem tanımlama, deneysel verileri kullanarak fiziksel bir sistemin matematiksel bir temsilini geliştirme veya iyileştirme süreci olarak tanımlanabilir [1]. Genellikle mühendislik ve kontrol sistemleri alanında kullanılan bir terimdir ve sistemin matematiksel modelini oluşturma veya mevcut bir modeli güncelleme sürecini ifade etmek için kullanılır. Son yıllarda pek çok farklı disiplin çeşitli sistem tanımlama tekniklerinden faydalanmıştır [2, 3]. Sistem tanımlama alanında en önemli noktalardan biri, tanımlama yapılacak sistemin karakteristiklerini göz önünde bulundurarak hesaplama süreçlerini ve bunların uygulanmasını etkili ve doğru analitik araçlarla gerçekleştirmektir.

Bu çalışmada veri kümesi olarak zayıf elektrik balıklarının sığınak takibi davranışının hareket dinamikleri kullanılmıştır. Bu balıklar doğal av olmayı önleme iç güdülerini nedeniyle hayatlarının önemli bir bölümünü su içerisinde bulunan ağaç parçaları, yosunlar vb. nesnelere içinde saklanarak geçirirler. Aynı zamanda gelişmiş hareket yetenekleri sayesinde bu cisimlerin hareketine bağlı olarak anal yüzgeçleri vasıtasıyla ileri-geri yüzerek cisimleri oldukça hassas bir şekilde takip ederler [4, 5].

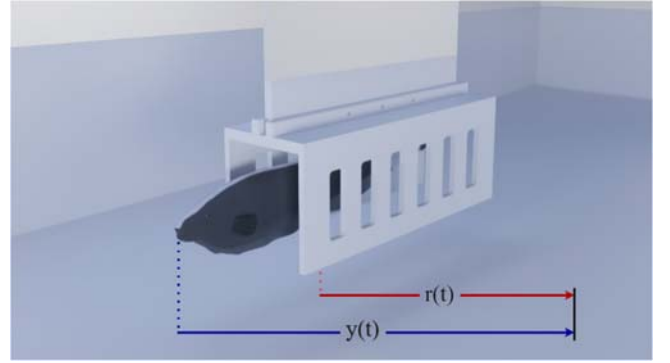
Laboratuvar ortamında balıkların doğal bu davranışlarını araştırmak için özel olarak geliştirilmiş deney düzeneklerinden yararlanılmaktadır. Bu düzenek balıkların doğal ortamlarındaki nehir yataklarını taklit edebilmek amacıyla bir akarsu tüneli biçimindedir. Bu düzenek içerisinde hareketi dışarıdan bir motor yardımıyla kontrol edilebilen yapay sığınak alanları bulunur. Böylelikle bu hareketli sığınak yapısı balığın doğal sığınak takibi davranışını gözlemlemek için kullanılmaktadır. Balıkların tek eksen boyunca gerçekleştirdikleri sığınak takip davranışı sistem tanımlama yöntemlerinin uygulanması açısından önemli bir örnek model oluşturmaktadır (Şekil 1, Şekil 2).

Biyolojik sistemlere yönelik sistem tanımlama uygulamaları, kontrol teorisi literatüründe var olan yöntem ve analizleri de geliştirici bir etkiye sahiptir. Bu bağlamda zayıf elektrik balıkları üzerine sistem tanımlama çalışmaları literatürde önemli bir yer tutar. Bu çalışmada veri güdümlü sistem tanımlama tekniklerinden literatürde yaygın olarak kullanılan 8 yöntemi, zayıf elektrik balıklarının sığınak takibi davranışının hareket dinamiklerine uygulayarak bir karşılaştırma sunacağız.

Sistem tanımlama araçlarını kullandıkları yöntemlere göre genel olarak iki başlığa ayırabiliriz: bunlardan ilki dinamik bir modelin gözlemlere

dayalı olarak tahmin hatasını azaltmaya odaklanan Tahmin Hatası Yöntemi (Prediction Error Method) ile giriş-çıkış verilerinden hareketle durum uzay modellerini (state space models) tahmin etmeye odaklanan Alt Uzay Tanılama (Sub-space Identification) yöntemidir. Tahmin hatası yöntemini de yine kendi altında parametrik ve parametrik olmayan olarak iki ayrı başlığa ayırabiliriz.

Bu çalışmada parametrik olmayan tanımlama yöntemlerinden Frekans Tepki Fonksiyonu (Frequency Response Function), Yinelemeli En Küçük Kareler Metodu (Recursive Least Squares Method), Spektral Analiz Yöntemi (Spectral Analysis Method) ve Wiener-Hopf Metodunu ele aldık. Parametrik yöntemlerden ise ARX, ARMAX ve Doğrusal Olmayan Hammerstein-Wiener (Nonlinear Hammerstein-Wiener) yöntemlerini karşılaştırma için kullandık. Alt uzay tanımlama yöntemi olarak ise literatürde de yaygın olarak kullanılan n4sid yöntemini tercih ettik.

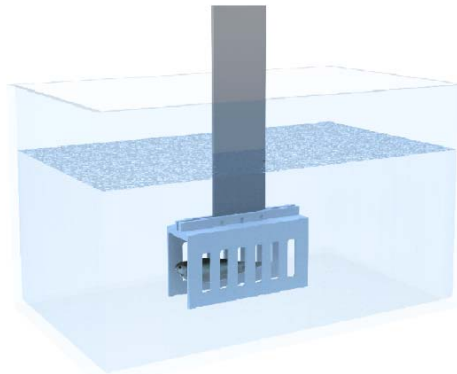


Şekil 1. Balığın sığınak takibi davranışı (Refuge-following behaviour of fish)

2. Materyal ve Metot (material and method)

2.1. Deneysel Düzenek (Experimental Setup)

Deneysel düzenek balıkların Amazon nehir yataklarındaki doğal ortamlarını taklit edebilecek bir akarsu tüneli şeklinde tasarlanmıştır. Bu amaçla bir su altı itici sayesinde akıntı oluşturularak balığın yer aldığı test alanına iletilmektedir. Deneysel prosedürü gereği bu bölümde su, her noktada sabit bir akış hızıyla akışını gerçekleştirmelidir. Bu nedenle akışın sabit ve pürüzsüz olması açısından deney alanının her iki tarafında özel olarak tasarlanmış bal peteği (honeycomb) filtre



Şekil 2. Deneysel düzenek ve test alanı (Experimental setup and test area)

bulunmaktadır. Test alanında ise balığın içine saklanabileceği üç boyutlu baskıyla üretilmiş bir sığınak yer almaktadır. Bu sığınak renksiz bir akrilik çerçeve aracılığıyla doğrusal bir eyleyiciye bağlanmıştır. Böylece sığınak istenen yörüngelerde hassas bir şekilde konum kontrolü sağlanabilmektedir. Bu doğrusal eyleyici vasıtasıyla sığınak ileri-geri hareket ettirilmektedir.

Balığın ve sığınak hareketlerini takip edebilmek amacıyla deney sisteminde kızılötesi görüntü alabilen, dıştan tetikleyici bir sinyal ile görüntü karesi yakalayabilen, gerçek zamanlı çalışmaya uygun, yüksek frekanslı ve yüksek çözünürlüklü monokrom bir kamera kullanılmıştır. Kamera yardımıyla kaydedilen bu görüntülerde hem balığın konumu hem de sığınak hareketleri bir ana kontrol bilgisayarı ile işlenmektedir. Görüntülerin işlendiği yazılımda ise taslak eşleştirme tabanlı bir görüntü işleme algoritması kullanılmıştır.

2.2. Veri Kümesi (Dataset)

Bu çalışmada Hacettepe Üniversitesi Nörobilim ve Robotik laboratuvarında alınmış deneylerdeki su sıcaklıkları ve pH değerleri sırasıyla $26 \pm 1^\circ\text{C}$ ve 7,2 olarak muhafaza edilmiştir. Zayıf elektrik balıklarının bakımı ve deney prosedürleri hayvan stresini en aza indirecek şekilde, etik kurallara uygun olarak yürütülmüştür. Deneyler başlamadan önce balıklar ortama alışması için 1 gün önceden deney düzeneğine alınmıştır. Deneyler aydınlık ortamda gerçekleştirilmiştir.

Deneyler Hacettepe Üniversitesi Hayvan Deneyleri Etik Kurulu izni ile gerçekleştirilmiştir. Deney düzeneğindeki su sıcaklıkları ve pH değerleri sırasıyla $26 \pm 1^\circ\text{C}$ ve 7,2 olarak muhafaza edilmiştir. Zayıf elektrik balıklarının bakımı ve deney prosedürleri hayvan stresini en aza indirecek şekilde, etik kurallara uygun olarak yürütülmüştür. Deneyler başlamadan önce balıklar ortama alışması için 1 gün önceden deney düzeneğine alınmıştır. Deneyler aydınlık ortamda gerçekleştirilmiştir.

Deneyler sırasında sığınak hareketleri 13 farklı frekansdaki [0,1 Hz, 0,15 Hz, 0,25 Hz, 0,35 Hz, 0,55 Hz, 0,65 Hz, 0,85 Hz, 0,95 Hz, 1,15 Hz, 1,45 Hz, 1,55 Hz, 1,85 Hz, 2,05 Hz] sinüs sinyalinin toplanmasıyla oluşturulan sinüsler toplamından meydana gelmektedir. Seçilen frekanslar 0,05 Hz'nin asal katlarından oluşmaktadır. Ayrıca seçilen frekanslar zayıf elektrik balığının sığınak takibi davranışını doğrusal bir biçimde gerçekleştirebileceği bir aralıkta seçilmiştir [6]. Diğer taraftan balığın hareketleri ezberlemesinin önüne geçmek amacıyla kompleks bir sinyal oluşturulmuştur.

2.3. Sistem Tanılama Yöntemleri (System Identification Methods)

2.3.1. Frekans tepki fonksiyonu (Frequency response function)

Frekans tepki fonksiyonu (Frequency Response Function - FRF) yöntemi, doğrusal ve zamandan bağımsız (LTI) sistemlerde, yani uyaran olarak verilen her bir frekans için sabit bir kazanç ile tepki verdiği ve zamandan bağımsız olduğu durumlarda kullanılan bir metottür.

Farz edelim ki sisteme girdi olarak verdiğimiz fonksiyon A genliği ve ω_0 frekansındaki

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (1)$$

Fonksiyonu Eş. 1 olsun. LTI sistemler için çıktı fonksiyonu bu durumda

$$y(t) = h(t) * A \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

Eş. 2 formunda olur. Burada $h(t)$ bulmak istediğimiz kompleks frekans tepki fonksiyonunu ifade etmektedir. Her iki fonksiyona da Fourier dönüşümü uyguladığımızda,

$$X(\omega) = -j A \pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)(-j A \pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]) = H(\omega) X(\omega) \quad (4)$$

Eş. 3 ve Eş. 4 fonksiyonlarını elde ederiz. Bu durumda $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ işlemi yapılarak bulunabilir. $H(\omega)$ fonksiyonuna ters Fourier dönüşümü uyguladığımızda ise frekans tepki fonksiyonu $h(t)$ 'yi elde edebiliriz [7].

2.3.2. Spektral analiz metodu (Spectral analysis method)

Spektral analiz metodu, sisteme verilen girdinin Oto Spektral Yoğunluk (auto-spectral density, ASD) ve girdi ile çıktı arasındaki Çapraz Spektral Yoğunluk (cross-spectral density, CSD) fonksiyonlarını kullanarak sistem tanılması yapmayı amaçlar.

CSD fonksiyonu $P_{xy}(\omega)$, iki farklı sinyalin ardışık eşit uzaklıktaki zamanlarda aldığı değerlerin birbiri ile benzerliğini frekans alanında ölçümleyen bir fonksiyondur. Çapraz Korelasyon (Cross Correlation) fonksiyonu $R_{xy}[k]$ 'ye Fourier dönüşümü uygulanarak hesaplanır. Eş. 5 ve Eş. 6 ile iki fonksiyonun da nasıl hesaplandığı verilmiştir. Eş. 5'te k, örneklemin yapıldığı zamanlar arasındaki sabit uzaklığın değeridir.

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] \cdot y[n-k]) \quad (5)$$

$$P_{xy}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_{xy}[k] e^{-j\omega k}) \quad (6)$$

ASD fonksiyonu $P_x(\omega)$, bir sinyalin ardışık eşit uzaklıktaki zamanlarda aldığı değerlerin kendi içinde birbiri ile benzerliğini frekans alanında ölçümleyen bir fonksiyondur. Oto korelasyon (Auto correlation) fonksiyonu $R_x[k]$ 'ye Fourier dönüşümü uygulanarak hesaplanır. Eş. 7 ve Eş. 8 ile iki fonksiyonun da nasıl hesaplandığı verilmiştir. Eş. 7'de k, örneklemin yapıldığı zamanlar arasındaki sabit uzaklığın değeridir.

$$R_x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] \cdot x[n-k]) \quad (7)$$

$$P_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_x[k] e^{-j\omega k}) \quad (8)$$

Bir sistemin girdi ve çıktısının CSD fonksiyonu ile sistemin girdisinin ASD fonksiyonu arasındaki ilişki Eş. 9'da verilen eşitlikteki gibidir.

$$P_{xy}(\omega) = H(\omega) P_x(\omega) \quad (9)$$

Bu eşitlik kullanılarak $H(\omega)$ fonksiyonu elde edilebilir ve ters Fourier dönüşümü uygulanarak sistemin transfer fonksiyonu elde edilir [1,7].

2.3.3. Yinelemeli en küçük kareler metodu (Recursive least squares method)

Yinelemeli En Küçük Kareler (Recursive Least Squares - RLS) metodu, doğrusal açıklayıcı değişken (linear regressor) temelli bir kestirim metodudur. Özellikle sürekli olarak yeni ölçümlerin alındığı bir senaryoda, geçmişteki tüm ölçümleri işlemeye gerek duymadan sistem parametrelerini güncelleyebilmesi ile öne çıkmaktadır. Bu parametreleri güncellerken, hatanın karesi açısından en uygun modeli elde etmeye çalışır. Metoden hesaplama karmaşıklığı parametre vektörünün boyutuna bağlı olduğu için gerçek zamanlı sistemlerde kullanılmaktadır.

Algoritma, N boyutlu parametre vektörü θ , NxN boyutlu kovaryans matrisi P ve [0,1] aralığında değer alan unutm faktörü λ ile başlatılır. Bundan sonra her iterasyonda sırası ile tahmin ve güncelleme olmak üzere iki adımı izler [1].

i. *Tahmin*

- i. En son alınan N adet ölçüm x , θ ile çarpılarak bir sonraki adım için sonuç kestiriminde bulunulur. $y_{tahmin} = x^T \theta$

ii. *Güncelleme*

- i. Ölçüm alındıktan sonra, ölçüm ile tahmin arasındaki fark $e = y - y_{tahmin}$ hesaplanır.
- ii. Kovaryans matrisi güncellenir. $P = \frac{1}{\lambda}(P - Kx x^T P)$
- iii. Kazanç vektörü hesaplanır. $K = \frac{Px}{\lambda + x^T P x}$
- iv. Parametre vektörü güncellenir. $\theta = \theta + Ke$

2.3.4. *Wiener-Hopf Metodu (Wiener-Hopf Method)*

Wiener-Hopf metodu, parametrik olmayan sistem tanılama yöntemlerinden biridir. Yarı-sonsuz alanlar üzerinde sınır koşullarına tabi belirli doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin açık bir şekilde çözülmesine olanak sağlar [8].

WSS (Wide-sense stationary) olduğu varsayılan bir zaman dizisi girdisi $u(t)$ düşünelim. WSS süreçlerde, ortalama (mean) zaman içinde değişmez. Ayrıca otokorelasyon bulunur ve zamana bağlı değildir. O halde otokorelasyon denklemi Eş. 10'daki gibi yazılabilir:

$$R_u(\tau) = E[u(t)u(t + \tau)] \quad (10)$$

Ayrıca ergodikliği, yani topluluk ortalamasının zaman ortalamasına eşit olduğunu varsayıyoruz. Bu nedenle, oto korelasyon Eş. 11'deki gibi yazılabilir:

$$R_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N u(t)u(t + \tau) \quad (11)$$

Tanımlanacak LTI sisteminin kararlı olduğunu varsayıp darbe yanıtı katsayıları (impulse response coefficients) kesersek, son olarak Eş. 12'deki denklemi elde ederiz:

$$R_{uy}(\tau) = \sum_{k=0}^N R_u(\tau - k)g(k) \quad (12)$$

Wiener-Hopf yöntemi ile sistem tanılama yaparken bu denklemi kullanarak kestirimler yapılacaktır.

2.3.5. *Doğrusal olmayan Hammerstein–Wiener metodu (Nonlinear Hammerstein–Wiener method)*

Hammerstein Modeli doğrusal olmayan bir statik blok ile ardından gelen doğrusal dinamik bir bloktan oluşur. Giriş sinyali önce doğrusal olmayan bir statik bloğa (örneğin, polinom, sigmoid fonksiyon) uygulanır ve ardından bu çıktı bir doğrusal dinamik bloğa (örneğin, bir FIR veya IIR filtre) girer.

Wiener Modeli ise önce doğrusal dinamik bir blok ve ardından doğrusal olmayan bir statik blok içerir. Giriş sinyali önce doğrusal bir dinamik bloktan geçer, ardından elde edilen çıktı doğrusal olmayan bir statik bloğa uygulanır.

Hammerstein–Wiener Modeli, bu iki yapının birleşiminden oluşur. Tipik olarak, giriş sinyali önce bir doğrusal olmayan statik bloktan (Hammerstein kısmı) geçer, ardından bu çıktı doğrusal bir dinamik bloğa uygulanır ve son olarak elde edilen çıktı bir doğrusal olmayan statik bloğa (Wiener kısmı) girer.

Hammerstein–Wiener Modeli, bir kara kutu modelidir çünkü modelin iç yapısı ve parametreleri, dışarıdan gözlemlenebilir değildir ve doğrudan fiziksel veya yapısal bir anlam taşıyabilir. Kara kutu

modellerin parametreleri, sistemin giriş-çıkış verileri kullanılarak belirlenir ve sistemin iç mekanizmaları hakkında bilgi vermez. Yani, bu modeller, sistemin iç dinamiklerini modellemek yerine sadece giriş-çıkış ilişkisini tahmin eder [1].

2.3.6. *ARX ve ARMAX modeli (ARX and ARMAX model)*

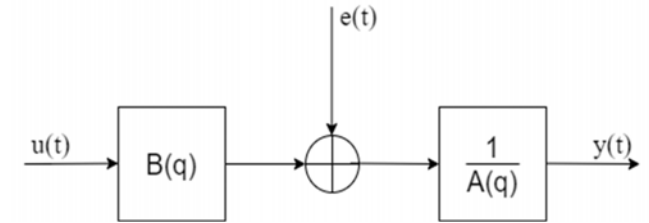
Sistem tanılama alanında yalnızca girişten çıkışa dinamikler değil, aynı zamanda gürültünün dinamiklerini belirlemek de genellikle önemlidir. Sistem tanılamada, hem giriş-çıkış dinamiklerini hem de gürültü dinamiklerini tanımlamak için çeşitli teknikler mevcuttur.

Girdi-çıkış dinamikleri ile gürültü dinamikleri arasındaki temel fark, girdi-çıkış dinamiklerinde giriş erişilebilir ve hatta manipüle edilebilirken, gürültü dinamikleri için bu mümkün değildir. Fakat erişilebilir olmasa da gürültü istatistiksel özelliklere ve bazı yapılara sahiptir. Bu yapılardan hareketle, giriş ve çıkışın nasıl bağlandığına ve gürültünün sisteme nasıl geldiğine bağlı olarak, çeşitli model yapıları kullanılmıştır.

ARX modeli, bu tarz bir siyah-kutu (black-box) modelinden biridir. ARX modelini anlamak için en basit girdi-çıkış ilişkisi, doğrusal bir fark denklemi olarak Eş. 13'teki gibi yazılabilir:

$$Y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (13)$$

Burada AR kısmı otoregresif kısım $[A(q)y(t)]$ ve X ise ekstra girdi $[B(q)u(t)]$ anlamına gelir [1]. Aşağıda ARX modelin grafiği bulunuyor (Şekil 3). Görüldüğü gibi beyaz gürültü $e(t)$ doğrudan sistemin ileri (forward) yönünde sisteme dahil olur.

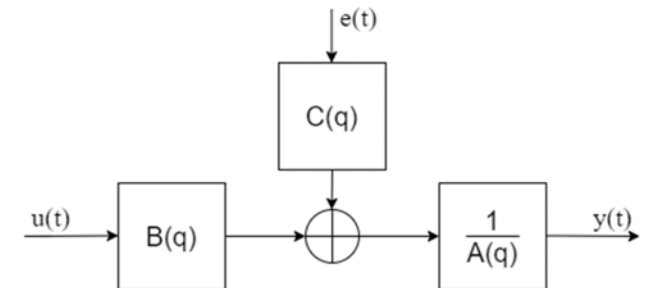


Şekil 3. ARX modeli (ARX model)

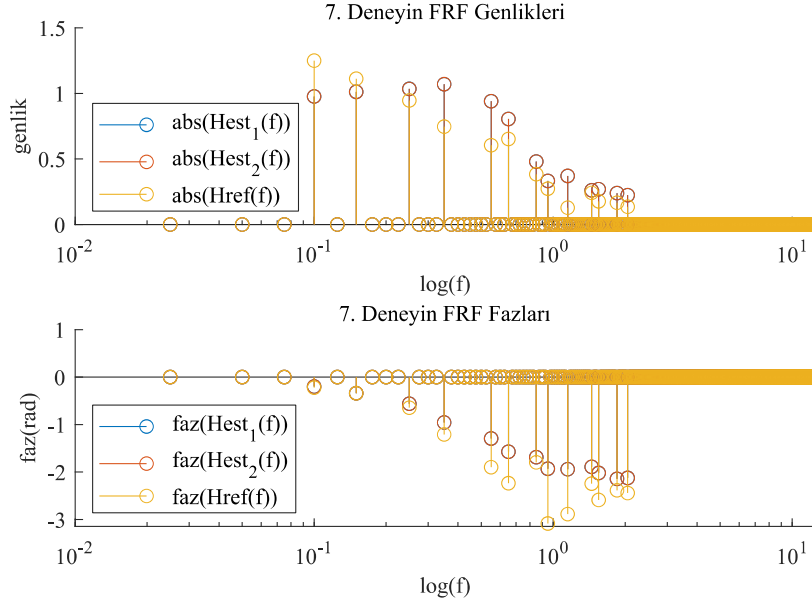
ARX modelin temel dezavantajı, hata teriminin özelliklerini tanımlamada yeterli serbestliğin olmamasıdır. ARMAX modelde ise hata dinamiğini de dikkate almak için bir $C(q)$ terimi eklenir [1]. O halde Şekil 3'teki denklem Eş. 14'teki hale gelir:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (14)$$

Bu ise sadece giriş-çıkış dinamiklerini değil aynı zamanda gürültü dinamiklerini de tahmin etmemizi sağlar. Aşağıda ARMAX modelin grafiği bulunuyor (Şekil 4).



Şekil 4. ARMAX modeli (ARMAX model)



Şekil 5. 7'inci Deney için Tahmin Edilen ve Gerçek Frekans Tepki Fonksiyonu
(Predicted and Actual Frequency Response Function for Experiment 7)

2.3.7. Alt uzay tanımlama ve n4sid algoritması (Subspace identification and n4sid algorithm)

Alt uzay tanımlama (SID) yöntemi, giriş-çıkış verilerinden doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) durum uzayı modellerini tanılamayı amaçlar. Alt uzay tanımlama, daha önceki örneklerde olduğu gibi parametrik bir optimizasyon problemini çözmeden önce sistem matrislerini parametrelendirilmesini gerektirmez. Bu bağlamda giriş çıkış verilerinden yararlanarak alt uzay tanımlama için Eş. 15 ve Eş. 16'daki formda tek giriş tek çıkışlı bir sistem yaklaşımı kullanılmıştır.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \quad (15)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \quad (16)$$

Bu çalışmada literatürde de sıklıkla kullanılan N4SID (Numerical Algorithms for State Space Subspace System Identification) algoritması kullanılmıştır. Bu algoritmanın çalışma prensipleriyle ilgili detaylar Overschee vd. [9]'te bulunmaktadır.

3. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and Discussion)

3.1. Sistem Tanılama Yöntemlerinin Sonuçları (Results of System Identification Methods)

3.1.1. Frekans tepki fonksiyonu (Frequency response function)

Bu yöntemi uygularken, sistemin doğrusal olduğu kabulünden yola çıkarak, gürültüyü azaltmak amacı ile FRF'in sisteme uyarın verilmeyen frekanslardaki kazanç değerleri 0 olarak kabul edildi (Şekil 5).

Ayrıca, yöntemi deney verilerine uygularken iki farklı metot izlendi.

- İlk metotta, eğitim verilerinin ortalaması kullanılarak FRF elde edildi.
- İkinci metotta, her eğitim verisi için FRF elde edilip bu fonksiyonların ortalamasını alındı.

Tablo 1'de bu iki metodun 7 katlamalı çarpaz doğrulama sonucunda referans ve eğitim veri setlerindeki performansı görülmektedir. İki metod arasındaki fark %5'in altında olmakla birlikte, ilk metod ortalamada daha iyi performans göstermektedir. Bu nedenle ilk metodun kullanılması tercih edildi.

Tablo 1. Uygulanan 2 FRF yönteminin sonuçları
(Results of the 2 applied FRF methods)

	Referans Veri Seti Performansı	Eğitim Veri Seti Performansı
Yöntem	23,27 ± 14,06	6,85 ± 0,81
Yöntem	24,13 ± 14,19	7,34 ± 2,72

3.1.2. Spektral analiz metodu (Spectral analysis method)

Bu yöntemi uygularken, Frekans Tepki Fonksiyonu yöntemine benzer şekilde, iki farklı metot izlendi.

- İlk metotta, eğitim verilerinin ortalaması kullanılarak transfer fonksiyonu elde edildi (Şekil 6).
- İkinci metotta, her eğitim verisi için transfer fonksiyonu elde edilip bu fonksiyonların ortalaması alındı.

İki metodun 7 katlamalı çarpaz doğrulama sonucu arasındaki fark %0,1'in altında olduğu için, Frekans Tepki Fonksiyonu yöntemine uyumlu sonuç almak adına 1. Metodun kullanılması tercih edildi.

3.1.3. Yinelemeli en küçük kareler metodu (Recursive least squares method)

Bu yöntemi uygularken, balıklara aynı deneyin uygulanıyor olması durumunu göz önünde bulundurarak, filtrenin eğitimi için kullanılacak veri seti, eğitim verilerinin art arda eklenmesiyle oluşturuldu. Bu ekleme sırasında bir örüntünün ezberlenmesinin önüne geçmek adına n'inci verinin test için kullanıldığı deney için n+1'den n-1'e doğru çembersel şekilde ekleme gerçekleştirildi. Örneğin, 3. verinin test için kullanıldığı durumda, eğitim veri seti [Veri4 Veri5 Veri6 Veri7 Veri1 Veri2] şeklinde oluşturuldu. Yine aynı durumu göz önünde bulundurularak, unutm faktörü 1 yani unutm olmayacak şekilde belirlendi.

Eğitim veri seti ile en son elde edilen parametre vektörü ve kovaryans matrisi, test verisine uygulanacak filtrenin başlangıçtaki parametre vektörü ve kovaryans matrisi olarak kullanıldı (Şekil 7).

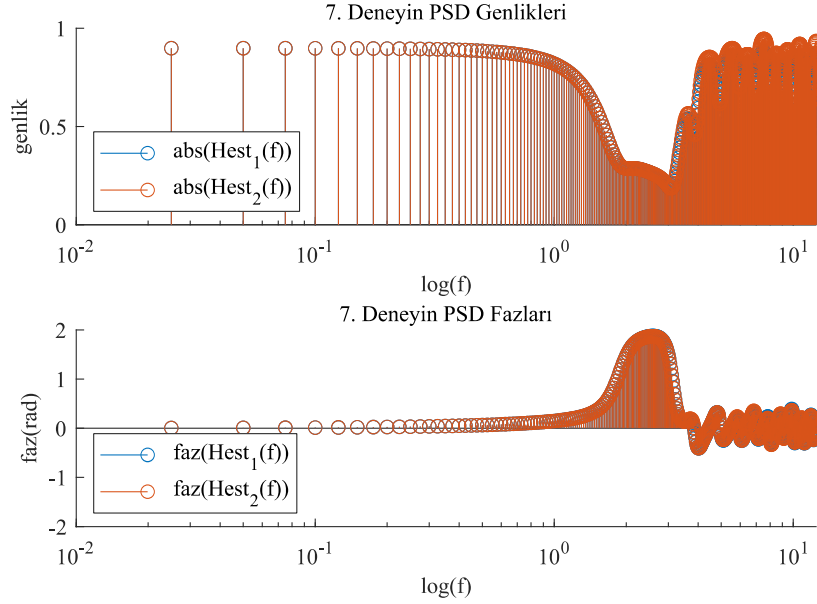
3.1.4. Wiener-Hopf metodu (Wiener-hopf method)

Genellikle Wiener-Hopf yöntemi ile sistem tanılama gerçekleştirirken iki metriğin belirlenmesi oldukça önemlidir; FIR uzunluğu ve unutm faktörü. Eğer sistem hakkında önsel bir bilgi yok ise FIR uzunluğunu belirlemenin tek yolu makul bir sayıdan başlayarak uzunluğu sürekli artırarak sonuçları karşılaştırmaktır. Bu yöntem ile yapılan

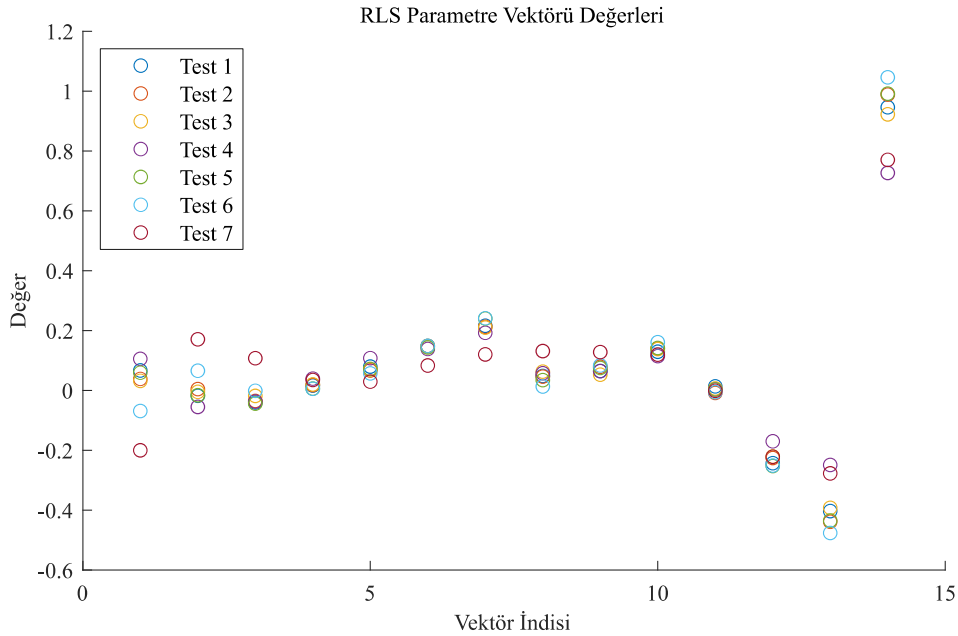
denemelerde en uygun sonuç FIR uzunluğunun 13 olduğu durumda elde edildi. Unutm faktörü ise veri alınan sistemlerin ve verilerin dinamikleri ile bağlantılıdır. Yapılan deneylerde tüm deneyler aynı içerikte olduğu için unutm faktörü 1 olarak ayarlandı.

3.1.5. Doğrusal olmayan Hammerstein–Wiener metodu (Nonlinear Hammerstein–Wiener method)

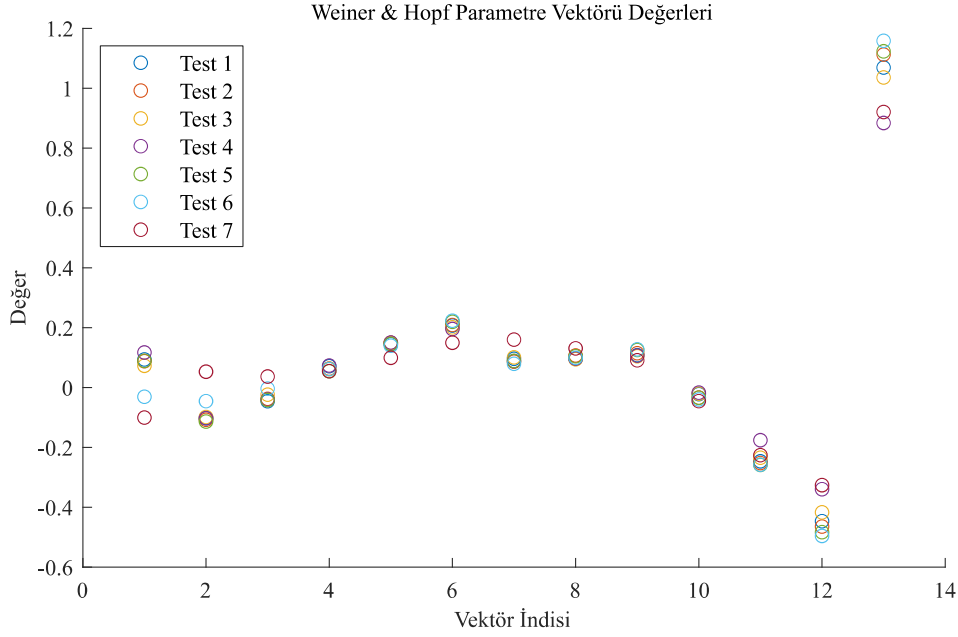
Doğrusal Olmayan Hammerstein–Wiener Metodu ile sistem tanılama için MATLAB’ın hazır fonksiyonu *nlhw* kullanılmıştır.



Şekil 6. 7’inci Deney için Spektral Analiz Yöntemi ile Tahmin Edilen Transfer Fonksiyonu (Transfer Function Estimated by Spectral Analysis Method for Experiment 7)



Şekil 7. Katlamalı Çapraz Doğrulama Sonucunda RLS Yöntemi ile Elde Edilen Parametre Vektörleri (Parameter Vectors Obtained by RLS Method as a Result of Fold Cross Validation)



Şekil 8. Katlamalı Çapraz Doğrulama Sonucunda Wiener & Hopf Yöntemi ile Elde Edilen Parametre Vektörleri
(Parameter Vectors Obtained by Wiener & Hopf Method as a Result of Fold Cross Validation)

En başarılı performansı elde etmek için önce ortadaki doğrusal filtre için başarılı sonucu veren filtre modeli bulunmuş, daha sonra ise sırasıyla çıkış ve giriş bloklarının modelleri, farklı tip fonksiyon ve parametre sayıları test edilerek seçilmiştir (Şekil 8).

Yapılan çalışmalarda, veri setinin genelinde en iyi performans veren blok modelleri aşağıdaki gibidir:

- Doğrusal Olmayan Giriş Bloğu: 14 Kırılma Noktalı Parçalı Doğrusal Fonksiyon
- Doğrusal Blok: 4. Derece transfer Fonksiyonu
- Doğrusal Olmayan Çıkış Bloğu: 2. Derece Polinom

3.1.6. ARX ve ARMAX modeli (ARX and ARMAX model)

ARX ve ARMAX model ile sistem tanılama yapılırken dikkat edilmesi gereken noktalardan biri, sistemin dinamiklerini göz önünde bulundurarak, polinomların derecelerini ve gecikme katsayısını doğru belirlemektir. MATLAB'ın hazır fonksiyonu *arx* ve *armax* bu değerleri sırasıyla 1'e 3 ve 1'e 4 bir vektör olarak alır.

Bu vektörlerde;

- n_a – kutup (pole) sayısı
- n_b – sıfır (zero) sayısı artı 1
- n_c – C katsayılarının sayısı
- n_k – Girişin çıkışı etkilemesinden önce gerçekleşen giriş örneklerinin sayısı, sistemdeki ölü zaman olarak da adlandırılır.[10]

Yapılan deneylerde, daha önce literatürdeki zayıf elektrik balıkları üzerine olan çalışmaların bulgularını [11] da göz önünde bulundurarak, *arx* ve *armax* model için bu değerler sırasıyla [4 4 1] ve [4 4 1 0] olarak belirlendi.

ARX model için A, B ve C matrisleri sırasıyla Eş. 17, Eş. 18 ve Eş. 19'daki gibi elde edildi. ARMAX model için ise A, B ve C matrisleri sırasıyla Eş. 20, Eş. 21 ve Eş. 22'deki gibi elde edildi. Hesaplamalar MATLAB'ın hazır fonksiyonu *arx* ve *armax* aracılığıyla yapıldı [10]:

ARX Model:

$$A = [1, -1.667, 0.338, 0.450, -0.117] \quad (17)$$

$$B = [0, 0.016, 0.056, -0.036, -0.032] \quad (18)$$

$$C = 1 \quad (19)$$

ARMAX Model:

$$A = [1, -2.309, 1.361, 0.259, -0.309] \quad (20)$$

$$B = [0.022, 0.006, -0.032, 0.004] \quad (21)$$

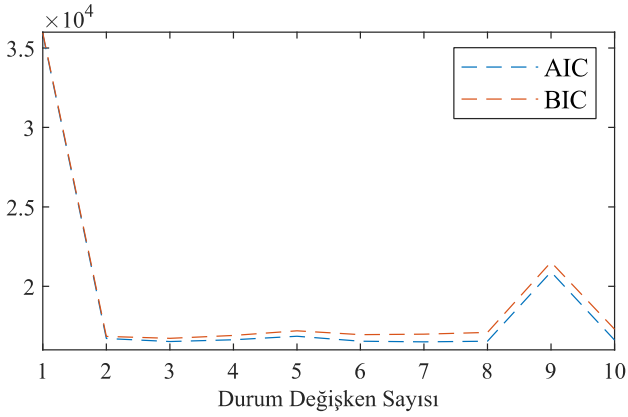
$$C = [1, -0.665] \quad (22)$$

3.1.7. Alt uzay tanılama ve *n4sid* algoritması (Subspace identification and *n4sid* algorithm)

N4SID yöntemi ile sistem tanılama için MATLAB'ın hazır fonksiyonu *n4sid* kullanılmıştır. Elde edilecek durum uzay gösteriminin boyutlarının belirlenebilmesi amacıyla ise literatürde de daha önce [11]'de bahsedildiği gibi hem Akaike hem de Bayesian bilgi kriterleri (AIC ve BIC) verileri incelenmiştir.

Şekil 9'da durum değişken sayıları 1 ile 10 arasında değişirken buna karşılık geçen AIC ve BIC değerleri görülmektedir. Bu grafikte AIC ve BIC değerlerinin minimum olduğu durum değişken sayısı seçilebilecek maksimum durum değişken sayısını belirtmektedir. Bu grafikte AIC ve BIC değerlerinin minimum olduğu değere karşılık gelen değişken sayısı (her ikisi için üç) bize sistemin seçilebilecek maksimum değişken sayısını belirtmektedir. Şekil 9'da 2 durum değişkeninde ani bir değişim gerçekleştiği için alt uzay tanılama işleminde değişken sayısı 3 olarak belirlenmiştir.

Balığın hareket dinamiklerine göre çıkarılan durum uzay matrisleri ise Eş. 23, Eş. 24 ve Eş. 25'teki gibidir. Hesaplamalar MATLAB'ın hazır fonksiyonu *n4sid* aracılığıyla yapıldı [10]:



Şekil 9. AIC ve BIC değerlerinin durum değişken sayısına göre değişimi
(Variation of AIC and BIC values according to the number of state variables)

$$A = \begin{bmatrix} 0.972 & -0.085 & -0.003 \\ 0.037 & 0.938 & -0.182 \\ 0.035 & 0.073 & 0.936 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = [0.00007 \quad -0.00015 \quad -0.00012] \quad (24)$$

$$C = [914.461 \quad -37.557 \quad 4.624] \quad (25)$$

3.2. Sistem Tanılama Yöntemlerinin Karşılaştırılması
(Comparison of System Identification Methods)

Sistem tanılama yöntemlerinin tahmin performansı 7 katlamalı çapraz doğrulama ile ölçülmüştür. Bunun için 7 veriden bir tanesi seçilip ayrılmış ve yöntemler geriye kalan 6 veri seti ile eğitilmiştir. Eğitilen yöntemin performansı, ayrılan veri ile normalleştirilmiş hatanın karesel ortalamasının karekökü metodu (Normalised Root Mean Square Error) kullanılarak test edilmiştir. Daha sonra aynı işlem seçilmemiş 6 veri ile aynı şekilde tekrarlanmıştır.

Bu yöntem ile elde edilen hata oranları tablo 2’de verilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar Şekil 10’da da gösterilmiştir.

Tablo 2. Uygulanan Yöntemlerin 7 Katlamalı Çapraz Doğrulama Sonucunda Referans ve Eğitim Veri Setleri Üzerindeki Performansları

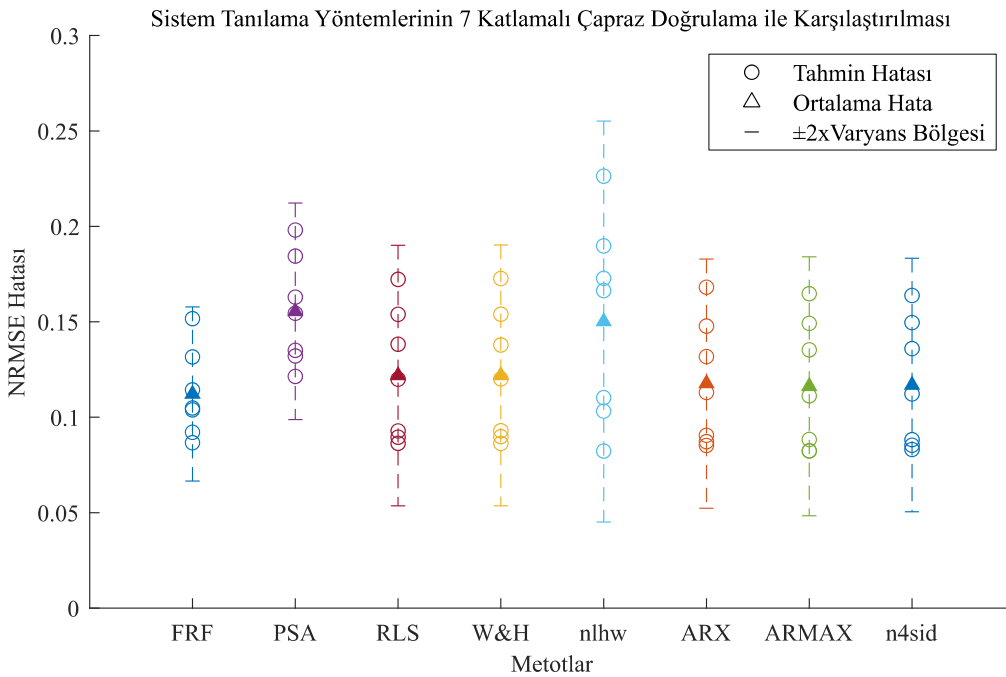
(Performance of the Applied Methods on Reference and Training Datasets after 7-Fold Cross Validation)

Yöntem	Referans Veri Seti Performansı	Eğitim Veri Seti Performansı
FRF	0,1122 ± 0,0456	0,0338 ± 0,0089
PSA	0,1555 ± 0,0566	0,1199 ± 0,0305
RLS	0,1219 ± 0,0682	0,1256 ± 0,0338
W&H	0,1220 ± 0,0682	0,1258 ± 0,0389
NLHW	0,1502 ± 0,1050	0,1518 ± 0,0851
ARX	0,1177 ± 0,0653	0,1190 ± 0,0357
ARMAX	0,1162 ± 0,0679	0,1175 ± 0,0340
N4SID	0,1169 ± 0,0664	0,1180 ± 0,0342

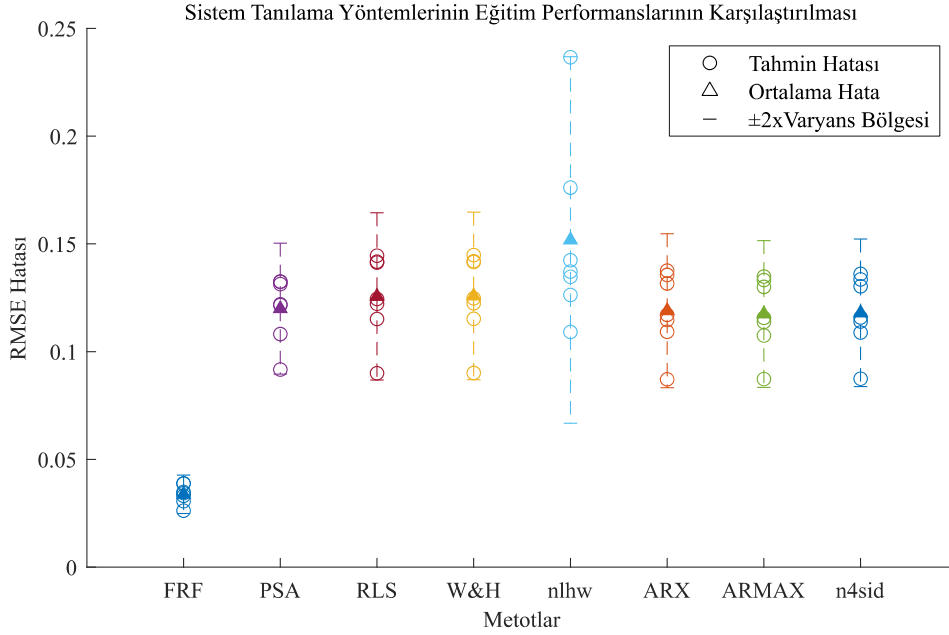
Şekil 11’de sistem tanılama yöntemlerinin eğitim performansı karşılaştırılmıştır. Bunun için tüm yöntemler, 7 veri setinin tamamı ile eğitilmiş ve her bir veri seti içi tahmin performansı normalleştirilmiş hatanın karesel ortalamasının karekökü methodu ile ölçülmüştür.

Sistemin sadece frekans alanındaki davranışının yeterli olduğu durumlarda Frekans Tepki Fonksiyonu basit ve etkili bir yöntem olarak tercih sebebi olabilir. Yaptığımız deneylerde düşük hata ortalaması ve düşük varyans ile FRF iyi sonuçlar vermiştir. Elbette FRF, sadece giriş sinyalinin frekans aralığını bildiğimiz doğrusal sistemlerde kullanılmaya uygundur. Bu nedenle etkili olmakla birlikte kullanım alanı oldukça sınırlıdır.

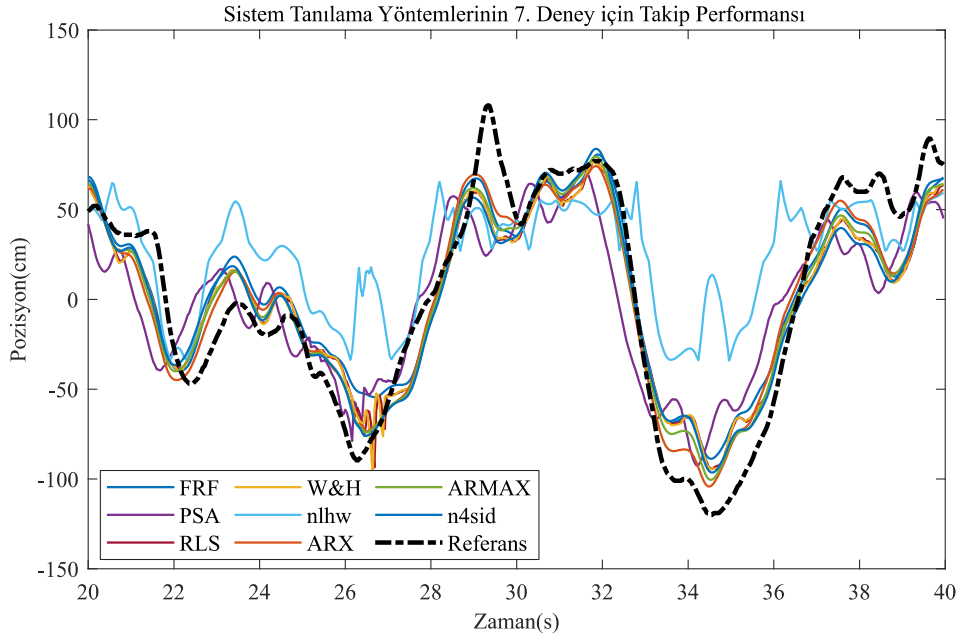
Karmaşık frekans yanıtlarına veya doğrusal olmayan davranışa sahip sistemleri karakterize etmek oldukça zor bir problemdir [12]. Literatürde genellikle bu tür sistemler için Spektral Analiz Yöntemi



Şekil 10. Uygulanan Yöntemlerin 7 Katlamalı Çapraz Doğrulama Sonucunda Referans Veri Seti Üzerindeki Performansları
(Performance of the Applied Methods on the Reference Data Set after 7-Fold Cross Validation)



Şekil 11. Uygulanan Yöntemlerin 7 Katlamalı Çapraz Doğrulama Sonucunda Eğitim Veri Seti Üzerindeki Performansları (Performance of the Applied Methods on the Training Data Set after 7-Fold Cross Validation)



Şekil 12. Sistem Tanılama Yöntemlerinin 7. Deney için Takip Performansı (Tracking Performance of System Identification Methods for Experiment 7)

kullanılır. Fakat FRF’de olduğu gibi, frekans bilgisini tanımlamakla sınırlıdır, tam bir zaman alanı modeli sağlayamaz. Yaptığımız deneylerde diğer alternatiflerine oranla daha hassas sonuçlar vermekle birlikte tekil bazı deneylerin yüksek hata oranı nedeniyle genel performansında düşüş elde edilmiştir.

Eğer sistem dinamiklerinin zaman içinde değişebileceği gerçek zamanlı uygulamalar için sistem tanımlama yapılacaksa Yinelemeli En Küçük Kareler Metodu uygun alternatiflerden biri olarak düşünülebilir. Yaptığımız deneyler hem çevrimdışı olduğu hem de

zamanla değişen bir dinamiğe sahip olmadığı için RLS fark yaratan bir sonuç ortaya koymamıştır.

Wiener-Hopf yöntemi, doğrusal zamanla değişmeyen bir bağlamda sistem parametrelerini tahmin etmek için korelasyon fonksiyonlarını kullanır. Fakat Wiener-Hopf yöntemi ile sistem tanımlama yapılırken korelasyon fonksiyonları hakkında bilgi sahibi olmamız gerekir. Ayrıca yalnızca doğrusal sistemlere uygulanabilir. Bundan dolayı elde ettiğimiz sonuçlarda Wiener-Hopf yöntemi önemli bir fark yaratmamıştır.

Hammerstein–Wiener Modeli kara-kutu modeli olması nedeniyle giriş çıkış verilerine bağımlıdır. Yapılan deneylerde, farklı veri sayısının sınırlı olması nedeniyle denenen modellerin performansının, eğitim ve testte kullanılan verilere çok bağımlı olduğu ve aşırı öğrenme sorunları yaşadığı görülmüştür. Bu nedenle genel performansı diğer metotlara göre daha düşük kalmıştır.

ARX model bir sistemi harici girdilere sahip bir otoregresif model olarak temsil eder. Bu nedenle de basit ve yorumlanabilir bir model yapısı sunar. Genellikle bilinen veya ölçülebilir giriş sinyallerine sahip doğrusal sistemler için uygundur. Fakat belirli bir model formu varsaydığı ve gürültü dinamiklerini gözardı ettiği için karmaşık dinamikleri yakalamada pek başarılı değildir. ARMAX model ise model yapısına hareketli bir ortalama bileşeni ekleyerek ARX modelini genişletir. Bu nedenle çeşitli sistem davranışlarını yakalamak için ARX'ten daha esnekler. Fakat ARMAX da doğrusal bir yapı varsayar ve güçlü doğrusal olmayan durumlarda etkili değildir. Elde ettiğimiz sonuçlarda, ARMAX model biraz daha başarılı olmakla birlikte yaklaşık olarak ARX ve ARMAX model yakın sonuçlar ortaya çıkarmıştır.

N4SID, bir sistemin durum uzayı temsilini tahmin etmek için tekil değer ayrışımı ve durum uzayı yöntemlerini kullanır. Bilinmeyen veya karmaşık dinamiklere sahip doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için uygundur. Bu nedenle de çok çeşitli sistem türleri için kullanılabilir. Ayrıca oldukça iyi gürültü elimine etme özelliklerine de sahiptir. Elde ettiğimiz sonuçlarda N4SID algoritması oldukça iyi sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Diğer taraftan hareket dinamiklerinin düşük boyutlu doğrusal sistemlerle ifade edilebiliyor olması da bir diğer avantajdır. Bu durum diğer modellere oranla sistemi daha kolay biçimde modellememize ve kontrol teorisi alanındaki pek çok yöntemin sistem üzerinde uygulanmasına olanak sağlar.

4. Sonuçlar (Conclusions)

Bu çalışmada literatürde yaygın olarak kullanılan sistem tanılama yöntemlerinin bir karşılaştırılması yapılmıştır. Karşılaştırmada veri olarak zayıf elektrik balıklarının sığınak takip davranışı sırasında uyguladıkları hareket dinamikleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar çeşitli farklara ve dezavantajlara rağmen tüm yöntemlerde kestirim başarısının iyi sonuçlar verdiğini ortaya koymaktadır (Şekil 12).

Diğer taraftan ulaşılan en önemli sonuçlardan biri alt uzay tanılama yöntemlerinin zayıf elektrik balıklarının hareket dinamiklerini açıklamada oldukça başarılı sonuçlar vermiş olmasıdır. Alternatiflerine oranla alt uzay tanılama yöntemleri, hem gürültüyü iyi elimine etme özelliği hem de karmaşık sistemleri dahi düşük boyutlu doğrusal sistemlerle ifade edebiliyor olması nedeniyle öne çıkmaktadır. Özellikle canlılar gibi karmaşık sistemler üzerine yapılacak çalışmalarda alt uzay tanılama yöntemlerinin kullanılması daha etkili sonuçların ortaya çıkmasına yardımcı olacaktır.

Teşekkür (Acknowledgement)

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 120E198 numaralı proje kapsamında desteklenmektedir. Veri toplama sürecindeki desteklerinden ötürü Emin Yusuf Aydın'a teşekkür ederiz.

Bu çalışma kapsamında yapılan deneyler Hacettepe Üniversitesi Hayvan Deneyleri Yerel Etik Kurulu onayıyla (karar no: 2023/05-07) gerçekleştirilmiştir.

Kaynaklar (References)

1. Ljung L., System identification: theory for the user. Prentice Hall PTR, New Jersey, A.B.D., 2012.
2. Erol B., Altuner İ.B., Delibaşı A., Identification of adaptive optics system model with extended data set, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 39 (3), 1825–1836, 2024.
3. Gültekin A.M., Kılçaslan S., Estimation of dynamic model of a missile fin with freeplay by using system identification methods, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 37 (4), 1899–1914, 2022.
4. Cowan N.J., Fortune E.S., The critical role of locomotion mechanics in decoding sensory systems. Journal of neuroscience, 27 (5), 1123-1128, 2007.
5. Uyanık İ., Stamper S.A., Cowan N.J., Fortune E.S., Sensory cues modulate smooth pursuit and active sensing movements, Frontiers in behavioral neuroscience, 13-59, 2019.
6. Roth E., Zhuang K., Stamper S.A., Fortune E.S., Cowan N.J., Stimulus predictability mediates a switch in locomotor smooth pursuit performance for *Eigenmannia virescens*. Journal of experimental biology, 214 (7), 1170-1180, 2011.
7. Tangirala A.K., Principles of system identification: theory and practice, CRC Press, New York, A.B.D., 2015.
8. Davis J.H., Wiener-Hopf Methods. In: Foundations of Deterministic and Stochastic Control. Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser, Boston, A.B.D., 2002.
9. Favoreel W., Huffel S.V., Moor B.D., Sima V., Verhaegen M., Comparative study between three subspace identification algorithms, European Control Conference (ECC), Karlsruhe-Germany, 821-826, 31 August-03 September, 1999.
10. MATLAB. Estimate parameters of ARMAX, ARIMAX, ARMA, or ARIMA model using time-domain data. <https://www.mathworks.com/help/ident/ref/armax.html>. Erişim tarihi Ekim 30, 2023.
11. Uyanık İ., Zayıf Elektrik Balıklarında Duyumotor Kontrolcü ve Hareket Dinamiklerinin Alt Uzay Tabanlı Sistem Tanılaması, Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi, 623-628, 2021.
12. Aksoy O., Zergeroğlu E., Optimal control of a class of nonlinear systems using Euler-Lagrange back integration method, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 38 (4), 2555–2564, 2023.

