BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi / BSEU Journal of Science, 2024, 11(2): 316-324

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
Bilecik Seyh Edebali University Journal of Science

11(2), 316-324, 2024

DOİ: 10.35193/bseufbd.1387390
e-ISSN: 2458-7575 (https://dergipark.org.tr/tr/pub/bseufbd)

Araştırma Makalesi - Research Article

(1+1)-Boyutlu Benjamin-Bona-Mahony (BBM) Denkleminin Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ile Soliton Çözümleri

The Soliton Solutions of the (1+1)-Dimensional Benjamin-Bona-Mahony (BBM) Equation Via the Modified New Kudryashov Method

Sait San[1*], Zeynep Aydın[2]

Geliş / Received: 07/11/2023 ***Revize / Revised: 08/03/2024*** ***Kabul / Accepted: 12/03/2024***

ÖZ

Bu çalışma, (1+1)-boyutlu Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin analitik soliton çözümlerinin modifiye edilmiş modifiye Kudryashov metodu ile elde edilmesine yöneliktir. Birinci aşamada, doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem formuna sahip olan model, uygun dalga dönüşümü ile doğrusal olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenmektedir. İkinci aşamada ise, homojen denge prensibi ve Riccati yardımcı diferansiyel denklemi kullanılarak doğrusal cebirsel denklem sistemi elde edilerek bu sistemin çözümünden incelenen modelin bilinmeyen parametreleri belirlenmektedir. Elde edilen farklı çözüm setlerine bağlı olarak analitik soliton çözümleri elde edilerek ana denklemi sağlama kontrolü yapılmaktadır. Son aşamada ise çözümlerin fiziksel olarak yorumlanmasını kolaylaştırmak amacıyla kontur ve üç boyutlu grafik sunumları yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler- Dalga dönüşümü, Analitik Çözüm, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Soliton Çözümü

ABSTRACT

This study is aimed at obtaining analytical soliton solutions of the (1+1)-dimensional Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation with the new modified Kudryashov method. In the first stage, the model, which has the form of a nonlinear partial differential equation, is reduced to a nonlinear ordinary differential equation with the appropriate wave transformation. In the second stage, a system of linear algebraic equations is obtained by using the homogeneous equilibrium principle and the Riccati auxiliary differential equation, and the unknown parameters of the model examined are determined from the solution of this system. Depending on the different solution sets obtained, analytical soliton solutions are obtained and the main equation is checked. In the final stage, contour and three-dimensional graphic presentations are made to facilitate the physical interpretation of the solutions.

Keywords- Wave Transformation, Analytic Solution, Partial Differential Equations, Soliton Solution

[1*]Sorumlu yazar iletişim: ssan@ogu.edu.tr (https://orcid.org/0000-0002-8891-9358)
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Büyükdere Mah. Prof. Dr. Nabi Avcı Bulvarı No:4 Meşelik Kampüsü, Eskişehir
[2]İletişim: zeynepaydinn10@gmail.com (https://orcid.org/0009-0002-0003-9370)
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Büyükdere Mah. Prof. Dr. Nabi Avcı Bulvarı No:4 Meşelik Kampüsü, Eskişehir

I. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler (PDEs), matematiğin alt dalı olan uygulamalı matematiğin çok önemli bir parçasıdır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik, yarı analitik, sayısal ve kesin çözümlerinin bulunması, akışkanlar mekaniği, kimyasal fizik, kimyasal kinematik, plazma gibi çok çeşitli alanlarda çalışan bilim insanlarının dikkatini çekmiştir. Doğrusal olmayan oluşum denklemlerinin yürüyen dalga çözümleri, birçok fizik ve mühendislik problemlerinin çözümünde etkili bir araçtır.

Son yıllarda, Maple, Mathematica, Matlab gibi sembolik hesaplama programlarının geliştirilerek yaygın olarak kullanılmaya başlaması, karmaşık denklem sistemlerinin çözülmesini sağlamıştır. Doğrusal olmayan oluşum denklemlerine analitik çözümler bulmak için literatürde henüz evrensel bir metot keşfedilemediği için farklı yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları; Jacobi eliptik fonksiyon metodu [11], üstel fonksiyon metodu [13], homojen denge metodu [25,7], varyasyonel iterasyon metodu [12], Sine- Gordon metodu [27], tanh-coth metodu [26], ilk integral metodu [8], (G’/G) açılım metodu [24], ve modifiye Kudryashov metodu [16].

Kudryashov metodu ilk olarak N. A. Kudryashov tarafından, Bernoulli diferansiyel denklemini yardımcı denklem olarak almasıyla üstel formda çözümler bulunabileceğini göstermiştir [14]. Daha sonra farklı formlarda yardımcı denklem alınmasıyla yeni metodlar geliştirilmiştir [20,21]. Bunlardan biri olan ve bu makalede kullanılan modifiye edilmiş yeni Kudryashov metodu, yeni Kudryashov metoduna [16] dayalı olarak son yıllarda literatürde kullanılan metodlardan biridir [20]. Modifiye Kudryashov metodu son yıllarda Mustafa Bayram ve arkadaşları tarafından Kadomtsev-Petviashvili [5] denklemine, Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff [4] denklemine, Biswas-Milovic [2] denklemine, Biswas-Arshed [19] denklemlerine; Önder ve arkadaşları tarafından kompleks yapıda olan Maccari sistemine uygulanmıştır [21].

Bu çalışmada ele alınan Benjamin – Bona – Mahoney (BBM) denklemi [28],

$$u_t + \alpha u_x - \beta u_{xxt} + \lambda (u^2)_x = 0 \tag{1}$$

ilk olarak uzun dalga davranışının gelişimini açıklayan Peregrine tarafından ortaya atılmıştır. İlk kez Benjamin ve arkadaşları tarafından KdV denklemlerinin düzenlileştirilmiş bir versiyonu olarak araştırılmıştır.

Klasik bir model olarak karşımıza çıkan bu denklemin, sıvılarda uzun dalga boyu, soğuk plazmada hidromanyetik dalga, sıkılaştırılabilir sıvılarda akustik- yerçekimi dalgaları ve harmonik olmayan kristallerde akustik dalgalar dahil olmak üzere çeşitli fiziksel uygulamalarda ortaya çıkan dalgaların analizinde kullanılır [1].

Bu denklemin periyodik, soliton ve analitik yürüyen dalga çözümleri [18]; Abdel Rady ve arkadaşları tarafından homojen denge yöntemi ile [22]; Tang ve arkadaşları tarafından cebirsel metodu ile [23]; Estevez ve arkadaşları tarafından faktorizasyon tekniği ile [6] ve Jacobi eliptik fonksiyon genişletme yöntemi kullanılarak An ve Zhang tarafından [3] incelenmiştir. Gomez ve arkadaşları tanh-coth metodunu genelleştirilmiş BBM ve Burgers-BBM denklemlerine uygulayarak bazı yeni periyodik ve soliton çözümler elde etmişlerdir [9]. Gomez ve Salas Benjamin – Bona – Mahoney (BBM) denklemi için varyasyonel iterasyon metodu ve üstel fonksiyon metodu kullanarak yürüyen dalga çözümleri bulmuşlardır [10].

Bu çalışmanın akışı şu şekilde verilebilir: Bölüm 2 de modifiye Kudryashov metodunun herhangi bir kısmi diferansiyel denkleme uygulama algoritması verilecektir. Bölüm 3 de (1+1) boyutlu BBM denklemine dalga dönüşümü altında modifiye Kudryashov metodunu uygulanarak yürüyen dalga çözümler elde edilecektir. Ayrıca bazı çözümlerin seçilen özel değerlere göre Maple ile çizdirilmiş 2-boyutlu, 3-boyutlu, kontur ve kutupsal grafikleri verilecektir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar paylaşılacaktır.

II. MATERYAL VE METOT

A. Modifiye Kudryashov Metodu

Bu bölümde, modifiye Kudryashov metodunun polinom formunda verilen bir doğrusal olmayan denkleme uygulanışı adım adım verilecektir [16]. Öncelikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki formda verilsin;

$$\Omega(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{2}$$

buradaki Ω bir polinomu ifade eder.

Adım 1: $u(x,t) = U(\vartheta)$ ve $\vartheta = x - \sigma t$ dalga dönüşümü yardımıyla (2) denklemi aşağıdaki adi diferansiyel denkleme indirgenir:

$$G(U, U_\vartheta, U_{\vartheta\vartheta}, U_{\vartheta\vartheta\vartheta}, \dots) = 0. \tag{3}$$

Adım 2: (3) denkleminin aşağıdaki şekilde bir toplam formunda bir çözüme sahip olduğunu varsayalım;

$$U(\vartheta) = \sum_{i=0}^{N} c_i Q^i(\vartheta) \tag{4}$$

buradaki c_i'ler *(i=0, 1,…,N),* $Q^i(\vartheta)$ nin katsayılarıdır, $c_N \neq 0$ ve yardımcı denklem

$$\left(Q'(\vartheta)\right)^2 = \left(\Theta(lnA)Q(\vartheta)\right)^2\left(1 - 4abQ^2(\vartheta)\right) \tag{5}$$

dir. Bu denklemin çözümü ise kolayca

$$Q(\vartheta) = \frac{1}{aA^{\Theta\vartheta} + bA^{-\Theta\vartheta}}, \qquad (A > 0, A \neq 1). \tag{6}$$

olduğu görülebilir.

Buradaki a, b, Θ ve A (A>0) sabitleri daha sonra belirlenecek sıfır olmayan keyfi gerçek parametrelerdir. Ayrıca pozitif tam sayı olan N, (3) denklemindeki en yüksek mertebeden doğrusal terim ile doğrusal olmayan en yüksek dereceden terimler arasındaki homojen denge ile bulunur.

Adım 3: (4) denkleminin (3) denkleminde yerine yazılmasıyla ve (5) yardımcı denkleminin kullanılmasıyla $Q(\vartheta)$ nin kuvvetleri cinsinden bir polinom elde edilir. $Q(\vartheta)$'nin aynı kuvvetten terimleri toplanarak katsayıları sıfıra eşitlendiğinde c_0, c_1, c_2, A, a, b ve Θ parametrelerini içeren bir cebirsel sistem elde edilir.

Adım 4: Adım 3'deki doğrusal cebirsel denklem sistemi uygun bir sembolik hesaplama programı yardımıyla çözüldüğünde c_0, c_1, c_2, A, a, b ve Θ değerleri bulunur. "Bu değerler, $\vartheta = kx - wt$ dalga dönüşümü ve (6) denklemini göz önünde bulundurarak (4) denkleminde yerine yazıldığında (2)'deki doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin soliton çözümleri elde edilir.

III. BULGULAR VE TARTIŞMA

A. Modifiye Kudryashov Metodunun (1+1) boyutlu BBM denklemine uygulanması

Bu bölümde (1+1) boyutlu BBM denkleminin çözümleri modifiye Kudryashov metodu ile yürüyen dalga çözümleri elde edilecektir. BBM denklemi aşağıdaki formda verilir;

$$u_t + \alpha u_x - \beta u_{xxt} + \lambda(u^2)_x = 0 \tag{7}$$

Burada α, β ve λ reel sabitlerdir. (7) denklemine $U(x,t) = U(\vartheta)$, $\vartheta = kx - wt$ dalga dönüşümü uygulandığında, indirgenen denklemin bir kez integralinin alınmasıyla ve integral sabitinin gözardı edilmesiyle aşağıdaki adi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$-wU(\vartheta) + \alpha kU(\vartheta) + wk^2\beta U_{\vartheta\vartheta} + \lambda k\left(U(\vartheta)\right)^2 = 0 \tag{8}$$

En yüksek mertebeden doğrusal terim olan $U_{\vartheta\vartheta}$ ve doğrusal olmayan en yüksek dereceden terim olan $\left(U(\vartheta)\right)^2$ arasında dengeleme yapıldığında, dengeleme sabiti N = 2 bulunur.

Böylece (4) denklemine göre $U(\vartheta)$ çözümü aşağıdaki formda aranır;

$$U(\vartheta) = c_0 + c_1 Q(\vartheta) + c_2 Q^2(\vartheta). \tag{9}$$

Buradaki c_0, c_1 ve c_2 sonradan belirlenecek sabitlerdir.

(9) denklemindeki $U(\vartheta)$ ifadesi (8) denkleminde yerine yazıldığında ayrıca yardımcı denklem de gözönünde bulundurularak $Q(\vartheta)$'nin kuvvetleri cinsinden polinom elde edilir. $Q(\vartheta)$'nin aynı kuvvetten terimleri düzenlenerek katsayıları sıfıra eşitlendiğinde elde edilen cebirsel denklem sistemi aşağıda verilmiştir :

$$Q^4: -24\ln(A)^2\,\Theta^2 ab\beta k^2 w c_2 + k\lambda c_2^2.$$

$$Q^3: -8\ln(A)^2\,\Theta^2 ab\beta k^2 w c_1 + 2k\lambda c_1 c_2.$$

$$Q^2: 4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 w c_2 + 2kc_0c_2 + k\lambda c_1^2 + \alpha k c_2 - wc_2.$$

$$Q^1: \ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 w c_1 + 2k\lambda c_0 c_1 + \alpha k c_1 - wc_1.$$

$$Q^0: k\lambda c_0^2 + \alpha k c_0 - wc_0.$$

Verilen cebirsel sistem sembolik hesaplama programı kullanılarak çözüldüğünde bulunan parametreler, (9) denkleminde yerine yazılmasıyla, (üstel(hiperbolik)) fonksiyon olarak yedi çözüm ailesi elde edilmiştir.

Durum 1:

k, c_0, c_1 ve c_2 için bulunan çözüm kümesi şu şekildedir;

$$k = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w},$$

$$c_0 = \frac{-8\left(\alpha\dfrac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w} - w\right)\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w}{\left(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}\right)\lambda},$$

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = 3ab\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{\lambda}.$$

Bulunan c_0, c_1 ve c_2 değerleri (6) denklemindeki yardımcı denklem kullanılarak (9) çözümünde yerine yazıldığında (10) denkleminde verilen $U_1(\vartheta)$ çözümü elde edilir.

$$U_1(\vartheta) = \frac{-8\left(\alpha\dfrac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\Theta^2\beta w} - w\right)\ln(A)^2\Theta^2\beta w}{\left(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}\right)\lambda} + \frac{3ab\left(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}\right)}{\lambda\left(aA^{\Theta\vartheta} + bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \quad (10)$$

burada $\vartheta = \dfrac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w}x - wt$ şeklindedir.

Durum 2:

k, λ, c_0, c_1 ve c_2 için bulunan çözüm kümesi şu şekildedir;

$$k := \frac{\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{2}}{4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w},$$

$$\lambda = \lambda,$$

$$c_0 = -\frac{-4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2 + \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{2}\alpha}{\lambda\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{2}\right)},$$

$$c_1 = 0,$$

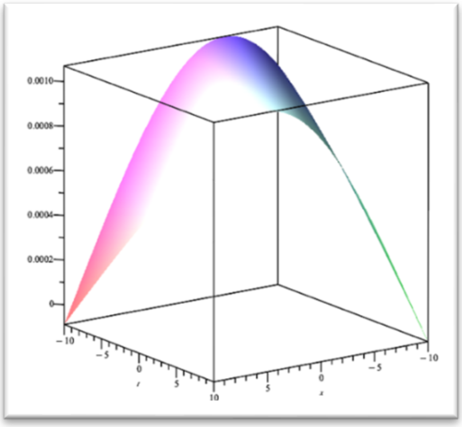
$$c_2 = \frac{6\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{2}\right)ba}{\lambda}.$$

Bulunan değerleri gerekli denklemlerde yerine yazdığımızda aşağıdaki $U_2(\vartheta)$ çözümü elde edilir;

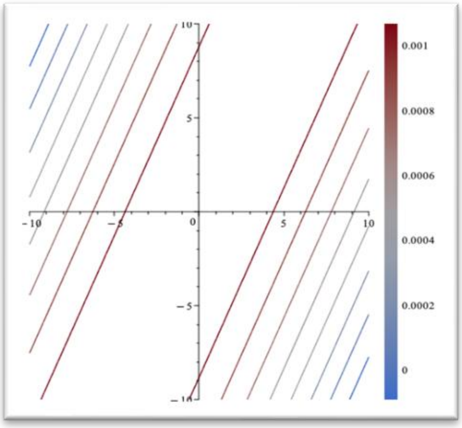
$$U_2(\vartheta) = -\frac{-4\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2 + \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}}{2}\alpha}{\lambda\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}}{2}\right)} + 6\frac{6\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}}{2}\right)ba}{\lambda\left(aA^{\Theta\vartheta} + bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \quad (11)$$

burada $\vartheta = \dfrac{\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 - 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{2}}{4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w}x - wt$ şeklindedir.

$U_2(x,t)$ çözümünün -10<x<10 ve -10<t<10 aralığında ve özel olarak $\mathrm{A} = 0.1, \mathrm{a} = 10, \mathrm{b} = 10,\ \beta = 1,\ \alpha = 0.5,\ w = 0.1,\ \lambda = 2,\ \Theta = 0.1$ değerleri alındığında Maple yardımıyla çizilen 3 boyutlu ve kontur grafikleri Şekil 1 ve Şekil 2 de verilmiştir.

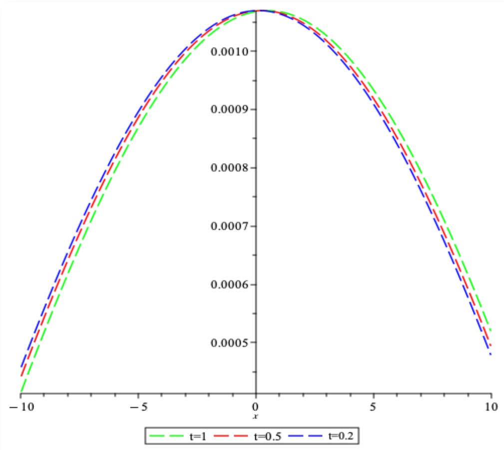


Şekil 1

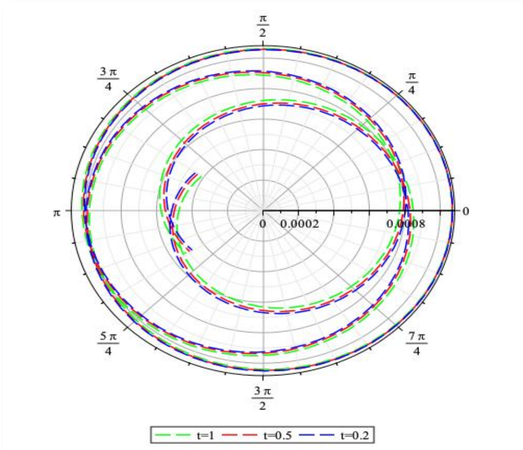


Şekil 2

Şekil 3 ve Şekil 4 de ise aynı değerler için $U_2(x,t)$ soliton dalga çözümünün t = 0.2, t = 0.5, t = 1 zaman değerlerindeki 2 boyutlu ve kutupsal koordinat grafikleri verilmiştir.



Şekil 3



Şekil 4

Durum 3:

k, λ, c_0, c_1ve c_2 için bulunan çözüm kümesi şu şekildedir**;**

$$k = \frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w},$$

$$\lambda = \lambda,$$

$$c_0 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = 3ab\,\frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{\lambda}.$$

$c_0 = 0, c_1 = 0$ olduğundan (9) çözümünde c_2 değeri yerine koyulduğunda aşağıdaki $U_3(\vartheta)$ çözümü elde edilir.

$$U_3(\vartheta) = 3ab\,\frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 16\ln(A)^2\Theta^2\beta w^2)}}{\lambda\left(aA^{\Theta\vartheta} + bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \tag{12}$$

burada $\vartheta = \dfrac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 16\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w^2)}}{8\ln(A)^2\,\Theta^2\beta w}x - wt$ şeklindedir.

Durum 4:

k, w, c_0, c_1 ve c_2 için bulunan çözüm kümesi aşağıda verilmiştir;

$$k = k,$$
$$w = \frac{\alpha k}{4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1},$$
$$c_0 = \frac{4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2}{\lambda(4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1)},$$
$$c_1 = 0,$$
$$c_2 = \frac{24\ln(A)^2\,\Theta^2\alpha\alpha b\beta k^2}{\lambda(4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1)}.$$

Değerler gerekli denklemlerde yerine yazıldığında aşağıdaki $U_4(\vartheta)$ çözümü elde edilir.

$$U_4(\vartheta) = \frac{4\ln(A)^2\Theta^2\beta k^2}{\lambda(4\ln(A)^2\Theta^2\beta k^2+1)} + \frac{24\ln(A)^2\Theta^2\alpha\alpha b\beta k^2}{\lambda(4\ln(A)^2\Theta^2\beta k^2+1)\left(aA^{\Theta\vartheta}+bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \tag{13}$$

burada $\vartheta = kx - \dfrac{\alpha k}{4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1}t$ şeklindedir.

Durum 5:

β, k, w, c_0, c_1 ve c_2 için elde edilen çözüm kümesi şu şekildedir;

$$\beta = -\frac{\lambda c_0}{4\ln(A)^2\,\Theta^2 k^2(\lambda c_0 + \alpha)},$$
$$k = k,$$
$$w = k\lambda c_0 + \alpha k,$$
$$c_0 = c_0,$$
$$c_1 = 0,$$
$$c_2 = -6abc_0.$$

(9) çözümünde, bulunan c_2 değeri yerine yazıldığında (14) denkleminde verilen $U_5(\vartheta)$ çözümü elde edilir.

$$U_5(\vartheta) = c_0 - \frac{6abc_0}{\left(aA^{\Theta\vartheta}+bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \tag{14}$$

burada $\vartheta = kx - (k\lambda c_0 + \alpha k)t$ şeklindedir.

Durum 6:

Aşağıdaki çözüm kümesi ise α, k, w, c_0, c_1 ve c_2 için bulunmuştur;

$$\alpha = -\frac{\lambda c_0(4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1)}{4\ln(A)^2\,\Theta^2 k^2\beta},$$
$$k = k,$$
$$w = -\frac{\lambda c_0}{4\ln(A)^2\,\Theta^2 k\beta},$$
$$c_0 = c_0,$$
$$c_1 = 0,$$
$$c_2 = -6abc_0.$$

c_2 değeri (9) çözümünde yerine yazıldığında $U_6(\vartheta)$ çözümü aşağıdaki şekilde bulunmuştur;

$$U_6(\vartheta) = c_0 - \frac{6abc_0}{\left(aA^{\Theta\vartheta}+bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \tag{15}$$

burada $\vartheta = kx + \dfrac{\lambda c_0}{4\ln(A)^2\,\Theta^2 k\beta} t$ şeklindedir.

Durum 7:

Son olarak k, λ, w, c_0, c_1 ve c_2 için bulunan değerler şu şekildedir;

$$k = k,$$

$$\lambda = -\frac{4\ln(A)^2\,\Theta^2 k^2\beta\alpha}{c_0(4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1)},$$

$$w = \frac{\alpha k}{(4\ln(A)^2\,\Theta^2\beta k^2 + 1)},$$

$$c_0 = c_0,$$

$$c_1 = 0,$$

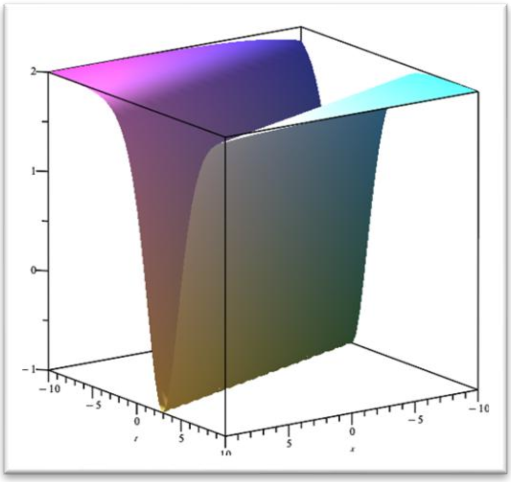
$$c_2 = -6abc_0.$$

Bu durumda da $U_5(\vartheta)$ ve $U_6(\vartheta)$ çözümüne benzer olarak aşağıdaki $U_7(\vartheta)$ çözümü bulunmuştur. Ancak ϑ dalga denkleminde kullanılan w değeri diğer iki çözümdeki w değerinden farklı olması sebebiyle $U_7(\vartheta)$ çözümü tektir.

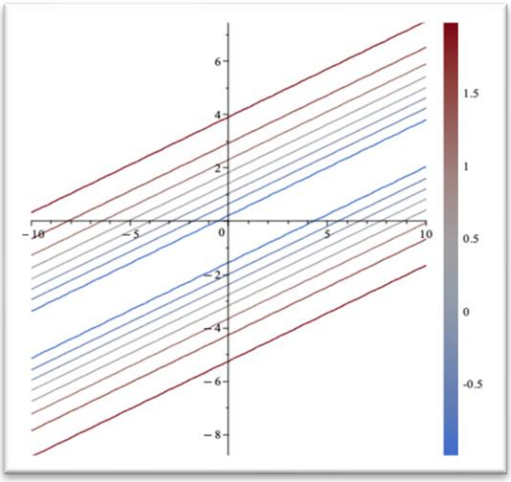
$$U_7(\vartheta) = c_0 - \frac{6abc_0}{\left(aA^{\Theta\vartheta}+bA^{-\Theta\vartheta}\right)^2}, \tag{16}$$

burada $\vartheta = kx + \dfrac{\alpha k}{(4\ln(A)^2\Theta^2\beta k^2+1)} t$ şeklindedir.

$U_7(x,t)$ çözümünün -10<x<10 ve -10<t<10 aralığında, $A = 0.1, a = 3, b = 1, \beta = 1{,}5, \alpha = 1, k = 0.1, \Theta = 0.1, c_0 = 2$ değerleri alındığında 3 boyutlu ve kontur grafikleri Şekil 5 ve Şekil 6 da verilmiştir.

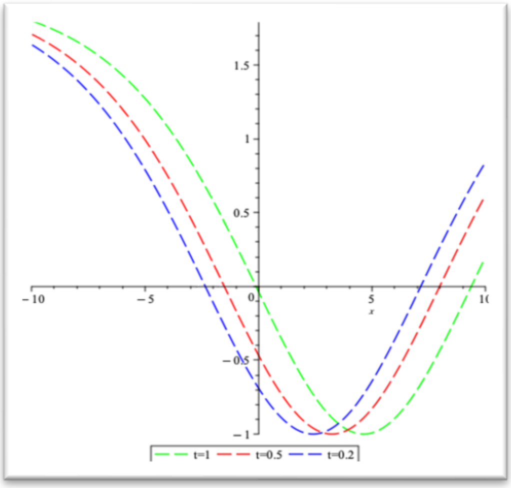


Şekil 5

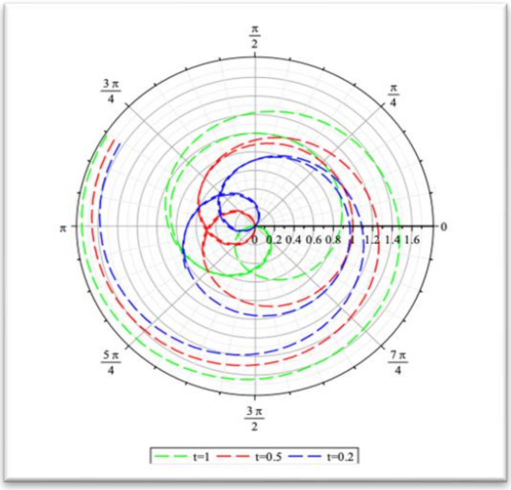


Şekil 6

Aynı değerler kullanıldığında $U_7(x,t)$ soliton dalga çözümünün, t = 0.2, t = 0.5, t = 1 zaman değerlerindeki 2 boyutlu ve kutupsal koordinat grafikleri ise Şekil 7 ve Şekil 8 de verilmiştir.



Şekil 7



Şekil 8

IV. SONUÇLAR

Bu makalede, modifiye Kudryashov metodu kullanılarak (1+1)-boyutlu Benjamin-Bona-Mahony denkleminin yürüyen dalga çözümleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçların tamamı Maple programı yardımıyla sağlaması yapılmıştır. Bulunan çözüm kümeleri için yedi adet durum verilmiştir. Parametrelere özel değerler verilerek $U_2(\vartheta)$ ve $U_7(\vartheta)$ çözümleri -10<x<10 ve -10<t<10 zaman aralıklarında 3 boyutlu ve kontur grafikleri; t=0.2, t=0.5, t=1 zaman değerlerinde ise 2 boyutlu ve kutupsal koordinat grafikleri olmak üzere toplamda sekiz adet grafik verilmiştir. Ayrıca kullanılan bu yaklaşımın diğer doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere analitik çözümler bulmak için kullanılabilecek olması, kullanışlı ve güçlü bir matematiksel araç olduğunun açık bir göstergesidir.

KAYNAKLAR

[1] Alsayyed, O., Jaradat, H. M., Jaradat, M. M. M., & Mustafa, Z. (2016). Multi-soliton solutions of the BBM equation arisen in shallow water. http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.35

[2] Altun, S., Ozisik, M., Secer, A., & Bayram, M. (2022). Optical solitons for Biswas–Milovic equation using the new Kudryashov's scheme. *Optik*, *270*, 170045. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170045.

[3] An, J.Y., & Zhang, W. G. (2006). Exact periodic solutions to generalized BBM equation and relevant conclusions. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *22*(3), 509-516. http://dx.doi.org/10.1007/s10255-006-0326-3

[4] Cinar, M., Secer, A., & Bayram, M. (2022). Analytical solutions of (2+ 1)-dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation in fluid mechanics/plasma physics using the New Kudryashov method. *Physica Scripta*, *97*(9), 094002. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac883f.

[5] Esen, H., Secer, A., Ozisik, M., & Bayram, M. (2022). Soliton solutions to the nonlinear higher dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation through the new Kudryashov's technique. *Physica Scripta*, *97*(11), 115104. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac98e4.

[6] Estévez, P. G., Kuru, Ş., Negro, J., & Nieto, L. M. (2009). Travelling wave solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, *40*(4), 2031-2040. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.09.080

[7] Fan, E., Zhang, H., (1998). A note on the homogeneous balance method, Phys. Lett. A 246 403–406. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00547-7.

[8] Feng, Z. (2002). The first-integral method to study the Burgers–Korteweg–de Vries equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *35*(2), 343. https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/2/312.

[9] Frias, B. A., Salas, A. H., & (2010). New periodic and soliton solutions for the Generalized BBM and Burgers–BBM equations. *Applied Mathematics and Computation*, *217*(4), 1430-1434. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.05.068.

[10] Gomez, C. A., & Salas, A. H. (2010). Exact solutions for the generalized BBM equation with variable coefficients. *Mathematical Problems in Engineering*, *2010*. http://dx.doi.org/10.1155/2010/498249.

[11] Guan-Ting, L., Tian-You F., (2005). New applications of developed Jacobi elliptic function expansion methods, *Physics Letters A*, 345.1-3: 161-166. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.07.034.

[12] He, J. H. (1998). Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *167*(1-2), 69-73. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00109-1.

[13] He, J.H., Wu, X.H., (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 30, no. 3, pp. 700-708, Nov. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.020.

[14] Kudryashov, N. A. (2011). One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *17*(6), 2248-2253. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.10.016.

[15] Kudryashov, N. A. (2015). On nonlinear differential equation with exact solutions having various pole orders. *Chaos, Solitons & Fractals*, *75*, 173-177. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.02.016.

[16] Kudryashov, N. A. (2020). Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations. *Optik*, *206*, 163550. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.163550.

[17] Kudryashov, N. A. (2020). Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations. *Optik*, *206*, 163550. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.163550.

[18] Noor, M. A., Noor, K. I., Waheed, A., & Al-Said, E. A. (2011). Some new solitonary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation. *Computers & Mathematics with Applications*, *62*(4), 2126-2131. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.06.060.

[19] Ozisik, M., Secer, A., & Bayram, M. (2022). The bell-shaped perturbed dispersive optical solitons of Biswas–Arshed equation using the new Kudryashov's approach. *Optik*, *267*, 169650. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169650.

[20] Ozisik, M., Secer, A., Bayram, M., & Aydin, H. (2022). An encyclopedia of Kudryashov's integrability approaches applicable to optoelectronic devices. *Optik*, *265*, 169499. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169499.

[21] Önder, İ., Özışık, M., & Seçer, A. (2022). The soliton solutions of (2+ 1)-dimensional nonlinear two-coupled Maccari equation with complex structure via new Kudryashov scheme. *New Trends in Mathematical Sciences*, *10*(1). http://dx.doi.org/10.20852/ntmsci.2022.468.

[22] Rady, A. A., Osman, E. S., & Khalfallah, M. (2010). The homogeneous balance method and its application to the Benjamin–Bona–Mahoney (BBM) equation. *Applied Mathematics and Computation*, *217*(4), 1385-1390. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.05.027

[23] Tang, Y., Xu, W., Gao, L., & Shen, J. (2007). An algebraic method with computerized symbolic computation for the one-dimensional generalized BBM equation of any order. *Chaos, Solitons & Fractals*, *32*(5), 1846-1852. http://dx.doi.org/10.1007/s11071-007-9282-6

[24] Wang, M., Li, X., & Zhang, J. (2008). The (G′ G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, *372*(4), 417-423. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051.

[25] Wang, M.L., (1995). Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, Phys. Lett. A 199 169–172. https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00092-H.

[26] Wazwaz, A. M. (2007). The tanh–coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations. *Applied Mathematics and Computation*, *188*(2), 1467-1475. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.013

[27] Yan, C. (1996). A simple transformation for nonlinear waves. *Physics Letters A*, *224*(1-2), 77-84. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00770-0

[28] Benjamin Thomas Brooke , Bona J. L. and Mahony J. J. (1972) Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 27247–78. https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032