Physical Sciences
ISSN: 1308 7304
ID: 2017.12.4.3A0080

Status : Original Study
Received: May 2017
Accepted: October 2017

Adem Çelik
Ayten Erduran
Dokuz Eylül University, İzmir-Turkey
adem.celik@deu.edu.tr; erduranayten@gmail.com

DOI	**http://dx.doi.org/10.12739/NWSA.2017.12.4.3A0080**	
ORCID ID	**0000-0001-9007-2937**	**0000-0001-9712-6889**

BAZI BELİRSİZ İNTEGRALLER İÇİN İNDİRGEME FORMÜLLERİ VE İMPROPER İNTEGRALLER ÜZERİNE

ÖZ

İntegrali var olmakla birlikte İntegral fonksiyonu sonlu sayıda elemanter fonksiyonlarla ifade edilemeyen fonksiyonların var olduğu bilinmektedir. Bu tür bazı belirsiz integraller için indirgeme formülleri elde edilmiştir. Belli aralıklar için yakınsak ya da ıraksak olmaları araştırılmıştır. $\int_0^\infty \frac{sinx^2}{x^2}dx$ ve $\int_0^\infty \frac{sinx}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ integralleri kesin olarak hesaplanmıştır. Ek olarak, 1. Tip ve 2. Tip "Hemen Hemen Cauchy Esas Değerleri (h.h.V.P_1 ve h.h.V.P_2)" tanımlanmış ve bazı hesaplamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik Analiz, Belirsiz İntegral, Sonlu Sayıda Elemanter Fonksiyonla İfade Edilemeyen İntegraller, İmproper İntegral, Cauchy Esas Değeri

ON THE REDUCTION FORMULAS FOR SOME INDEFINITE INTEGRALS AND IMPROPER INTEGRALS

ABSRACT

It is know that there are integral functions that cannot be expressed with finite number of elementary functions, although its integral exists. The reduction formulas were obtained for this kind of indefinite integrals. For specific integrals, their convergence or divergence is investigated. $\int_0^\infty \frac{sinx^2}{x^2}dx$ and $\int_0^\infty \frac{sinx}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ were definitely calculeted. In addition, "Almost Cauchy Principal Values of Type 1 (h.h.V.P_1) and Type 2 (h.h.V.P_2) were defined and some computational Works are done.

Keywords: Mathematical Analysis, Indefinite Integrals, The Integrals That Cannot Be Expressed With Finite Number of Elementery Functions, İmproper İntegral, Cauchy Value Principe

How to Cite:
Çelik, A. ve Erduran, A., (2017). Bazı Belirsiz İntegraller İçin İndirgeme Formülleri ve İmproper İntegraller Üzerine, Pysical Sciences (NWSAPS), 12(4):22-33, DOI: 10.12739/NWSA.2017.12.4.3A0080.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

$\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{cosx}{x}dx, \int \frac{sinx}{x}dx, \int e^{x^2}dx, \int e^{-x^2}dx, \int \frac{1}{lnx}dx, \int \frac{x}{lnx}dx$… gibi integraller sonlu sayıda elemanter fonksiyonlarla ifade edilemez. Bu tür integraller için seri çözümleri yapılabilir. Belli aralıklar için yaklaşık çözümleri hesaplanabilir [3 ve 9]. Bir İntegralde integral sınırlarından biri veya ikisi birden sonsuz olabilir. Bazen de integrali aldığımız aralıkta fonksiyon bir ya da daha çok noktada sonsuz olabilir. Bu tarz fonksiyonların belirli integrallerine has olmayan integraller (İmproper integraller) denir. Bu tarz integraller 1. Tip ve 2. Tip olarak ayrılır [1. 7 ve 9]. Bir yarı-sonsuz $x \geq 0$ aralığı üzerinde sürekli f(x)fonksiyonunun improper integrali $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$ denklemiyle tanımlanır. Bu limit varsa improper integral yakınsaktır denir ve onun değeri bu limit değeridir. Eğer her x için f(x)sürekliyse improper integral, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^0 f(x)dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)dx$ denklemiyle tanımlanır. Her iki limit varsa improper integral yakınsaktır ve onun değeri bu iki limitin toplamıdır [5, 6 ve 7]. Yukarıdaki ikinci improper integralinin bir başka hesaplama biçimi ise, $V.P.\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx$ şeklindedir. Bu limit değerine de bu improper integralin Cauchy Esas Değeri (V.P.) denir [2, 5 ve 7].

f fonksiyonu, $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ özelliğindeki x_i noktaları dışında $\mathbb{R}$ (Reel Sayılar kümesi) üzerinde sürekli olsun. $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ integralinin Cauchy Esas Değeri (V.P.)

$$V.P.\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{r\to0}\left[\int_{-\infty}^{x_1-r} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+r}^{x_n-r} f(x)dx + \int_{x_n+r}^{\infty} f(x)dx\right]$$

olarak tanımlanır [7].

İmproper (has olmayan) belirli integrallerin bazılarının gerçek değeri, bazılarının da Cauchy Esas Değerleri (V.P) kompleks analizde Cauchy-Rezidü yöntemiyle hesaplanabilir. Yaklaşık integral alma yollarından biri de Simpson yöntemidir. Simpson yöntemi herhangi bir [a,b] aralığında sürekli bir f fonsiyonunun yaklaşık integralini alırken kullandığımız bir yöntemdir. [a, b], 2h uzunluğundaki aralığı n çift sayı olmak üzere n/2 alt aralıklara bölme yoluyla ve aralıkta paraboller yardımıyla istenen alanı yaklaşık bulmak için;

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{n-3} + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

formülü kullanılır [11].

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Bu makalede sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen bazı integraller için indirgeme formülleri verilmiştir. Bu formüller önce tahmin edilmiş sonra da analitik olarak ispatlanmıştır. Bulunan indirgeme formülleri aracılığı ile İmproper integral olarak da incelemelerde bulunulmuştur. Simpson yöntemiyle bu çalışmada elde ettiğimiz formüllerle hesaplanan yaklaşık hesaplamalar karşılaştırılmıştır. Bu tür improper integraller için hemen hemen Cauchy esas değerleri (h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$) tanımlanmış ve bazı hesaplamalar yapılmıştır.

3. ANALİTiK ÇALIŞMA (ANALYTICAL STUDY)

Çalışma pür matematik tabanlı bir analitik araştırma makalesidir. Bu tür ispat tekniğinde formüller ve denklemler teorik metodlarla elde edilir. Genel olarak bu metot hipotez-hüküm çerçevesinde şekillenir [10].

4. BAZI BELİRSİZ İNTEGRALLER İÇİN İNDİRGEME FORMÜLLERİ (REDUCTION FORMULARS FOR SOME UNCERTAINTY INTEGRALS)

Bu kesimde integral fonksiyonu sonlu sayıda elemanter fonksiyonlarla ifade edilemeyen bazı fonksiyonlar için indirgeme formülleri verilecektir. Aşağıda verilen her bir teoremde $C \in \mathbb{R}$ (Reel Sayı Kümesi) belirsiz integral sabitleri, $a \neq 0$ ve $x+b \neq 0$ olsun.

Teorem 1.

i) $\int \frac{e^x}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{n}\int \frac{e^x}{x^n}dx - \frac{e^x}{n.x^n}$ +C $\quad (x \neq 0 \ , \ n \neq 0)$ (1)

ii) $\int \frac{e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}dx = \frac{a}{n}\int \frac{e^{ax}}{(x+b)^n}dx - \frac{e^{ax}}{n.(x+b)^n}$ +C $\quad (n \neq 0)$ (2)

indirgeme formülleri geçerlidir.

İspat:

ii) $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f \neq 0$ olsun. Bu halde

$\int \frac{e^{ax}}{f(x)}dx = \frac{e^{ax}}{(x+b)^n}$ +C (3)

olduğunu varsayalım. İntegral hesabın temel teoreminden $\frac{e^{ax}}{f(x)} = \left(\frac{e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}\right)'$ dır. Bu eşitlikten de $f(x) = \frac{(x+b)^{n+1}}{a(x+b)-n}$ bulunur. Bunu (3) te yazalım,

$\int \frac{[a(x+b)-n]e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}dx = \frac{e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}$ +C elde edilir. Bu eşitlikten de

$a\int \frac{e^{ax}}{(x+b)^n}dx - \frac{e^{ax}}{(x+b)^n} =$ n $\int \frac{e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}dx$ +C (4)

bulunur. (4) eşitliğini düzenleyelim (2) elde edilir. i)'nin ispatı için (3) de $a=1$, $b=0$ alarak benzer ispatı yaparız. Şimdi (1) ve (2) formüllerinde n=1 için sonra n=2 için,…, n=n için ardışık olarak integralleri hesaplayalım. Aşağıdaki Sonuç 1 i) ve ii) yazarız.

Sonuç I.

i) $\int \frac{e^x}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{n!}\int \frac{e^x}{x}dx - \frac{e^x}{n!}\left[\frac{0!}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(k-1)!}{x^k} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n}\right]$ +C (5)

ii) $\int \frac{e^{ax}}{(x+b)^{n+1}}dx = \frac{a^n}{n!}\int \frac{e^{ax}}{x+b}dx - \frac{e^{ax}}{n!}\left[\frac{0!a^{n-1}}{x+b} + \frac{1!a^{n-2}}{(x+b)^2} + \frac{2!a^{n-3}}{(x+b)^3} + \cdots + \frac{(k-1)!a^{n-k}}{(x+b)^k} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(x+b)^n}\right]$+C (6)

iii) $\ln x \neq 0$ olmak üzere,

a) $\int \frac{1}{(\ln x)^{n+1}}dx = \frac{1}{n!}\int \frac{1}{\ln x}dx - \frac{x}{n!}\left[\frac{0!}{\ln x} + \frac{1!}{(\ln x)^2} + \frac{2!}{(\ln x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(\ln x)^n}\right]$+C (7)

b) $\int \frac{x^{m-1}}{(\ln x)^{n+1}}dx = \frac{m^{n+1}}{n!}\int \frac{x^{m-1}}{\ln x}dx - \frac{x^m}{n!}\left[\frac{0!m^{n-1}}{\ln x} + \frac{1!m^{n-2}}{(\ln x)^2} + \frac{2!m^{n-3}}{(\ln x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(\ln x)^n}\right]$+C (8)

dir.

İspat:

iii) lnx=t değişken dönüşümü yapalım; (7) eşitliği $\int \frac{1}{(\ln x)^{n+1}}dx = \int \frac{e^t}{t^{n+1}}dt$ olur ve (5) formülünü göz önüne alırız. Aynı şekilde (8) eşitliği $\int \frac{x^{m-1}}{(\ln x)^{n+1}}dx = \int \frac{e^{mt}}{t^{n+1}}$ olur ve (6) formülünü göz önüne alırız.

Teorem 2.

$x \neq 0, n \neq 0$, $n \neq 1$ olmak üzere,

i) $\int \frac{\cos x}{x^{n+1}}dx = -\frac{1}{n(n-1)}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx - \frac{\cos x}{n.x^n} + \frac{1}{n(n-1)}\frac{\sin x}{x^{n-1}}$+C (9)

ii) $\int \frac{\cos ax}{(x+b)^{n+1}}dx = -\frac{a^2}{n(n-1)}\int \frac{\cos ax}{(x+b)^{n-1}}dx - \frac{\cos ax}{n.(x+b)^n} + \frac{a}{n(n-1)}\frac{\sin ax}{(x+b)^{n-1}}$+C (10)

indirgeme formülleri geçerlidir.

İspat:

ii) $I_1 \subset \mathbb{R}$, $f: I_1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f \neq 0$ olsun. Bu halde

$$\int \frac{\cos ax}{f(x)}dx = \frac{\sin ax}{(x+b)^n} + C \quad (11)$$

olduğunu varsayalım. İntegral hesabın temel teoremi gereğince $\frac{\cos ax}{f(x)} = \frac{a(x+b)\cos ax - nn\sin ax}{(x+b)^{n+1}}$ dır. Buradan f(x)'i bulup (11)'de yazalım,

$a\int \frac{\cos ax}{(x+b)^n}dx - n\int \frac{\sin ax}{(x+b)^{n+1}}dx = \frac{\sin ax}{(x+b)^n}$+$C_1$ (12)

elde edilir. Şimdi $I_2 \subset \mathbb{R}$, $g: I_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $g \neq 0$ olsun. Bu halde

$$\int \frac{sinax}{g(x)} dx = \frac{cosax}{(x+b)^n} + C \tag{13}$$

olsun. (13)'den $g(x) = \frac{(x+b)^{n+2} sinax}{-a(x+b)sinax-(n+1)cosax}$ elde edilir. Buna göre (13) eşitliği

$$\int \frac{sinax}{(x+b)^{n+1}} dx = -\frac{1}{a}\frac{cosax}{(x+b)^{n+1}} - \frac{n+1}{a}\int \frac{cosax}{(x+b)^{n+2}} dx \tag{14}$$

olur. (14) ve (12) den $\int \frac{cosax}{(x+b)^{n+2}} dx = -\frac{a^2}{n(n+1)}\int \frac{cosax}{(x+b)^n} dx - \frac{cosax}{(n+1)(x+b)^n} + \frac{a}{n(n+1)}\frac{sinax}{(x+b)^n} + C$ elde edilir. Bu en son eşitlikte, n yerine n-1 koyalım (10) formülünü buluruz. (11) de $a = 1$, $b = 0$ alarak benzer ispatı i) için yaparız.

Teorem 3.

$x \neq 0, n \neq 0$, $n \neq 1$ olmak üzere,

$$\text{i)} \int \frac{sinx}{x^{n+1}} dx = -\frac{1}{n(n-1)}\int \frac{sinx}{x^{n-1}} dx - \frac{sinx}{n.x^n} - \frac{1}{n(n-1)}\frac{cosx}{x^{n-1}} + C \tag{15}$$

$$\text{ii)} \int \frac{sinax}{(x+b)^{n+1}} dx = -\frac{a^2}{n(n-1)}\int \frac{sinax}{(x+b)^{n-1}} dx - \frac{sinax}{n.(x+b)^n} - \frac{a}{n(n-1)}\frac{cosax}{(x+b)^{n-1}} + C \tag{16}$$

indirgeme formülleri geçerlidir.

İspat:

$\int \frac{sinax}{f(x)} dx = \frac{cosax}{(x+b)^n} + C$ alınarak f(x) bulunur. Daha sonra

$\int \frac{cosax}{g(x)} dx = \frac{sinax}{(x+b)^n} + C$ alınarak g(x) bulunur.

Teorem 4.

$$\text{i)} \int \frac{e^{x^2}}{x^{n+1}} dx = \frac{2}{n}\int \frac{e^{x^2}}{x^{n-1}} dx - \frac{e^{x^2}}{n.x^n} + C \quad (x \neq 0, n \neq 0) \tag{17}$$

$$\text{ii)} \int \frac{e^{a(x+b)^2}}{(x+b)^{n+1}} dx = \frac{2a}{n}\int \frac{e^{a(x+b)^2}}{(x+b)^{n-1}} dx - \frac{e^{a(x+b)^2}}{n.(x+b)^n} + C \quad (n \neq 0) \tag{18}$$

indirgeme formülleri geçerlidir.

İspat:

i) $\int \frac{e^{x^2}}{h(x)} dx = \frac{e^{x^2}}{x^n} + C$ alalım. $h(x) = \frac{x^n}{(2x^2-n)}$ bulunur. Buradan da (17) elde edilir.

ii) $\int \frac{e^{a(x+b)^2}}{H(x)} dx = \frac{e^{a(x+b)^2}}{(x+b)^n}$ alalım, buradan $H(x)$ 'i bulur ve daha sonra da (18) elde edilir. Şimdi (18) Formülünde a=-1 ve b=0 alalım,

$$\int \frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}} dx = -\frac{2}{n}\int \frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}} dx - \frac{e^{-x^2}}{n.x^n} + C \quad (x \neq 0) \tag{19}$$

bulunur. Aşağıdaki iki teoremi ispatsız verelim.

Teorem 5.

$$\text{İ)} \int \frac{cosx^2}{x^{n+1}} dx = -\frac{2}{n}\int \frac{sinx^2}{x^{n-1}} dx - \frac{cosx^2}{n.x^n} + C \quad (x \neq 0,\ n \neq 0) \tag{20}$$

$$\text{ii)} \int \frac{cosa(x+b)^2}{(x+b)^{n+1}} dx = -\frac{2a}{n}\int \frac{sina(x+b)^2}{(x+b)^{n-1}} dx - \frac{cosa(x+b)^2}{n.(x+b))^n} + C \quad (n \neq 0) \tag{21}$$

indirgeme formülleri geçerlidir.

Teorem 6.

$$\text{İ)} \int \frac{sinx^2}{x^{n+1}} dx = \frac{2}{n}\int \frac{cosx^2}{x^{n-1}} dx - \frac{sinx^2}{n.x^n} + C \quad (x \neq 0,\ n \neq 0) \tag{22}$$

$$\text{ii)} \int \frac{sina(x+b)^2}{(x+b)^{n+1}} dx = \frac{2a}{n}\int \frac{cosa(x+b)^2}{(x+b)^{n-1}} dx - \frac{sina(x+b)^2}{n.(x+b))^n} + C \quad (n \neq 0) \tag{23}$$

indirgeme formülleri geçerlidir.

5. BELİRLİ İNTEGRALLER OLARAK İNCELEME (INVESTIGATION AS SPECIFIC INTEGRALS)

Bu kesimde (1), (2), (9), (10), (15)---(18), (20)---(23) formülleri belirli integral olarak ele alınacaktır. Bazı integrallerin belli integrasyon aralıkları için yakınsak ya da ıraksak olup olmadığı araştırılacaktır. Şimdi $\frac{F(x)}{x^{n+1}}$ fonksiyonu (1), (9), (15), (17), (20) ve (22) formüllerindeki fonksiyonu temsil etsin ve $c > 0$, $\infty > d > c$ olmak üzere, $[c,d] \subset \mathbb{R}$ (Reel sayılar kümesi) aralığı olsun. Bu halde $\left|\int_c^d \frac{F(x)}{x^{n+1}}dx\right| \leq \frac{|F(x)|}{|c|^{n+1}}.(d-c)$ dir. Öte yandan $|F(x)| \leq e^{k^2}, \exists k \in \mathbb{R}$ ya da $|F(x)| \leq 1$ dir. Eğer $\frac{G(x)}{(x+b)^{n+1}}$ fonksiyonu (2), (10), (16), (18), (21) ve (23) formüllerindeki fonksiyonu temsil ediyorsa, bu halde $\left|\int_c^d \frac{G(x)}{(x+b)^{n+1}}dx\right| \leq \frac{|G(x)|}{||c|-|b||^{n+1}}.(d-c)$ dir. Öte yandan $|G(x)| \leq e^{a(k+b)^2}, \exists k \in \mathbb{R}$ ya da $|G(x)| \leq 1$ dir. Böylece bu aralık için alınan tüm belirli integraller yakınsaktır. Aynı şekilde, $c<0$, $-\infty<d<c$ olmak üzere, $[d,c] \subset \mathbb{R}$ integrasyon aralığı için de aynı integrallerin yakınsak olduğu görülebilir.

Teorem 7.

i) $\int_0^\infty \frac{sinx^2}{x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (24)

ii) $\int_{-\infty}^0 \frac{sinx^2}{x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (25)

iii) $\int_0^\infty \frac{sinx^2}{x^{n+1}}dx \quad (n>1)$ (26)

integralleri ıraksaktır.

iv) $\int_{-\infty}^0 \frac{sinx^2}{x^{n+1}}dx \quad (n>1)$ (27)

integralleri ıraksaktır.

İspat:

i) (22) Formülünde n=1 alalım. O zaman,

$\int_0^\infty \frac{sinx^2}{x^2}dx = 2\int_0^\infty cosx^2dx - \lim_{\beta\to+\infty}(\frac{sin\beta^2}{\beta}) + \lim_{\alpha\to 0^+}(\frac{sin\alpha^2}{\alpha})$ olur. Öte yandan,

$\int_0^\infty cosx^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ [5 ve 8] *ve* $\lim\limits_{\beta\to+\infty}(\frac{sin\beta^2}{\beta}) + \lim_{\alpha\to 0^+}(\frac{sin\alpha^2}{\alpha}) = 0$ dır.

ii) için x=-t değişken dönüşümü alınır.

iii) $n>1$ *için* $\lim\limits_{\beta\to+\infty}(\frac{sin\beta^2}{\beta^n}) + \lim_{\alpha\to 0^+}(\frac{sin\alpha^2}{\alpha^n}) = +\infty$ dır. Yani (26) integrali ıraksak bir limit içerir. iv) için x=-t değişken dönüşümü alınır. Eğer (24) veya (25) de x^2= t değişken dönüşümü yapılırsa, ayrıca (24) ve (25) formülleri birlikte ele alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç II:

a) $\int_0^\infty \frac{sinx}{x^{\frac{3}{2}}}dx = 2.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (28)

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{sinx^2}{x^2}dx = 2.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (29)

dır.

Teorem 8. Aşağıdaki integrallerin tümü ıraksaktır.

İ) $\int_0^\infty \frac{cosx^2}{x^{n+1}}dx \quad (n \geq 1)$ (30)

ii) $\int_{-\infty}^0 \frac{cosx^2}{x^{n+1}}dx \quad (n \geq 1)$ (31)

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx^2}{x^{n+1}}dx \quad (n \geq 1)$ (32)

İspat:

n=1 için ispatları yapalım.

i) O zaman (20) formülünde n=1 alınırsa,

$\int_0^\infty \frac{cosx^2}{x^2}dx = -2\int_0^\infty sinx^2dx - \lim_{\beta\to+\infty}(\frac{cos\beta^2}{\beta}) + \lim_{\alpha\to 0^+}(\frac{cos\alpha^2}{\alpha})$ olur.

Öte yandan, $\int_0^\infty sinx^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ [5,8] *ve* $-\lim\limits_{\beta\to+\infty}(\frac{cos\beta^2}{\beta}) + \lim_{\alpha\to 0^+}(\frac{cos\alpha^2}{\alpha}) = +\infty$.

ii) için x=-t değişken dönüşümü alınır.

iii) için $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx^2}{x^2}dx$=$-2\int_0^{\infty}sinx^2dx-\lim_{\beta\to+\infty}(\frac{cos\beta^2}{\beta})+\lim_{\alpha\to0^+}(\frac{cos\alpha^2}{\alpha})-2\int_{-\infty}^{0}sinx^2dx-\lim_{\beta\to-\infty}(\frac{cos\beta^2}{\beta})-\lim_{\alpha\to0^-}(\frac{cos\alpha^2}{\alpha})$ dir ve bu da ıraksak bir ifadedir. n>1 için benzer ispatı yaparız.

Teorem 9.

$k>0$ yeterince büyük bir reel sayı olsun. O zaman,

i) $\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+k.sin\frac{1}{k^2}$ (33)

ii) $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+k.sin\frac{1}{k^2}$. (34)

dır.

İspat:

i) $\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx$=$2\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}cosx^2dx-\lim_{\beta\to+\infty}(\frac{sin\beta^2}{\beta})+k.sin\frac{1}{k^2}$ dir.

Öte yandan $\int_0^{+\infty}cosx^2\cong\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}cosx^2dx$ alınabilir ve k>0 reel sayısı ne kadar çok büyük olursa yaklaşıklık o kadar iyidir ki k $\to+\infty$ için eşitlik elde edilir. ii)için x=-t değişken dönüşümü alınır.

Uygulama:

k=100, k=1000 ve k=10000 için sırasıyla,

a) $\int_{\frac{1}{100}}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+100.\sin\frac{1}{100^2}$ $\int_{\frac{1}{1000}}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+1000.sin\frac{1}{1000^2}$ **ve** $\int_{\frac{1}{10000}}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+10000.sin\frac{1}{10000^2}$ olur.

b) $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{100}}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+100.\sin\frac{1}{100^2}$, $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{1000}}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}+1000.\sin\frac{1}{1000^2}$ **ve** $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{10000}}\frac{sinx^2}{x^2}dx\cong\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $10000.\sin\frac{1}{10000^2}$ olur.

Teorem 10. Aşağıdaki integrallerin tümü ıraksaktır.

i) $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x^{n+1}}$ **(n>1)** (35)

ii) $\int_{-\infty}^{0}\frac{sinx}{x^{n+1}}$ **(n>1)** (36)

iii) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{n+1}}dx$ **(n>1)** (37)

İspat:

i) (15) formülünde n=2 alarak ispatı yapalım,

$\int\frac{sinx}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{sinx}{x}dx-\frac{sinx}{2x^2}-\frac{1}{2}\frac{cosx}{x}$ +C elde edilir.

Bunu (0, ∞) aralığında integre etmek isteyelim;

$\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ [5, 7 ve 8] olduğu için

$\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x^3}dx=-\frac{\pi}{4}-\lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{sin\beta}{2\beta^2}+\frac{1}{2}\frac{cos\beta}{\beta}\right]+\lim_{\alpha\to0^+}\left[\frac{sin\alpha}{2\alpha^2}+\frac{cos\alpha}{2\alpha}\right]$ olur. İlk limitin sonucu açık şekilde 0 dır. Şimdi ikinci limitin değerini araştıralım,

$\lim_{\alpha\to0^+}\left[\frac{sin\alpha}{2\alpha^2}+\frac{cos\alpha}{2\alpha}\right]=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to0^+}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{cos\alpha}{\alpha}\right]=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to0^+}\frac{1+cos\alpha}{\alpha}$ =+∞ bulunur.

ii) x=-t değişken dönüşümü ele alınır.

iii) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{n+1}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{sinx}{x^{n+1}}+\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x^{n+1}}$ olduğu dikkate alınır. (n>2) için her bir improper integral ıraksak integral içerir.

Teorem 11.

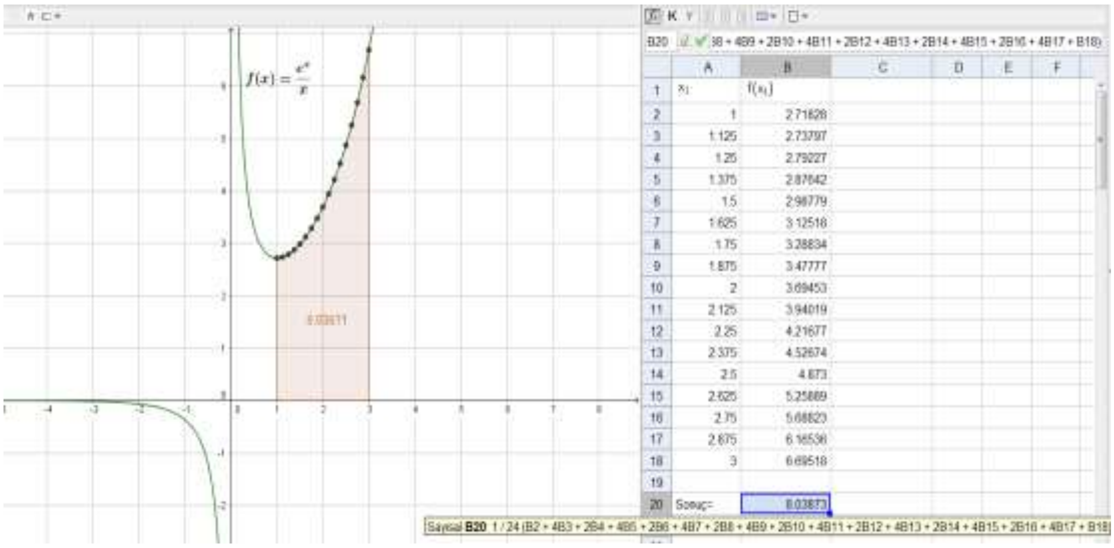
$a\neq b>0$ olmak üzere, $\int_0^{\infty}\frac{ae^{-bx}-be^{-ax}}{x^2}dx$ integrali ıraksaktır.

İspat:

(2) formülünden $-\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}}{x^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}}{x}$ dx $+\frac{1}{a}(\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-aR}}{R}+\lim_{r\to0^+}\frac{e^{-ar}}{r})$ ve $\frac{1}{b}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}}{x^2}dx=-\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}}{x}$dx $-\frac{1}{b}(\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-bR}}{R}+\lim_{r\to0^+}\frac{e^{-br}}{r})$ yazarız. Bu iki eşitlikten,

$\int_0^{\infty}\frac{ae^{-bx}-be^{-ax}}{x^2}dx=ba\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx+\lim(_{R\to\infty}b\frac{e^{-aR}}{R}-a\frac{e^{-bR}}{R}+\lim(_{r\to0^+}b\frac{e^{-ar}}{r}-a\frac{e^{-br}}{r})$ bulunur.

Öte yandan, $ba\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = abln\frac{b}{a}$ [3] dır. Fakat $\lim(_{r\to 0^+} b\frac{e^{-ar}}{r} - a\frac{e^{-br}}{r})$ limiti $a = b$ için vardır. Hipotezden $a \neq b$ dir. Böylece $\int_0^\infty \frac{ae^{-bx}-be^{-ax}}{x^2}dx$ integrali ıraksaktır. Şimdi, kesim 4 de elde ettiğimiz bazı formüllerin özel durumlarını alarak yaklaşık hesaplamalarını Simpson yöntemi ile karşılaştıralım:



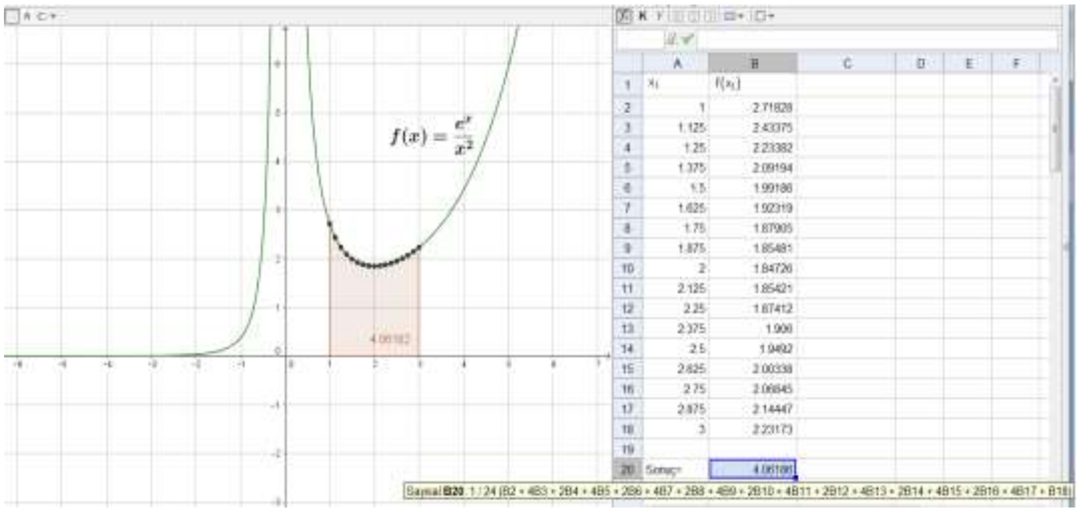
Şekil 1. I_2 integralinin hesabı
(Figure 1. I_2 account of the integral)

Örnek 1: $I_1 = \int_1^3 \frac{e^x}{x^2}dx$ integralini hesaplamak için önce $I_2 = \int_1^3 \frac{e^x}{x}dx$ integralini Simpson yöntemi ile hesaplayalım.

Bunun için matematik yazılımı olan Geogebrada [1 ve 3] aralığını 16'ya bölerek yaklaşık olarak hesaplayalım. I_2 integralinin Simpson yöntemi ile yaklaşık değeri 8.03873 olup yazılım yardımıyla bu integralin sonucu da 8.03871'dir. Şimdi ispatladığımız (5) formülü ile I_1 değerini hesaplayalım. Bunun için (5) formülünde n=1 aldığımızda $I_1 = \int_1^3 \frac{e^x}{x^2}dx = \frac{1}{1!}\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx - \left[\frac{e^x}{1!}\left(\frac{0!}{x}\right)\right]_1^3$ olur ve buradan $I_1 = 8.03873 - \frac{e^3}{3} + e = 4.06183$ bulunur.

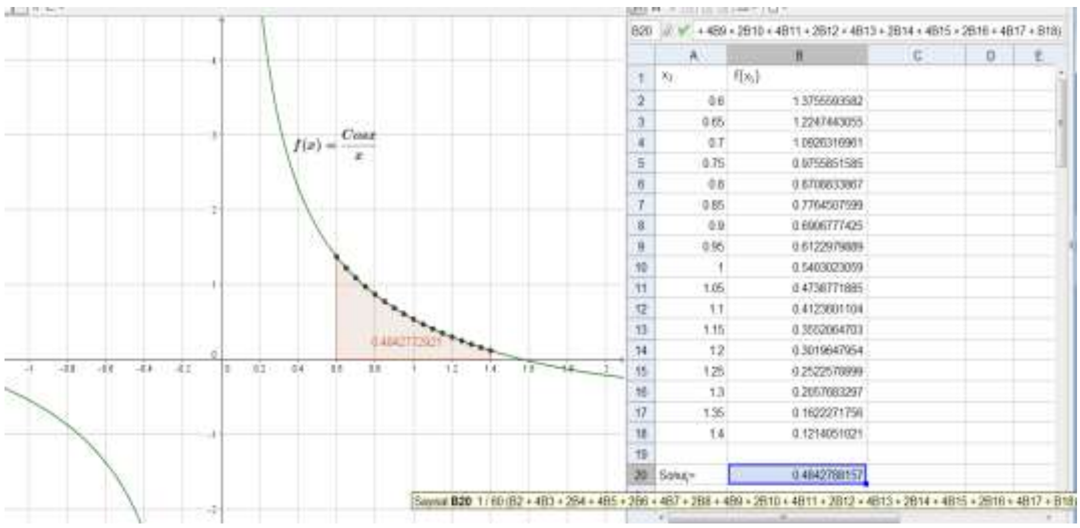
Şimdi I_1 integralini Simpson yöntemi ile hesaplayalım. Bunun için I_1 integralini [1 ve 3] aralığını 16 eş parçaya bölerek Geogebra yazılımında Şekil 2'de görüldüğü gibi hesaplayabiliriz:

I_1 integralinin Simpson yöntemi ile hesabı Şekil 2'den de görüldüğü gibi 4.06186 olarak bulunmuştur. Yazılımda bu integralin değeri 4.06182'dir. (5) formülü aracılığı ile 4.06183 olarak bulmuştuk ki bu değer daha iyi yaklaşık bir değerdir.



Şekil 2. I_1 integralinin hesabı
(Figure 2. I_1 account of the integral)

Örnek 2: $I_3 = \int_{0.6}^{1.4} \frac{Cosx}{x^3} dx$ integralini her iki yolla hesaplayalım: (9) formülü ile verilen integrali hesaplamak için önce $I_4 = \int_{0.6}^{1.4} \frac{Cosx}{x} dx$ integralinin yaklaşık değerini Simpson yöntemi ile bulalım. Bunun için yine Geogebra yazılımını kullanalım.

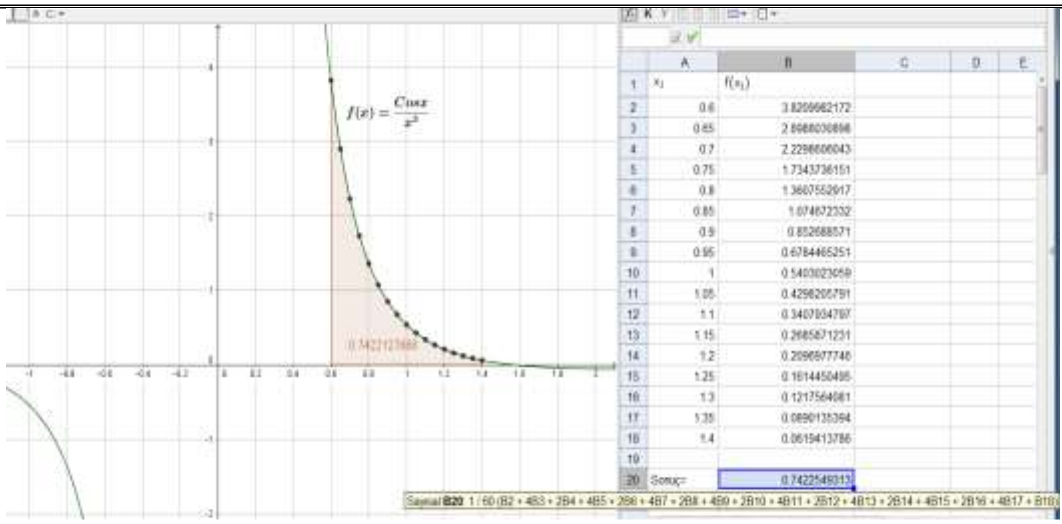


Şekil 3. I_4 integralinin hesabı
(Figure 3. I_4 account of the integral)

Şekil 3'den de görüldüğü gibi I_4 integralinin Simpson yöntemi ile [0.6, 1.4] aralığını 16 eş parçaya bölerek hesapladığımızda yaklaşık olarak 0.4842788157 br^2 olarak bulduk. I_3 integralinin (9) formülü ile hesaplanacağını ispatladık. Buna göre n=2 için (9) formülünden

$$I_3 = \int_{0.6}^{1.4} \frac{cosx}{x^3} dx = 0.4842788157 + \left[-\frac{cosx}{2x^2} + \frac{sinx}{2x}\right]_{0.6}^{1.4} = 0.7422120299$$

bulunur. Geogebra yardımıyla aynı integral Simpson yöntemi ile yapıldığında yaklaşık değeri Şekil 4'te görüldüğü gibidir.



Şekil 4. I_3 integralinin hesabı
Figure 4. I_3 account of the integral)

Şekil 4'den de görüldüğü gibi yazılımda I_3 integralinin hesabı 0.7422127888 olup Simpson yöntemi ile hesabı sonucu 0.7422549313 olarak bulunmuştur. Görüldüğü gibi (9) formülü ile bulunan 0.7422120299 sonucu daha iyi bir sonuçtur.

Örnek 3: $I_5 = \int_2^4 \frac{1}{(lnx)^3} dx$ integralinin sonuçlarını benzer şekilde Geogebra yazılımı yardımıyla karşılaştıralım. Yazılımda bu integralin sonucu 2.001895148 olarak elde edilir. Simpson yöntemi ile [2,4] aralığını 16 eş parçaya bölerek elde ettiğimiz sonuç 2.0020207032'dir. (7) formülünü kullanarak elde ettiğimiz sonuç ise 2.0018990376'dır. Buradan (7) formülünün daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Örnek 4: $I_6 = \int_{0.2}^{1.2} \frac{sin2x}{(x+1)^4} dx$ integralinin değerlerini benzer yollarla bulup karşılaştıralım. Geogebra yazılımından bu integralin sonucu 0.1190628095 olarak bulunmuştur. Yine bu integralin sonucu [0.2, 1.2] aralığını 16 eş parçaya bölerek Simpson yöntemini uyguladığımızda sonucu 0.1190604718 olarak buluruz. (16) formülünde a=2, b=1 ve n=3 olarak alıp uyguladığımızda integralin sonucunu 0.1190634388 olarak buluruz. Bu sonucun daha yaklaşık bir değer olduğu görülmektedir.

6. BİR EK: (HEMEN HEMEN CAUCHY ESAS DEĞERLERİ)
(AN APPROPRIATE: (QUANTITY OF CAUCHY IMMEDIATELY))

Bu kesimde, diğer kesimlerde verilen belirli integrallerin 1. Tip ve 2. Tip "Hemen Hemen Cauchy Esas Değerleri" tanımlanacak ve bazı integrallerin bu değerleri hesaplanacaktır.

Tanım 1: (**1. Tip Hemen Hemen Cauchy Esas Değerleri** (h.h.V.P$_1$))

$\int f(x)\, dx$ integrali sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen bir integral ve A(x) ve B(x) iki fonksiyon olmak üzere, $\int A(x)\, dx = \int f(x) dx$+B(x) bir indirgeme formülü olsun.

a) Eğer, $V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \lim_{R\to\infty}(B(R) - B(-R))$ varsa, $\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, dx$ improper integralinin 1.Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_1 \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, dx = \mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \lim_{R\to\infty}(B(R) - B(-R))$.

Aşağıdaki tanımları yapmış olduğumuzu varsayalım;

b) Eğer, $V.P.\int_0^{\infty} f(x)\, dx + \lim_{r\to o^+}(\lim_{R\to\infty}(B(R) - B(r)$ varsa, $\int_0^{\infty} A(x)\, dx$ improper integralinin 1. Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_1 \int_0^{\infty} A(x)\, dx = \mathrm{V.P.}\int_0^{\infty} f(x)\, dx + \lim_{r\to 0^+}(\lim_{R\to\infty}(B(R) - B(r))$.

c) Eğer, $V.P.\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$+$\mathrm{Rim}_{R\to\infty}(\lim_{r\to 0^-}(B(r)-B(-R)$ varsa, $\int_{-\infty}^{0} A(x)\,dx$ improper integralinin 1.Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{0} A(x)\,dx$= $V.P.\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$+$\mathrm{Rim}_{R\to\infty}(\lim_{r\to 0^-}(B(r)-B(R)$ yazılır.

Bu iki tanımın sırasıyla $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ ve $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ integrallerinin Cauchy esas değerleri ile çakıştığı görülür.

Tanım 2: (**2. Tip Hemen Hemen Cauchy Esas Değerleri** (h.h.V.P $_2$)) $\int f(x)\,dx$ integrali sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen bir integral ve A(x) ve B(x) iki fonksiyon olmak üzere, $\int A(x)\,dx$=$\int f(x)dx$+B(x) olsun.

a) Eğer, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ + $\lim_{R\to\infty}(B(R)-B(R))$ varsa, $\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,dx$ improper integralinin 2. Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,dx$= $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$+$\lim_{R\to\infty}(B(R)-B(-R))$.

Aşağıdaki tanımları yapmış olduğumuzu varsayalım;

b) Eğer, $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$+$\lim_{r\to o^+}(\lim_{R\to\infty}(B(R)-B(r)$ varsa, $\int_{0}^{\infty} A(x)\,dx$ improper integralinin 2. Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_2\int_{0}^{\infty} A(x)\,dx$=$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$+$\lim_{r\to 0^+}(\lim_{R\to\infty}(B(R)-B(r))$.

c) Eğer, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$+$\mathrm{Rim}_{r\to\infty}(\lim_{r\to 0^-}(B(r)-B(R)$ varsa, $\int_{-\infty}^{0} A(x)\,dx$ improper integralinin 2. Tip hemen hemen Cauchy esas değeri vardır denir ve $h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{0} A(x)\,dx$=$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$+$\mathrm{Rim}_{R\to\infty}(\lim_{r\to 0^-}(B(r)-B(-R)$ yazılır.

Bu iki tanımın da sırasıyla $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ ve $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ integrallerinin gerçek değerleri ile çakıştığı görülür.

Teorem 12.

$n\geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere,

i) $\boldsymbol{h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{2n+1}}dx=-\frac{\pi}{(2n)!}}$. (38)

ii) $\boldsymbol{h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx}{x^{2n+1}}dx=0}$. (39)

iii) $\boldsymbol{h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^{2n}}dx=\ (-2)^n.\frac{\sqrt{\pi}}{1.3.5.7\ldots(2n-1)}}$. (40)

dir.

İspat:

İspatları tüme varım yöntemiyle yapıyoruz.

i) n=1 için; (15) formülü de göz önüne alınırsa, $h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^3}dx$=$-V.P.$ $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x}dx-\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{sinR}{R^2}+\frac{cosR}{R}-(\frac{\sin(-R)}{-R}+\frac{\cos(-R}{-R})\right)$ olur. Öte yandan, $V.P.$ $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x}dx$ $=\frac{\pi}{2}$ [1, 2, 5 VE 7] ve $\lim_{R\to\infty}\left(\frac{sinR}{R^2}+\frac{cosR}{R}-(\frac{\sin(-R)}{-R}+\frac{\cos(-R}{-R})\right)$=0. Diğer bir ifadeyle,

$$h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^3}dx=-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2!} \quad . \tag{41}$$

n=2 için ; (15) formülü de göz önüne alınırsa,

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^5}dx$ $=-\frac{1}{4.3}.(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x}dx-\frac{1}{2}(\frac{sinx}{x^2}+\frac{cosx}{x})-\frac{1}{4}\frac{sinx}{x^4}-\frac{1}{4.3}\frac{cosx}{x^3})$ olur. Buradan da,

$$h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^5}dx=-\frac{\pi}{2.3.4}=-\frac{\pi}{4!} \quad . \tag{42}$$

Şimdi (38) formülünün doğruluğunu kabul edelim. O zaman, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{2n+3}}dx$ $=-\frac{1}{(2n+2).(2n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{2n+1}}dx-(\frac{1}{2n+2}\frac{sinx}{x^{2n+2+}}+\frac{1}{(2n+2).(2n+1)}\frac{cosx}{x^{2n+1}})$ olduğu için, $h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{2n+3}}dx$ $=-\ \frac{1}{(2n+2).(2n+1)}.\frac{\pi}{2n!}-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2n+2}\frac{sinR}{R^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+2).(2n+1)}\frac{cosR}{R^{2n+1}}-\frac{1}{2n+2}\frac{\sin(-R}{(-R)^{2n+1}}-\frac{1}{(2n+2).(2n+1)}\frac{\cos(-R}{(-R)^{2n+1}}\right)$ olur. Burada ki limit 0 dır. Yani,

$$h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x^{2n+3}}dx=\ -\frac{\pi}{2n!}\ .\frac{1}{(2n+1).(2n+2)}=-\frac{\pi}{(2n+2)!} \tag{43}$$

bulunur.

ii) nin ispatı için (9) Formülü göz önüne alınır ve aynı ispat yolunu izleriz. Bunun ispatını sadece n=1 için yapalım; (9) Formülü de göz önüne alınırsa, $\mathrm{h.h.V.P_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx}{x^3}dx$=$-V.P.\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx}{x}dx+\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{cosR}{R^2}+\frac{sinR}{R}-\frac{\cos(-R}{(-R)^2}-\frac{\sin(-R)}{-R}\right)$ olur. Öte yandan, $V.P.\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx}{x}dx$=0 [2, 5 ve 7] ve $\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{cosR}{R^2}+\frac{sinR}{R}-\frac{\cos(-R}{(-R)^2}-\frac{\sin(-R)}{-R}\right)$ =0 dır. Diğer bir ifadeyle,

$$h.h.V.P_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cosx}{x^3}dx=0. \tag{44}$$

iii) nin ispatı için ise (19) Formülü göz önüne alınır. Aynı ispat yolu izlenir. Var sayalım ki (40) Formülü doğrudur. O zaman,

$$h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+2}}dx=-2.\left(\frac{1}{2n+1}h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^{2n}}dx\right)-\frac{1}{2n+1}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-R^2}}{R^{2n+1}}-\frac{e^{-(-R)^2}}{(-R)^{2n+1}}\right)=$$

$(-2)^n.(-2).\frac{1}{2n+1}.\frac{\sqrt{\pi}}{1.3.5.7...(2n-1)}$ +0 olur. Diğer bir yazılışla,

$$\mathrm{h.h.V.P_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+2}}\mathrm{dx}=(-2)^{n+1}.\frac{\sqrt{\pi}}{1.3.5.7...(2n-1).(2n+1)} \tag{45}$$

Sonuç III:

a) $\mathrm{h.h.V.P_2}\int_0^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}\mathrm{dx}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

b) $\mathrm{h.h.V.P_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}\mathrm{dx}=2.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ dir.

İspat:

a) $h.h.V.P_2\int_0^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx$=$2\int_0^{\infty}cosx^2dx-\lim_{R\to+\infty}(\frac{sinR^2}{R}$+$\lim_{r\to 0^+}\frac{sinr^2}{r})$ =$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ bulunur.

Öte yandan, Teorem 7 i) den $\int_0^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx$ nin gerçek değeri de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ dir.

b) $h.h.V.P_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx^2}{x^2}dx$= $2\int_{-\infty}^{\infty}cosx^2dx-\lim_{R\to+\infty}(\frac{sinR^2}{R}$+$\frac{\sin(-R)}{-R})$ =$2.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ bulunur.

NOT: h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$ tanımları tesadüfi olarak ortaya çıkmıştır. Bazı improper integralleri literatürdeki ilgili kavramlarıyla hesap etmek isterken bir hata yapılmıştır. Bu hatalı hesaplamalar çok düzgün bir netice vermiştir. Bu düzgün neticeler h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$ tanımlarını yapmaya yöneltmiştir. Bunun için bu makalenin h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$'i içeren 6. Kısmı "**BİR EK**" olarak adlandırılmıştır.

7. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER (CONCLUSION, DISCUSSION AND RECOMMENDATIONS)

(1), (2), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (15), (16), (17), (18), (20), (21), (22) ve (23) İndirgeme formülleri bir başka belirsiz integral bulma yöntemiyle elde edilebilir. Biz bu formülleri, tahmin yürüterek ve belirsiz integral tanımını kullanarak elde ettik. Her bir indirgeme formüllerinin doğrulanması herbirinin iki tarafının türevi alınarak görülebilir. Örneğin ispatsız olarak verdiğimiz (20)-----(23) formüllerinden (23) formülünün doğrulanmasını yapalım; eşitliğin iki yanının türevini alalım,

$$\frac{\mathrm{sina(x+b)^2}}{\mathrm{(x+b)^{n+1}}}=\frac{2a}{n}.\frac{cosa(x+b)^2}{(x+b)^{n-1}}-\left(\frac{\mathrm{2an(x+b).cosa(x+b)^2-n^2(x+b)^{n-1}.sina(x+b)^2}}{\mathrm{n^2(x+b)^{2n}}}\right)=\frac{sina(x+b)^2}{(x+b)^{n+1}}\ .$$

Bir improper integralin Cauchy Esas Değeri (V.P.) ve gerçek değeri tanımları ele alındığında, bu integralin a)h.h.V.P$_1$ ve a)h.h.V.P$_2$ tanımlarının bu tanımlarından farklı tanımlar olduğu görülür. Eğer Cauchy Esas Değeri (V.P.) ve gerçek değeri birbirine eşitse, h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$ değerleri de birbirine eşittir. h.h.V.P$_1$ ve h.h.V.P$_2$ tanımlarında geçen $\int A(x)dx$ integrali de, $\int A(x)\,dx$=$\int f(x)dx$+B(x) koşulundan dolayı sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen bir integraldir. Öte yandan, $\int A(x)\,dx$-$\int f(x)dx$=B(x) dir. Tüm indirgeme formülleri tekrar ele alınırsa, B(x)'in sonlu sayıda elemanter fonksiyonla belirtilmiş olduğu görülebilir. Bu bağlamda (5) Formülünü göz önüne alırsak $\int\frac{e^x}{x^{n+1}}dx$ integralinin, sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen $\frac{1}{n!}\int\frac{e^x}{x}dx$ integrali ile $B(x)=-\frac{e^x}{n!}\left[\frac{0!}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\cdots+\frac{(k-1)!}{x^k}+\cdots+\frac{(n-1)!}{x^n}\right]$ +C fonksiyonunun (sonlu sayıda elemanter fonksiyonla belirtilmiş) toplamından oluştuğu görülür. Bu tarz açılımlar (8), (10), (15), (16), (18), (20), (21), (22) ve (23) indirgeme formülleri için de yapılabilir.

Sonlu sayıda elemanter fonksiyonla ifade edilemeyen $\int\frac{e^x}{x}dx$, $\int\frac{cosx}{x}dx$, $\int\frac{sinx}{x}dx$, $\int e^{x^2}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int\frac{1}{lnx}dx$, $\int\frac{x}{lnx}dx$ … gibi integraller belli bir aralıkta Taylor serisi yardımıyla yaklaşık olarak çözülebilir [3 ve 9]. O zaman, bu yalın integrallerle ifade edilebilen (1), (2), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (15), (16), (17), (18), (20), (21), (22) ve (23) indirgeme Formüllerinde eşitliğin sol tarafında bulunan genel integraller, bu indirgeme formülleri sayesinde daha iyi yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Örneğin, $\int_2^3\frac{x}{lnx}dx\cong\alpha$ olsun, (8) Formülünü kullanarak,

$$\int_2^3\frac{x}{(lnx)^{n+1}}dx\cong\frac{2^{n+1}}{n!}.\alpha-\frac{3^2}{n!}\left(\frac{2^{n-1}}{ln3}+\frac{2^{n-2}}{(ln3)^2}+2\frac{2^{n-3}}{(ln3)^3}+\cdots+(n-1)!\frac{2^{n-1}}{(ln3)^n}\right)+\frac{2^2}{n!}\left(\frac{2^{n-1}}{ln2}+\frac{2^{n-2}}{(ln2)^2}+2\frac{2^{n-3}}{(ln2)^3}+\cdots+(n-1)!\frac{2^{n-1}}{(ln2)^n}\right)$$

bulunur.

Benzer şekilde, $\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\cong\beta$ ise, (5) Formülünden,

$$\int_1^2\frac{e^x}{x^{n+1}}dx\cong\frac{\beta}{n!}-\frac{e^2}{n!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{(n-1)!}{2^n}\right)+\frac{e}{n!}(0!+1!+2!+\cdots+(n-1)!)$$

bulunur.

(18) Formülü yardımıyla $\exists\gamma,\delta\epsilon\mathbb{R}^+$için, $\left|\int_1^\infty\frac{e^{-x^2}}{x^{2n}}dx\right|\le\gamma\sqrt{\pi}+\delta e^{-1}$ olduğu gösterilebilir, yani $\int_1^\infty\frac{e^{-x^2}}{x^{2n}}dx$ improper integrali yakınsaktır. Aynı şekilde, Bu İndirgeme Formülleri yardımıyla, $\int_1^\infty A(x)dx$ improper integrallerinin yakınsak ya da ıraksak oldukları araştırılabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Hauser, A.A.J., (1971). Complex Variables With Physical Applications, Simon and Schuster, New York.
2. Sveshnicov, A. and Tikonov, A., (1982). The Theory of Functions of A Complex Variable, Mır Publishers-Moscov.
3. Demidovich, B., (1982). Problems in Mathematical Analysis, Mır Publishers, Moscov.
4. Pişkunov, N., (1971). Differential and Integral Calculus II, Mır Publishers, Moskov.
5. Churchill, R.V. and Brown, J.W., (1990). Complex Variables and Applications, Mc Graw-Hİll Publishing company, Singapore.
6. Laval, P.B., (2005). Improper Integrals. Kennesaw State Uviversity.
7. Başkan, T., (1996). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, II. Baskı, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
8. Desphande, J.V., (1986). Complex Analysis, Tata Mc Graw-Hİll Publishing company, New Delhi.
9. Terziler, M. and Öner, T., (2012). Kalkülüs Eksiksiz Bir Ders, Cilt I, Palme Yayıncılık, Ankara.
10. Çelik, A., (2016). A Note on The Growth of Polynomials, Physical Sciences (NWSA), Cilt:11, Sayı:2, ss:10-16, Doi:10.12739/NWSA.2016.11.2.3A0076.
11. Hildebrand, F.B., (1974). Introduction to Numerical Analysis, Second edition, Mc Graw-Hİll Publishing company Ltd:New York.