



*Araştırma Makalesi / Research Article*

# PAINLEVÉ- BÄCKLUND DENKLEMİNİN RASYONEL ( $G'/G$ ) AÇILIM METODU İLE SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

## SOLİTON SOLUTIONS OF THE PAINLEVÉ- BÄCKLUND EQUATION USING THE RATIONAL ( $G'/G$ ) EXPANSION METHOD

Sait SAN<sup>1</sup>

Kübra KAYMAK<sup>2</sup>

<https://doi.org/10.55071/ticaretfbid.1387780>

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author*  
ssan@ogu.edu.tr

*Geliş Tarihi / Received*  
09.11.2023

*Kabul Tarihi / Accepted*  
18.01.2024

### Öz

Bu çalışmada lineer olmayan oluşum denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerinin bulunmasına yönelik rasyonel ( $G'/G$ ) açılım yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntem sayesinde trigonometrik fonksiyonlar, rasyonel fonksiyonlar ve hiperbolik fonksiyonlara göre düzenlenmiş uygun formdaki çeşitli soliton çözümler elde edilir. Aynı türden başka bir dalgayla çarpıştığında yok olmayan soliton dalgalarını incelemek için lineer olmayan 1+1-boyutlu Painlevé- Bäcklund denklemi üzerinde rasyonel ( $G'/G$ ) açılım yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem kullanılarak Painlevé- Bäcklund denkleminin keyfi parametreleriyle ilerleyen dalga çözümleri başarıyla elde edilir. Parametrelere özel değerler verildiğinde ise ilerleyen dalgardan denklemlerin soliter dalga çözümleri bulunarak 3-boyutlu ve kontur grafikleri çizdirilmiştir. Önerilen rasyonel ( $G'/G$ ) açılım yöntemi doğrudan, basit ve etkilidir. Diğer birçok lineer olmayan ve tam sayı dengelenmeye sahip denklemler için etkili ve güçlü bir matematiksel yöntemdir.

**Anahtar Kelimeler:** Painlevé - Bäcklund Denklemi, rasyonel ( $G'/G$ ) açılım metodu, Soliton çözüm.

### Abstract

In this study, the rational ( $G'/G$ ) expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear formation equations is discussed. Thanks to this method, various soliton solutions in appropriate form arranged according to trigonometric functions, rational functions and hyperbolic functions are obtained. The rational ( $G'/G$ ) expansion method was applied on the non-linear 1+1-dimensional Painlevé- Bäcklund equation to examine soliton waves that do not disappear when they collide with another wave of the same type. Using this method, traveling wave solutions with arbitrary parameters of the Painlevé-Bäcklund equation are successfully obtained. When special values were given to the parameters, solitary wave solutions of the equations were found from the traveling waves and 3-dimensional and contour graphs were drawn. The proposed rational ( $G'/G$ ) expansion method is direct, simple and effective. It is an effective and powerful mathematical method for many other nonlinear and integer balancing equations.

**Keywords:** Painlevé - Bäcklund Equation, rational ( $G'/G$ ) expansion method, Soliton solution.

<sup>1</sup>Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Eskişehir, Türkiye.  
ssan@ogu.edu.tr, Orcid.org/0000-0002-8891-9358.

<sup>2</sup>Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Eskişehir, Türkiye.  
kbraa.kymk@gmail.com, Orcid.org/0009-0004-4379-8929.

## 1. GİRİŞ

Yirminci yüzyılın ikinci yarısı, klasik fizik çalışmalarında ciddi anlamda bir artış görüldü. Bilim adamları, dinamik denklemlerdeki doğrusal olmamanın neden olduğu etkilere özel ilgi göstermeye başladılar. Bu doğrusal olmamanın zıt nitelikte iki ilginç tezahürü olduğu bulundu: Tamamen deterministik sistemlerin davranışındaki görünür rastlantısallık olan kaos ve elastik olarak dağılmış, yerleştirilmiş, kararlı hareket eden nesnelere olan solitonlar. Bu konuların her ikisi de artık sağlam matematiksel arka plana ve çok çeşitli fiziksel gözlemlere ve somut uygulamalara sahip paradigmlar halinde geliştirilmiştir.

Lineer olmayan oluşum denklemleri yalnızca matematiğin birçok alanında değil, aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji, mühendislik gibi bilimlerde ve alışkanlar mekaniğinden Navier Stokes denklemi, malzeme biliminden Cahn-Hilliard denklemi, kuantum mekaniğinden lineer olmayan Schrodinger denklemi gibi doğal sorunları anlamak için modellenmiştir. Soliton teorisi, optik fiberler, plazma fiziği, biyofizik, katı hal fiziği, ekoloji, sinyal işleme ve sistemler hakkında temel bilgileri sağlayabildikleri için lineer olmayan modellerin kesin çözümlerini araştırmakta önemli rol oynar. Gerçek hayatta karşımıza çıkan problemleri anlamlandırmak, tahmin etmek, kontrol etmek ve ölçmek için bazı problemleri matematiksel denklemler açısından modellemek ve uygun yöntem ile analitik çözümler elde etmek için birçok etkili ve kullanışlı yöntemler geliştirildi. Bu yöntemlerin bazıları: Ters saçılım yöntemi (Vakhnenko ve ark., 2003), tanh fonksiyonu yöntemi (Parkes & Duffy, 1996), varyasyonel iterasyon yöntemi (Mohyud-Din ve ark., 2009), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz, 2004), homojen dengeleme yöntemi (Fan & Zhang, 1998), üstel fonksiyon yöntemi (He & Wu, 2006), Hirota bilinear dönüşümü (Hirota, 1994), genelleştirilmiş Kurdyashov yöntemi (Hosseini ve ark., 2021), Jacobi elliptik fonksiyon yöntemi (Salahshour ve ark., 2021), alt denklem yöntemi (Hossen ve ark., 2017), Backlund dönüşümü (Zhu, 1993), Darboux dönüşümü (Matveev & Salle, 1991) gibi daha birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerle de lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini hesaplamak oldukça uzun sürecek ve kolay hata yapma riskini oluşturacağından günümüz teknolojisi yardımıyla sembolik hesaplama programları Maple, Mathematica gibi programlar, yöntemleri uygulamamızı ve sonuçları kolaylıkla bulmamızı sağlar.

Bir soliton, aynı türden başka bir dalgayla çarpıştığında yok olmayan belirli bir tek dalga türüdür. Bu tür bir davranış sayısal simülasyon tarafından önerilmiştir, ancak soliton'un bir çarpışmadan sonra orijinal şeklini tamamen geri kazanması gerçekten mümkün müdür? Bu tür sayısal simülasyonların sonuçlarının ayrıntılı bir analizinde, bir çarpışmadan sonra bazı dalgalanmalar gözlemlenebilir ve bu nedenle, orijinal şeklin tam olarak geri kazanılmadığı görülmektedir. Bu nedenle, solitonların çarpışmaları yoluyla yok olup olmadığını açıklığa kavuşturmak için soliton denklemlerinin kesin çözümlerini bulmak gerekir. Genel olarak, soliton denklemleri de dahil olmak üzere lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmak çok zor bir işidir. Ayrıca, doğrusal olmayan bir denklemi çözmek için bir yöntem bulunsa bile, genel olarak, böyle bir yöntem diğer denklemlere uygulamak her zaman mümkün değildir. Derin bir matematik anlayışı gerektirmeyen birçok doğrusal olmayan denklem türünü çözmeyi sağlayan başarılı ve evrensel bir araç var mıdır (Wang ve ark., 2008) ?

Bu sorunun cevabına evrensel bir cevap bulunamasa da kısmen cevap olarak Wang ve arkadaşları tarafından lineer olmayan dalga denklemlerini güvenilir bir şekilde çözmek için rasyonel (G'/G) açılım metodu (Hirota, 2004) önerilmiştir. Böylece lineer olmayan denklemlerin ve dengelenme sabitine sahip denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek için bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu sistematik yolla birçok denklemin kesin çözümlerinin bulunabileceğini göstermişlerdir.

## 2. RASYONEL ( $G'/G$ ) AÇILIM METODU

İki bağımsız değişken  $x$  ve  $t$ 'nin lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini (1) formunda ele alalım.

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (1)$$

$u = u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyondur.  $P, u(x, t)$ 'nin türevlerini içeren bir polinom olsun. Rasyonel ( $G'/G$ ) açılım yöntemiyle (1) formundaki denklemin genel çözümünü bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır (Islam ve ark., 2015):

**Adım 1)** Kısmi diferansiyel formdaki (1) denkleminin ilerleyen dalga çözümünü bulmak için  $\xi = x \pm vt$  dalga değişkeni ile  $u(x, t) = W(\xi)$  dönüşümü yapılarak (2) formundaki adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$Q(W, W', W'', W''', \dots) = 0 \quad (2)$$

$Q; W$  ve adi türevlerini içeren bir polinomdur. Buradaki adi türev  $\xi$  ye göredir.

**Adım 2)** (2) denkleminin en yüksek mertebeden lineer terimi ile lineer olmayan teriminin derecesi arasında homojen denge bağıntısı kurularak  $n$  pozitif tam sayısı belirlenir.  $W(\xi)$ 'nin derecesi ( $\deg[W(\xi)] = n$ ) ise diğer ifadenin derecesi aşağıdaki gibidir.

$$\deg\left(\frac{d^m W(\xi)}{d\xi^m}\right) = n + m, \quad \deg\left[W^m \left(\frac{d^l W(\xi)}{d\xi^l}\right)^p\right] = nm + p(n + l) \quad (3)$$

**Adım 3)** (2) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi rasyonel formda çözüme sahip olduğunu varsayalım.

$$W(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i}{\sum_{i=0}^n b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i} \quad (4)$$

Burada  $a_i$  ve  $b_i$  reel parametrelerden ( $i=0,1,2,\dots$ ) en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.  $W(\xi)$  çözümlerinin elde edilmesinde kullanılacak yardımcı denklem ise ikinci mertebeden denklemdir

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (5)$$

burada  $\lambda, \mu$  reel sabitlerdir. (5) yardımcı denkleminin çözümleri,  $\lambda^2 - 4\mu$  ifadesinin sıfırdan büyük, küçük ve eşit olma durumlarına göre aşağıda verilmiştir.

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \begin{cases} \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{2} \frac{A \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}, \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}}{2} \frac{-A \sin\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cos\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}, \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ \frac{-\lambda}{2} + \frac{B}{A + B\xi}, \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases} \quad (6)$$

A ve B keyfi sabitlerdir.

**Adım 4)** (2) denkleminde dengeleme sabitinin elde edilmesiyle (4) açılımı yapılır ve (2) de yazılır. Burada gerekli türevler hesaplanır ve yardımcı denklemin kullanılmasıyla  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ' nin kuvvetleri cinsinden bir polinomsal denklem sistemine dönüşür.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ' nin her bir kuvvetinin katsayısı sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi sembolik hesaplama programları (Maple, Mathematica vs.) yardımıyla çözülür. Bilinmeyen  $\lambda, \mu, a_i, b_i, v$  parametreleri elde edilir.

**Adım 5)** Bulunan parametrelerin değerleri (6) denkleminde verilen çözümlerle birlikte (4) denkleminde yerine yazılmasıyla lineer olmayan oluşum denkleminin soliton çözümleri elde edilir.

## 2.1. Painlevé- Bäcklund Denklemi Soliton Çözümleri

Bu bölümde Painlevé- Bäcklund denkleminin hareketli dalga çözümleri inşa edilecektir. Painlevé- Bäcklund denklemi, Kakutani ve Kawahara tarafından soğuk iyonlardan ve sıcak elektronlardan oluşan iki sıvılı bir plazma modelinin analiz edilmesiyle türetilmiştir (Kakutani & Kawahara, 1970; Isidore, 1996).

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + mu u_x)_x = 0 \quad (7)$$

Malfliet,  $m=0$  için (7)' nin ilerleyen dalga çözümünü tanh yöntemiyle türetmiştir (Malfliet, 1992). Kıvrık şekilli ilerleyen dalgayı elde etmek için  $m \neq 0$  durumunun da aynı yöntemle ele alınabileceğini belirtmekte fayda vardır. (7) denkleminin hareketli dalga çözümlerini bulmak için dalga dönüşümünü,

$$u(x, t) = W(\xi), \quad \xi = x + vt \quad (8)$$

olarak alındığında adi diferansiyel denkleme indirgenmiş (9) denklemi elde edilir.

$$vW' + WW' + bW''' - avW'' - am(W')^2 - amWW'' = 0 \quad (9)$$

$W'''$  ile  $W'^2$  ve ya  $WW''$  terimlerine homojen dengeleme bağıntısı uygulandığında  $n=1$  bulunur. Böylece  $W(\xi)$  çözümü denklem (10) formunda aranacaktır.

$$W(\xi) = \frac{p_0 + p_1 \left(\frac{G'}{G}\right)}{q_0 + q_1 \left(\frac{G'}{G}\right)} \quad (10)$$

(10) çözümünün (9) denkleminde yerine yazılmasıyla  $(G'/G)$ 'li bir polinom haline elde edilir.  $(G'/G)$ 'nin kuvvetlerinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel sistem çözülerek bilinmeyen  $p_0, p_1, q_0, q_1, a, b, m$  ve  $v$  parametleri bulunur. Bulunan değerler ile  $(G'/G)$  fonksiyonu (6) denklemindeki üç duruma göre incelenecektir.

### 2.1.1. Bulgular

#### Çözüm 1:

$$b = -a^2 m^2 v + a^2 m v, \quad p_0 = v(a\lambda m q_0 - 2am\mu q_1 - a\lambda q_0 + 2a\mu q_1 - q_0),$$

$$p_1 = -(a\lambda m q_1 - a\lambda q_1 - 2amq_0 + 2aq_0 + q_1)v$$

Değerlerine göre  $W(\xi)$  fonksiyonu

$$W_1(\xi) = \frac{v(a\lambda m q_0 - 2am\mu q_1 - a\lambda q_0 + 2a\mu q_1 - q_0) - (a\lambda m q_1 - a\lambda q_1 - 2amq_0 + 2aq_0 + q_1)v \left(\frac{G'}{G}\right)}{q_0 + q_1 \left(\frac{G'}{G}\right)} \quad (11)$$

olur ve (7) denkleminin dalga çözümü, (11) denkleminde denklem (6) durumlarının incelenmesiyle elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  olduğu hiperbolik fonksiyonel çözüm

$$W_{11}(\xi) = \frac{v(a\lambda m q_0 - 2am\mu q_1 - a\lambda q_0 + 2a\mu q_1 - q_0)}{q_0 + q_1 \left( \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}$$

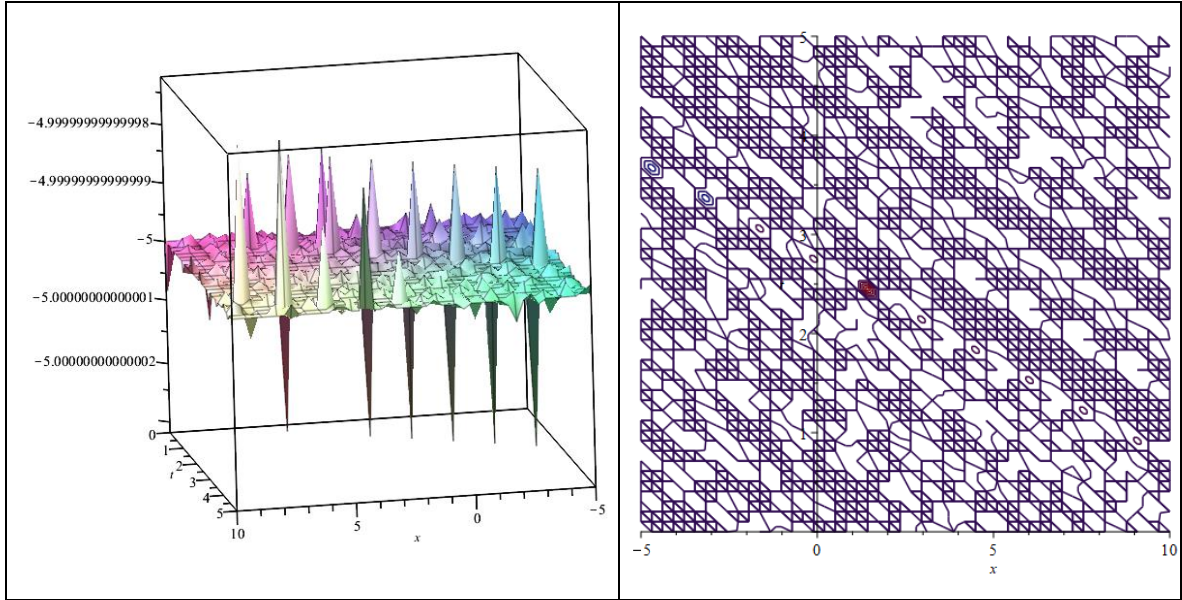
$$- (a\lambda m q_1 - a\lambda q_1 - 2amq_0 + 2aq_0 + q_1)v \left( \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)$$

$$+ \frac{q_0 + q_1 \left( \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}{q_0 + q_1 \left( \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}}{A \cosh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sinh\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  olduğu trigonometrik çözüm:

$$W_{12}(\xi) = \frac{v(a\lambda m q_0 - 2am\mu q_1 - a\lambda q_0 + 2a\mu q_1 - q_0)}{q_0 + q_1 \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \frac{-A \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}$$

$$\frac{(a\lambda m q_1 - a\lambda q_1 - 2amq_0 + 2aq_0 + q_1)v \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \frac{-A \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}{q_0 + q_1 \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \frac{-A \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right)}$$



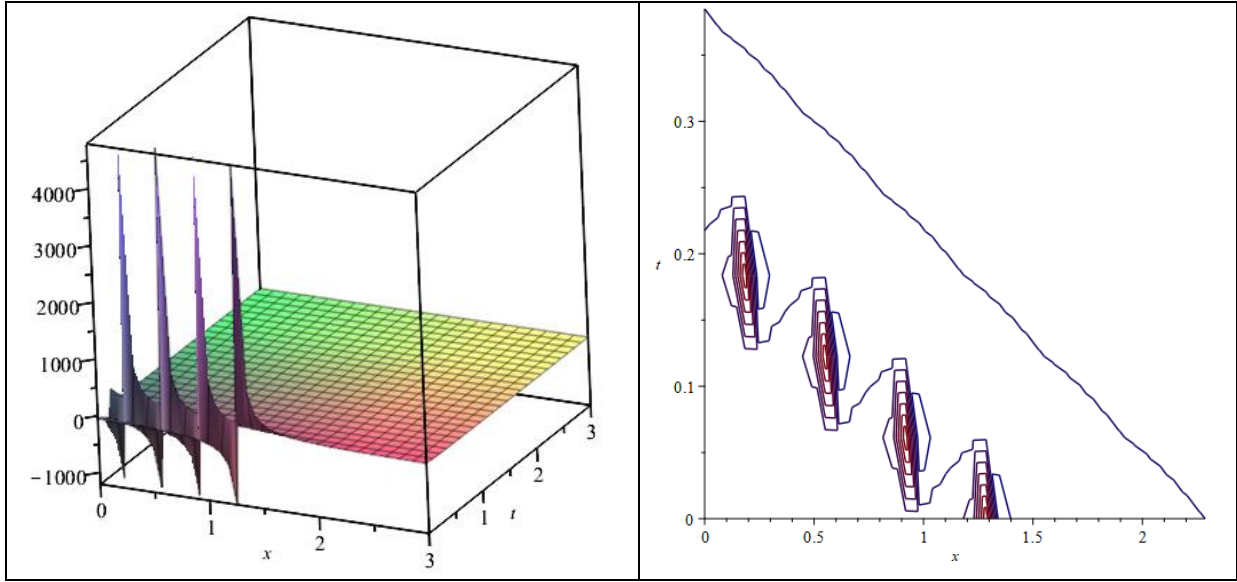
Şekil 1. Elde ettiğimiz çözümde  $-5 < x < 10$ ,  $0 < t < 5$  aralığı ve  $A = 1, B = 0, \lambda = 4, q_0 = 2, q_1 = 0.5, \mu = 5, m = 1, a = 1$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğu rasyonel çözüm

$$W_{13}(\xi) = \frac{v(2amq_0\sqrt{\mu} - 2am\mu q_1 - 2aq_0\sqrt{\mu} + 2a\mu q_1 - q_0)}{q_0 + q_1 \left( -\sqrt{\mu} + \frac{B}{B\xi + A} \right)}$$

$$\frac{(2amq_1\sqrt{\mu} - 2aq_1\sqrt{\mu} - 2amq_0 + 2aq_0 + q_1)v \left( -\sqrt{\mu} + \frac{B}{B\xi + A} \right)}{q_0 + q_1 \left( -\sqrt{\mu} + \frac{B}{B\xi + A} \right)}$$





Şekil 2. Elde ettiğimiz çözümde  $0 < x < 3$ ,  $0 < t < 3$  aralığı ve  $A = 2, B = 10, \lambda = 4, q_0 = 2, q_1 = 1.5, \mu = 4, m = 3, a = 2.5$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

### Çözüm 2:

$$b = -a^2 m v (m - 1), p_0 = q_0 v (a \lambda m - a \lambda - 1), p_1 = 2 q_0 v a m - 2 a q_0 v, \quad q_1 = 0$$

Değerlerine göre  $W(\xi)$  fonksiyonu

$$W_2(\xi) = \frac{q_0 v (a \lambda m - a \lambda - 1) + (2 q_0 v a m - 2 q_0 v a) \left( \frac{G'}{G} \right)}{q_0} \quad (12)$$

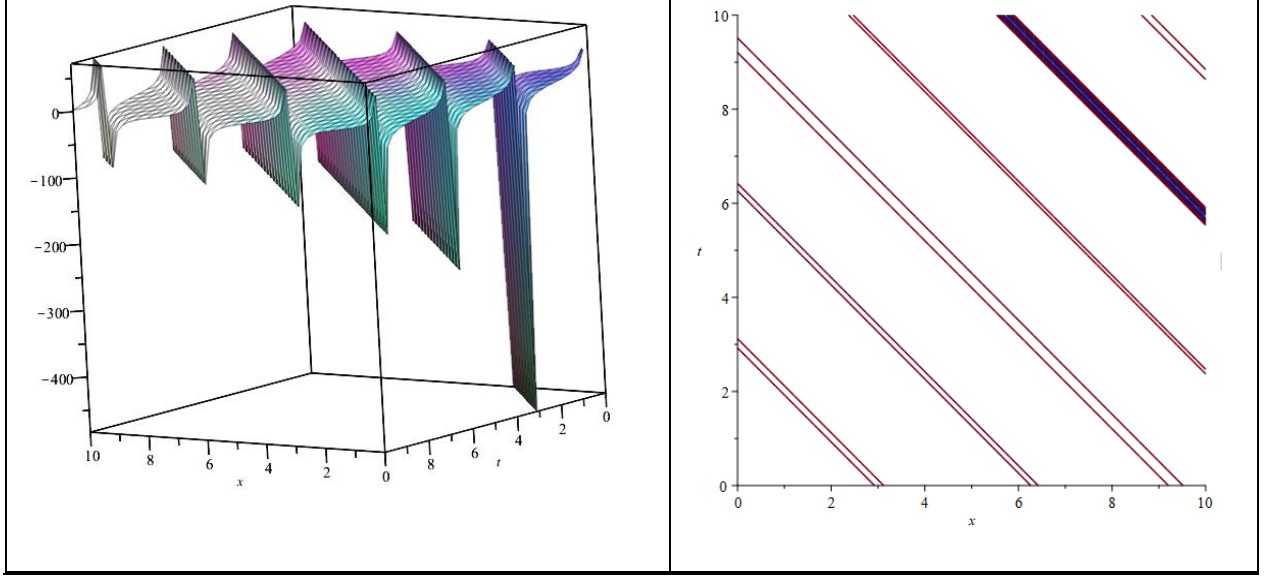
olur ve (7) denkleminin dalga çözümü, (12) denkleminde denklem (6) durumlarının incelenmesiyle elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  olduğu hiperbolik fonksiyonel çözüm

$$W_{21}(\xi) = v (a \lambda m - a \lambda - 1) + (2 v a m - 2 v a) \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{A \sinh \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) \xi \right) + B \cosh \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) \xi \right)}{A \cosh \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) \xi \right) + B \sinh \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) \xi \right)} \right) \quad (12a)$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  olduğu trigonometrik çözüm

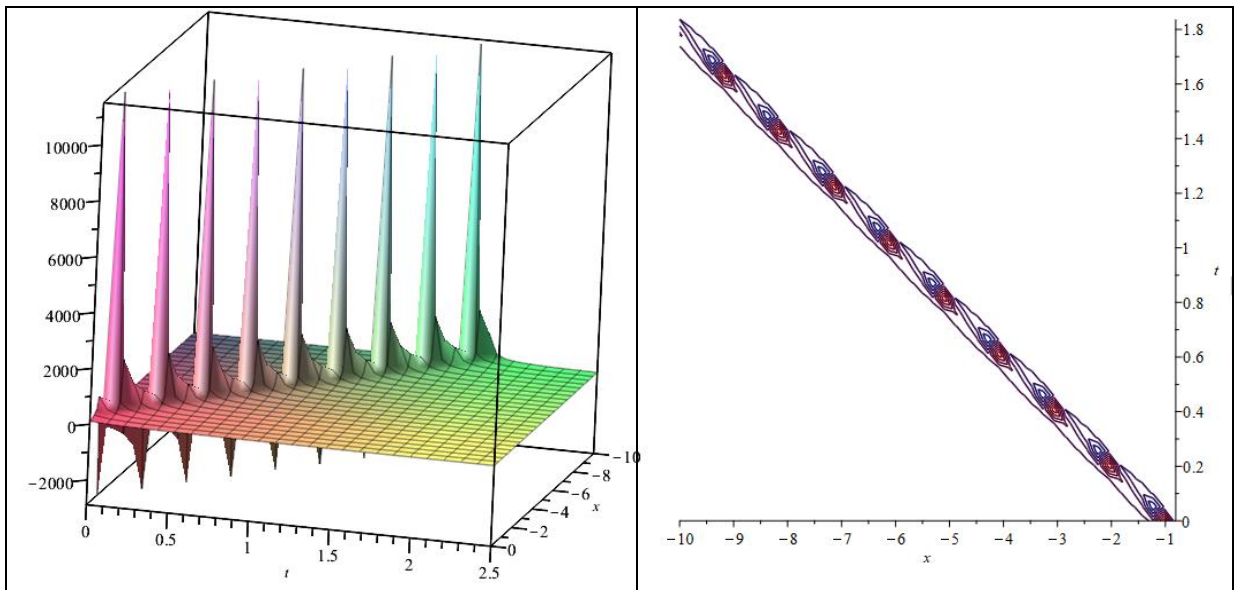
$$W_{22}(\xi) = v(a\lambda m - a\lambda - 1) + (2vam - 2va) \left( \frac{-\lambda + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} - \frac{-A \sin\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \cos\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right)}{A \cos\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right) + B \sin\left(\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}\right)\xi\right)} \right) \quad (12b)$$



Şekil 3. Elde ettiğimiz çözümde  $0 < x < 10$ ,  $0 < t < 10$  aralığı ve  $A = 0, B = 1, \lambda = 4, q_0 = 5, \mu = 5, m = 5, a = 1$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğu rasyonel çözüm

$$W_{23}(\xi) = - \frac{((\xi + (-2m + 2)a)B + A)v}{B\xi + A} \quad (12c)$$



Şekil 4. Elde ettiğimiz çözümde  $-10 < x < 0$ ,  $0 < t < 2.5$  aralığı ve  $A = 1, B = 1, \lambda = 2, \mu = 1, m = 5, a = 3$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.



**Çözüm 3:**

$$b = 0, \lambda = \frac{q_1 v + p_1}{a q_1 v}, m = 0, p_0 = 2q_1 a v \mu, q_0 = 0$$

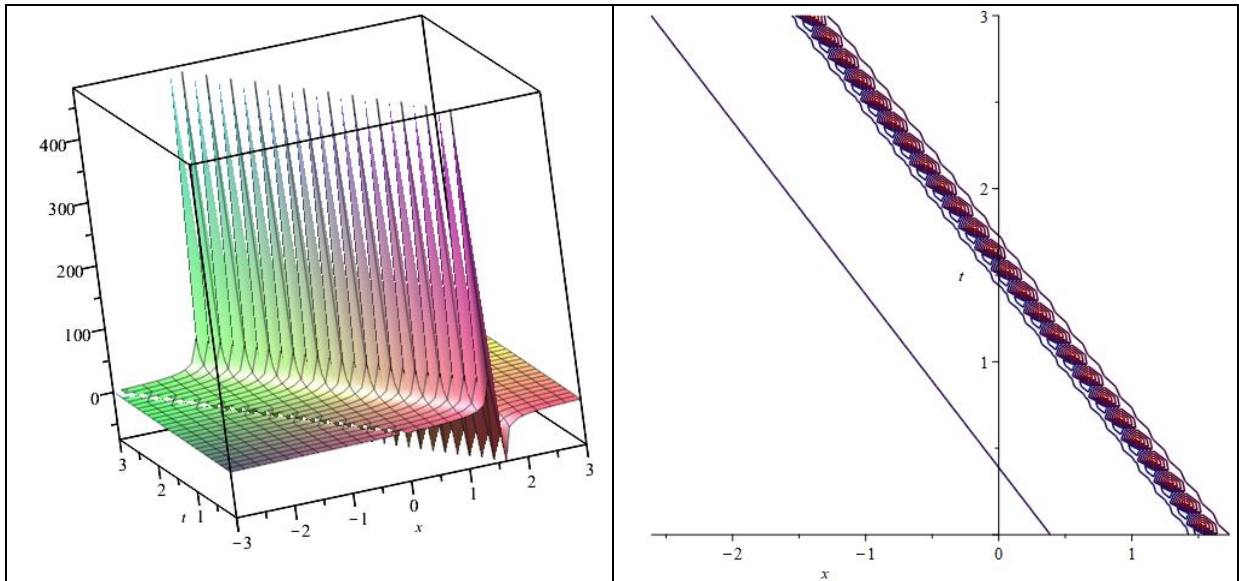
Değerlerine göre  $W(\xi)$  fonksiyonu

$$W_3(\xi) = \frac{2q_1 a v \mu + p_1 \left( \frac{G'}{G} \right)}{q_1 \left( \frac{G'}{G} \right)} \quad (13)$$

olur ve (7) denkleminin dalga çözümü, (13) denkleminde denklem (6) durumlarının incelenmesiyle elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  durumu için hiperbolik fonksiyon çözümü aşağıda verilmiştir:

$$W_{31}(\xi) = \frac{2q_1 a v \mu + p_1 \left( -\frac{q_1 v + p_1}{2a q_1 v} + \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu} \left( A \sinh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) + B \cosh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) \right)}{A \cosh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) + B \sinh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right)}{q \left( -\frac{q_1 v + p_1}{2a q_1 v} + \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu} \left( A \sinh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) + B \cosh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) \right)}{A \cosh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right) + B \sinh \left( \frac{\sqrt{\frac{(q_1 v + p_1)^2}{a^2 q_1^2 v^2} - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right)} \quad (13a)$$

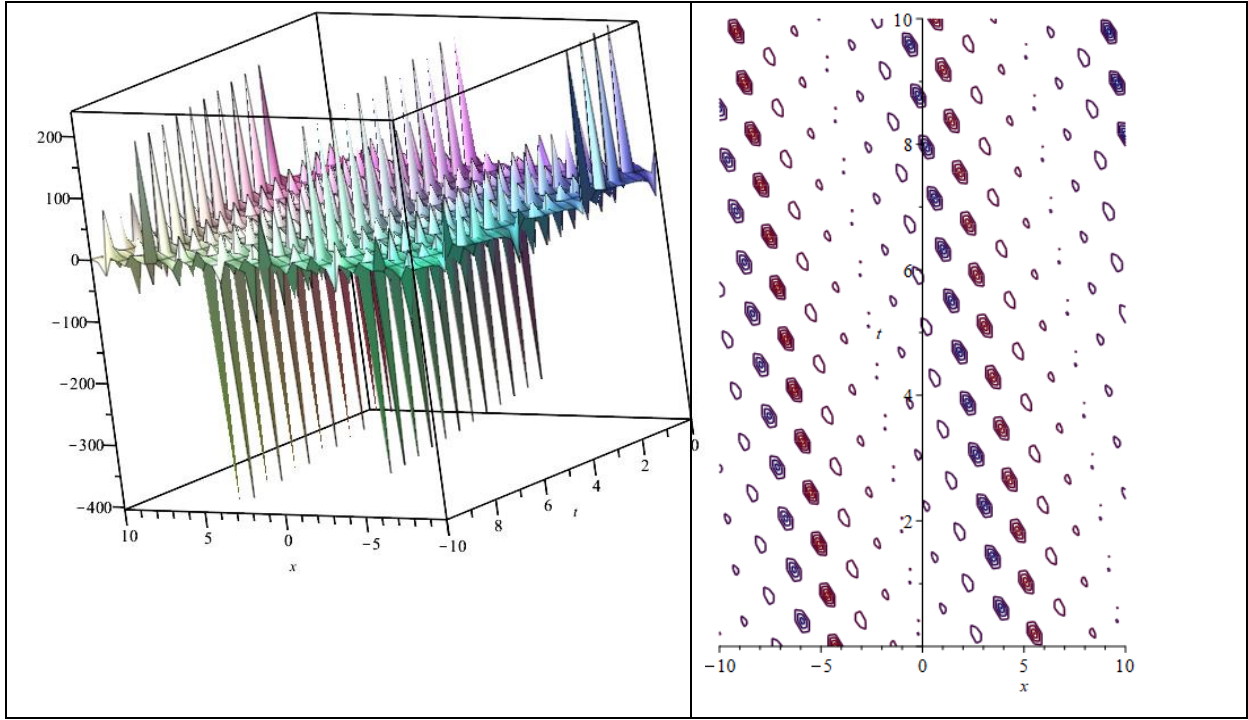


Şekil 5. Elde ettiğimiz çözümde  $-3 < x < 3$ ,  $0 < t < 3$  aralığı ve  $A = 0, B = 1, \mu = 0.5, m = 1, a = 2, v = 1, p_1 = 1, q_1 = 1$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  olduğu trigonometrik çözüm:

$$W_{32}(\xi) = \frac{2q_1av\mu + p_1 - \frac{q_1v + p_1}{2aq_1v} + \frac{\sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \left( -A \sin \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) \right)}{A \cos \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right)} \quad (13b)$$

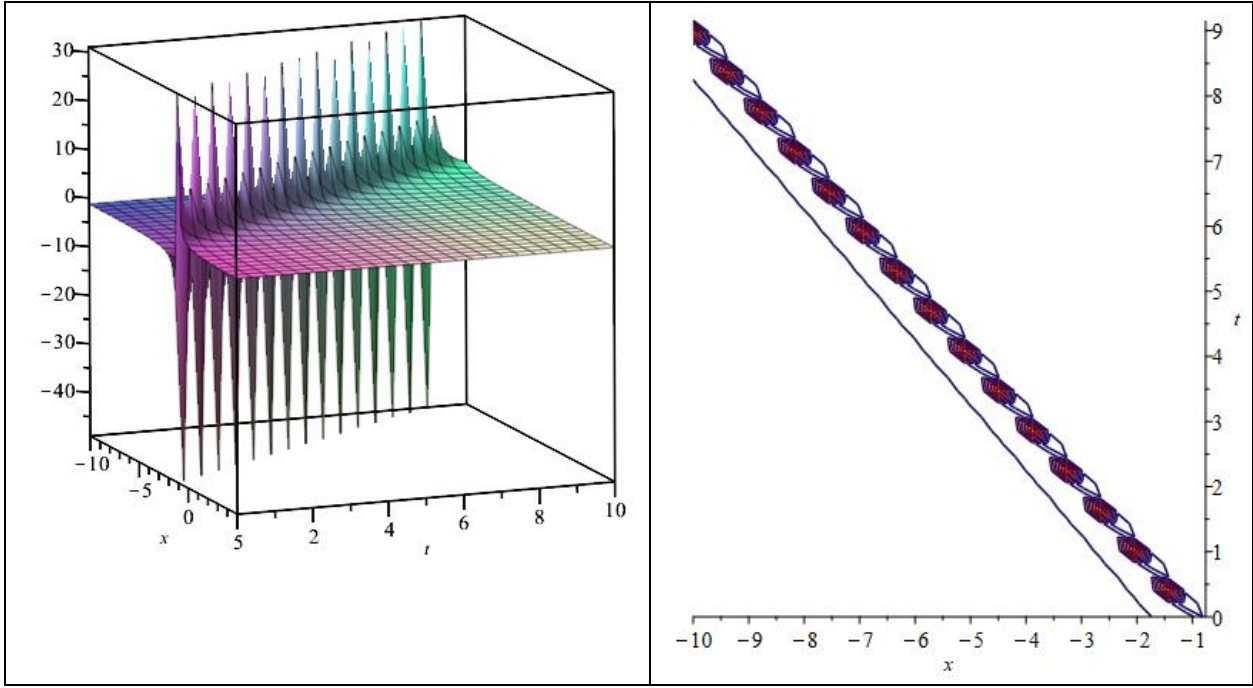
$$= \frac{q}{1 - \frac{q_1v + p_1}{2aq_1v} + \frac{\sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \left( -A \sin \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) \right)}{A \cos \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{(q_1v + p_1)^2}{a^2q_1^2v^2} + 4\mu} \xi \right)}$$



Şekil 6. Elde ettiğimiz çözümde  $-10 < x < 10$ ,  $0 < t < 10$  aralığı ve  $A = 1, B = 0, \mu = 5, m = 1, a = 2, v = 0.5, p_1 = 0, q_1 = 1$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğu rasyonel çözüm

$$W_{33}(\xi) = \frac{\left( \left( vq_1\xi + 2p_1 \left( a + \frac{\xi}{2} \right) \right) B + a(q_1v + p_1) \right) v}{\left( -2 \left( a - \frac{\xi}{2} \right) q_1v + p_1\xi \right) B + A(q_1v + p_1)} \quad (13c)$$



Şekil 7. Elde ettiğimiz çözümde  $-10 < x < 5$ ,  $0 < t < 10$  aralığı ve  $A = 0, B = 1, \mu = 1, m = 1, \alpha = -1, \nu = 1, p_1 = 1, q_1 = 1$  değerlerine göre 3 boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Painlevé- Bäcklund denklemi ele alınmıştır. Lineer olmayan 1+1-boyutlu formdaki denkleme hareketli dalga dönüşümü uygulanarak adi diferansiyel denkleme indirgenikten sonra Rasyonel  $(G'/G)$  açılım yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntemin uygulanışında verilen yardımcı denklem yardımıyla istenilen formdaki  $W(\xi)$  çözümü için  $p_0, p_1, q_0$  ve  $q_1$  parametrelerine uygun değerler verilerek üç farklı çözüm elde edilmiştir. Bu çözümlerin her biri için  $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ,  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  durumlarına bakılarak denklemin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümleri elde edilmiştir. Bulunan soliton çözümlerin tamamı sembolik hesaplama programında yerine yazılarak sağlamaları yapılmıştır. Elde edilen soliton çözümlerin bazılarının üç boyutlu ve kontur grafikleri verilmiştir.

Literatürde bundan önce yapılan çalışmalara bakıldığında, (Isidore, 1996) de Painlevé- Bäcklund denkleminde integralleme testlerinden Painleve analizi uygulanmış ve bükülme şeklinde ilerleyen bir dalga çözümü tanh fonksiyonuna bağlı olarak verilmiştir. Malfliet ise tanjant hiperbolik fonksiyon açılımı kullanarak soliton çözümler elde etmiştir (Malfliet, 1992). Ulaşabildiğimiz kadarıyla elde ettiğimiz çözümler literatürden farklıdır böylece yeni çözümlerdir ayrıca içerdiği fonksiyonlara göre çeşitli formlardadır.

### Yazarların Katkısı

Yazarların makaleye katkıları eşit orandadır.

### Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

## Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

## KAYNAKÇA

- Akbar, M. A., Abdullah, F. A., Islam, M. T., Al Sharif, M. A., & Osman, M. S. (2023). New solutions of the soliton type of shallow water waves and superconductivity models. *Results in Physics*, 44, 106180.
- Fan, E., & Zhang, H. (1998). A note on the homogeneous balance method. *Physics Letters A*, 246(5), 403-406.
- He, J. H., & Wu, X. H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3), 700-708.
- Hirota, R. (2004). *The direct method in soliton theory* (No. 155). Cambridge University Press.
- Hosseini, K., Sadri, K., Mirzazadeh, M., Chu, Y. M., Ahmadian, A., Pansera, B. A., & Salahshour, S. (2021). A high-order nonlinear Schrödinger equation with the weak non-local nonlinearity and its optical solitons. *Results in Physics*, 23, 104035.
- Hossen, M. B., Roshid, H. O., & Ali, M. Z. (2017). Modified double sub-equation method for finding complexiton solutions to the (1+ 1) dimensional nonlinear evolution equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3(Suppl 1), 679-697.
- Isidore, N. (1996). Exact solutions of a nonlinear dispersive-dissipative equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(13), 3679.
- Islam, M. T., Akbar, M. A., & Azad, A. K. (2015). A rational (G'/G)-expansion method and its application to modified KdV-Burgers equation and the (2+ 1)-dimensional Boussinesq equation. *Nonlinear Stud*, 6(4), 1-11.
- Kakutani, T., & Kawahara, T. (1970). Weak ion-acoustic shock waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 29(4), 1068-1073.
- Malfliet, W. (1992). Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American journal of physics*, 60(7), 650-654.
- Matveev, V. B., & Salle, M. A. (1991). *Darboux transformations and solitons* (Vol. 17). Berlin: Springer.
- Mohyud-Din, S. T., Noor, M. A., & Noor, K. I. (2009). Modified variational iteration method for solving Sine Gordon equations. *World Appl. Sci. J*, 6(7), 999-1004.
- Parkes, E. J., & Duffy, B. R. (1996). An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Computer physics communications*, 98(3), 288-300.
- Salahshour, S., Hosseini, K., Mirzazadeh, M., Ahmadian, A., Baleanu, D., & Khoshrang, A. (2021). The (2+ 1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation: its solitons and Jacobi elliptic function solutions. *The European Physical Journal Plus*, 136(2), 1-9.

- Vakhnenko, V. O., Parkes, E. J., & Morrison, A. J. (2003). A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 17(4), 683-692.
- Wang, M., Li, X., & Zhang, J. (2008). The (G' G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4), 417-423.
- Wazwaz, A. M. (2004). A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Mathematical and Computer modelling*, 40(5-6), 499-508.
- Zhu, Z. N. (1993). Lax pair, Bäcklund transformation, solitary wave solution and finite conservation laws of the general KP equation and MKP equation with variable coefficients. *Physics Letters A*, 180(6), 409-412.