İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 23(45), Bahar 2024, 14-26.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

İstanbul Commerce University Journal of Science

http://dergipark.org.tr/ticaretfbd

Araştırma Makalesi / Research Article

GREINER OPERATÖRÜYLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ HIZLI DİFÜZYON DENKLEMİ VE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ*

FAST DIFFUSION EQUATIONS AND SOME INTEGRAL INEQUALITIES RELATED TO GREINER OPERATOR

Ahmet Uğur UTKU[1] **Abdullah YENER**[2]

https://doi.org/10.55071/ticaretfbd.1391212

Sorumlu Yazar / Corresponding Author
augur.utku@ticaret.edu.tr

Geliş Tarihi / Received
15.11.2023

Kabul Tarihi / Accepted
03.04.2024

Öz

Bu makalenin öncelikli amacı, Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carathéodory uzayındaki düzgün sınırlara sahip sınırlı bir Ω bölgesinde,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)u^m, & \Omega \times (0,T), \\ u(\omega,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\omega,0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin pozitif çözümünün yokluğunun araştırılmasıdır. Burada, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$'dır. Bu makalenin diğer bir amacı ise Greiner operatörü ile ilişkilendirilmiş radyal olmayan ağırlıklı bazı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmektir.

Anahtar Kelimeler: Greiner operatör, Hardy tipi eşitsizlikler, hızlı difüzyon denklemi, pozitif çözümün yokluğu.

Abstract

The primary goal of this article is to investigate nonexistence of positive solutions to the following nonlinear parabolic problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)u^m & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(\omega,t) = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\omega,0) = u_0(\omega) \geq 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

Here, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ and Ω is a bounded domain with smooth boundary in Carnot-Carathéodory space related with the Greiner vector fields. Another aim of this article is to obtain some Hardy type inequalities with non-radial weights related to Greiner operator.

Keywords: Fast diffusion equation, Greiner operator, Hardy type inequalities, nonexistence of positive solutions.

Bu yayın Ahmet Uğur UTKU isimli öğrencinin İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Programı Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.

[1]İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul, Türkiye.
augur.utku@ticaret.edu.tr, Orcid.org/0000-0002-5684-2309.

[2]İstanbul Ticaret Üniversitesi, İnsan ve Toplum Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye.
ayener@ticaret.edu.tr, Orcid.org/0000-0002-9349-5166.

1. GİRİŞ

Bu makalede öncelikle, Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carathéodory uzayındaki düzgün sınırlara sahip sınırlı bir Ω bölgesinde,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)u^m, & \Omega \times (0,T), \\ u(\omega,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\omega,0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases} \tag{1}$$

şeklindeki doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin pozitif çözümünün hangi şartlar altında mevcut olmadığı incelenmiştir. Burada, $0 < m < 1$, $V(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere, $\nabla_k = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ Greiner gradyan vektörüdür.

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l} \qquad \text{ve} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2kx_j|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}$$

operatörleri ise, $k \geq 1$, $l \in \mathbb{R}$ ve $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, Greiner vektör alanlarını temsil etmektedir. Bu uzayda bir nokta $\omega = (z,l) = (x,y,l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilir ve $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ olarak verilir.

Bu çalışmada ayrıca, Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carethéodory uzayında, radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip bazı L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler şu şekildedir: $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $p > 1$ olsun. Bu durumda,

$$\int_\Omega \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p-1) \int_\Omega \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği $\Omega = \{\omega = (x,y,l) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 > 1\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken;

$$\int_\Omega e^{-px_1} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_\Omega e^{-px_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği de $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere geçerlidir.

(1) problemi özel hallerde birçok önemli problemi içinde barındırır. Şimdi, çalışmamıza motivasyon kaynağı olan, bu önemli problemlerin bazılarından bahsedilecektir. Orijinde tekilliğe sahip, pozitif $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ potansiyelli

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

şeklindeki ısı denklemi verilsin. H. Brézis ve J. L. Lions "(2) ısı probleminde bir çözümün mevcut olmaması için $V(x)$ potansiyeli ne kadar tekil olmalıdır? sorusunu ortaya atmıştır. Baras ve Goldstein (1984), bu soruya bir cevap niteliğinde, aşağıda ifade edilen, ters kare potansiyeli içeren doğrusal ısı problemini düzgün sınırlara sahip sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde ele almıştır.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \dfrac{c}{|x|^2} u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Bu problemde, eğer $c > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ ise, $u \equiv 0$ haricinde, pozitif çözüm yoktur. Pozitif çözümün varlığı ise ancak $c \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ olması ile mümkündür. Buradaki $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti L^2 Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir. Öklid uzayındaki L^2 Hardy eşitsizliği şu şekilde ifade edilir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(x)|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2} dx, \qquad n \geq 3, \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ayrıca, $n = 1, 2$ olduğunda, eşitsizlik her $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ için geçerlidir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde Hardy tipi eşitsizliklerin rolü oldukça kritiktir.

(3) problemi birçok çalışmaya ilham kaynağı olmuştur. Örneğin, Cabre ve Martel (1999), (3) probleminin pozitif genel tekil potansiyelli halini incelemiştir. Diğer yandan, Azorero ve Alonso (1998), (3) problemini sınırlı bölgeler için aşağıdaki doğrusal olmayan p-Laplace problemine genişletmiştir.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \dfrac{\lambda}{|x|^p} u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $0 \in \Omega, \lambda > 0$ ve $1 < p < n$'dir. Doğrusal olmayan bu problemin çözümünün varlığı p kuvvetinin aralığına ve L^p Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabit olan $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ değerine bağlıdır. L^p Hardy eşitsizliği, $1 \leq p < n$ ise $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $p > n$ ise $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ için geçerlidir ve şu şekilde ifade edilir (Shen, 1980):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(x)|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^p} dx.$$

Daha sonra, Goldstein ve Kömbe (2003) yılındaki çalışmalarında, Cabre ve Martel'in doğrusal problemler için uyguladığı tekniğin doğrusal olmayan problemler için de uygulanabilir olduğunu aşağıdaki problem üzerinde göstermiştir.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta\,(u^m) + V(x)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Burada $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$'de düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir. Bunların yanında, Goldstein ve ark. (2005), (4) probleminin bir genişlemesi olan, tekil potansiyelli ve kritik üsse sahip

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\left(|x|^{-2\lambda} \nabla u^m\right) + V(x)u^m, & \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin pozitif çözümünün yokluğunu araştırmışlardır.

Öklid uzayında yapılan tüm bu çalışmalar ışığında, Kömbe (2006) yılındaki yaptığı çalışmayla (4) lineer olmayan hızlı difüzyon problemini Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carathéodory uzayına taşımıştır. Problem açıkça şu şekilde verilir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k(u^m) + V(\omega)u^m\,, & \Omega \times (0,T), \\ u(\omega,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\omega,0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada, Ω, $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\Delta_k = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$ Greiner alt-Laplace operatörüdür.

Bu makale dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konuyla ilgili literatür çalışması verilmiştir. İkinci bölümde, Greiner operatörü ile ilgili temel tanım ve kavramlar ifade edilmiştir. Üçüncü bölüm, (1) doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin genelleşmiş pozitif yerel çözümlerinin yokluğu ile ilgili teoremin ispatına ayrılmıştır. Son bölümde ise Δ_k operatörü ile ilişkili radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, Greiner operatörü ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Yener, 2018; Kömbe, 2006) referanslarına bakınız.

Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carathéodory uzayında bir nokta, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\omega = (z,l) = (x,y,l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilir. Greiner vektör alanları ise şu şekilde tanımlanır (Greiner, 1979):

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}, \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2kx_j|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}. \tag{5}$$

Burada, $j = 1,2,\ldots,n,\ k \geq 1,\ l \in \mathbb{R}$ ve $|z| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ olarak verilir. (5) vektör alanları herhangi $k \in \mathbb{N}$ değeri için Hörmander koşulunu sağlar (Hörmander, 1967). Greiner vektör alanlarına ilişkilendirilmiş gradyan vektörü ve Greiner alt-Laplace operatörü, sırasıyla, şu şekilde ifade edilir:

$$\nabla_k = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \tag{6}$$

ve

$$\Delta_k = \nabla_k \cdot \nabla_k = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2). \tag{7}$$

(6) gradyan operatörü $\mathbb{R}^{2n+1}$'deki her nokta için $2n$-boyutlu bir vektör alanı oluşturur. $k = 1$ durumunda Δ_k operatörü H^n Heisenberg grubu üzerinde tanımlı Δ_{H^n} Kohn-Laplace operatörüne indirgenir (Folland, 1973). (7) Greiner alt-Laplace operatörünün açıkça yazılmış haldeki ifadesi şu şekildedir:

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) + 4k^2 |z|^{2k-2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} + 4k|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Detaylı bilgi için (Beals ve ark., 1986; Greiner, 1979) çalışmaları incelenebilir.

$\mathbb{R}^{2n+1}$'deki bir ω noktasının orijine olan uzaklığı

$$\rho = \rho(\omega) = \rho(z, l) = (|z|^{4k} + l^2)^{\frac{1}{4k}}$$

olarak tanımlanır. ρ fonksiyonu, Δ_k Greiner alt-Laplace operatörünün orijindeki temel çözümüyle yakından ilişkilidir (Niu, ve ark., 2003). Δ_k operatörüyle ilişkilendirilmiş dilatasyon dönüşümü

$$\delta_\lambda(z, l) = (\lambda z, \lambda^{2k} l), \quad \lambda > 0$$

olarak verilir. Dilatasyon dönüşümü, $\mathbb{R}^{2n+1}$'deki bir cismin şeklini değiştirmeyecek biçimde daraltma ya da genişletme işini yapan dönüşümdür. Lebesgue ölçüsü için değişken dönüşümü formülü kullanılırsa

$$d\delta_\lambda(z, l) = \lambda^Q dzdl = \lambda^Q d\omega$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikte yer alan

$$Q \coloneqq 2n + 2k$$

sabitine $\mathbb{R}^{2n+1}$'in δ_λ dönüşümüne göre homojen boyutu denir. Öklid uzayında n sayısının üstlendiği rolü Greiner vektör alanlarıyla ilişkilendirilmiş Carnot-Carathéodory uzayında Q sayısı üstlenir.

Herhangi iki $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ noktası arasındaki uzaklığı veren d_{cc} Carnot-Carathéodory uzaklık fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$d_{cc}(\omega_1, \omega_2) = inf_\varphi \int_0^1 \langle \varphi'(t), \varphi'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Buradaki infimum değeri, $\varphi(0) = \omega_1, \ \varphi(1) = \omega_2$ ve

$$\varphi'(t) \in span\{X_1(\varphi(t)), \dots, X_n(\varphi(t)), Y_1(\varphi(t)), \dots, Y_n(\varphi(t))\}$$

şartlarını sağlayan tüm φ eğrileri üzerinden alınmıştır. Bu uzaklık fonksiyonu yardımı ile merkezi orijin, yarıçapı R olan Carnot-Carathéodory metrik yuvarı

$$B_R = \{\omega \in \mathbb{R}^{2n+1} : d_{cc}(\omega, 0) < R\}$$

şeklinde ifade edilir (Nagel ve ark., 1985).

3. GREINER VEKTÖR ALANLARINDA HIZLI DİFÜZYON DENKLEMİ

Bu bölümde, aşağıda ifade edilen Greiner vektör alanlarındaki doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin genelleşmiş pozitif yerel çözümleri ile ilgilenilecektir.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)u^m , & \Omega \times (0,T), \\ u(\omega,t) = 0 & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\omega,0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Burada, Ω, $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayında düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, N ise Ω bölgesinde Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme, $V(\omega)$ fonksiyonu ve pozitif $A(\omega)$ fonksiyonu $L^1_{loc}(\Omega\backslash N)$ sınıfından birer potansiyel fonksiyon ve $\frac{Q-2}{Q} \leq m < 1$'dir.

Genelleşmiş pozitif yerel çözüm kavramı şu şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1 (Kömbe, 2006). Aşağıdaki özellikleri sağlayan çözüme, N'nin dışında kalan, sürekli yerel pozitif çözüm denir.

(i) N, Ω bölgesinde Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme,
(ii) $u: [0,T) \to L^1(\Omega)$ fonksiyonu bazı $T > 0$ değerleri için sürekli,
(iii) $(\omega,t) \to u(\omega,t) \in C\big((\Omega\backslash N) \times (0,T)\big)$,
(iv) $(\Omega\backslash N) \times (0,T)$ bölgesi üzerinde $u(\omega,t) > 0$,
(v) $\lim_{t\to 0} u(.,t) = u_0$,
(vi) $\nabla_k u \in L^2_{loc}(\Omega\backslash N)$ ve u, (8) kısmi diferansiyel denkleminin genelleşmiş manadaki bir çözümü olsun.

Uyarı 3.1 N_0, $\Omega\backslash N$ bölgesinde kompakt bir alt küme ve $0 < t_1 < t_2 < T$ ise $(\omega,t) \in N_0 \times [t_1,t_2]$ olur ve bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için $u(\omega,t) \geq \varepsilon > 0$ ilişkisi sağlanır. Böylelikle, (iii) ve (iv) koşulları şu şekilde zayıflatılabilir:

(iii)' $u(\omega,t)$ pozitif ve $(\Omega\backslash N) \times (0,T)$ bölgesinde yerel sınırlı,
(iv)' $(\Omega\backslash N) \times (0,T)$ bölgesinde $\frac{1}{u(\omega,t)}$ yerel sınırlıdır.

Eğer u çözümü, (i), (ii), (iii)', (iv)', (v) ve (vi) maddelerindeki koşulları sağlıyorsa N'nin dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözüm olarak ifade edilir. Bu çözüm, N'nin dışında kalan sürekli yerel pozitif çözümden daha genel olup, eğer $N = \emptyset$ ise, genelleşmiş pozitif yerel çözüm olarak adlandırılır (Kömbe, 2006).

Biraz sonra verilecek olan teoremin ispatında gerekli olan ağırlıklı Sobolev tipi bir eşitsizlik ifade edilecektir.

Önerme 3.1 $\Omega, \mathbb{R}^{2n+1}$'de düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $1 < p < Q,\ A \in L^{\frac{Q}{p}}(\Omega)$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olsun. Herhangi $\varepsilon \in (0,1)$ sayısı için

$$\left|\int_\Omega A(\omega)|\phi|^p d\omega\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\int_\Omega |\nabla_k\phi|^p\, d\omega + S(\varepsilon)\int_\Omega |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir $S(\varepsilon)$ sabiti vardır (Kömbe, 2006).

Şimdi (8) doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin pozitif çözümünün yokluğu için elde edilen teorem ispatıyla birlikte verilecektir.

Teorem 3.1 $\Omega, \mathbb{R}^{2n+1}$'de düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, N, Ω'da Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme ve $Q = 2(n+k)$ olsun. $\frac{Q-2}{Q} \leq m < 1,\ 0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega\backslash N)$ ve $V(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega\backslash N)$ olmak üzere,

$$R_\phi := \frac{\int_\Omega\big(\varepsilon + A(\omega)\big)|\nabla_k\phi|^2 d\omega - \int_\Omega V(\omega)|\phi|^2 d\omega}{\int_\Omega |\phi|^2\, d\omega}$$

olsun. Eğer bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için

$$inf\left\{R_\phi : 0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega\backslash N)\right\} = -\infty \tag{9}$$

oluyorsa, (8) doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin N'nin dışında kalan genelleşmiş pozitif yerel çözümü yoktur.

İspat. Teoremin kanıtı çelişki yöntemine dayanmaktadır. Keyfi bir $T > 0$ sabiti verilsin. $u: [0, T) \to L^1(\Omega)$ fonksiyonu $(\Omega\backslash N) \times (0, T)$ bölgesinde (8) probleminin genelleşmiş pozitif yerel çözümü olsun. Ayrıca, $u_0 \geq 0$ ancak $u_0 \not\equiv 0$ olsun. $\phi \in C_0^\infty(\Omega\backslash N)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)u^m$$

denkleminin her iki yanı $\frac{\phi^2}{u^m}$ test fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\phi^2}{u^m}\right) = \frac{\phi^2}{u^m}\nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m) + V(\omega)\phi^2$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade Ω bölgesi üzerinde integre edilirse

$$\frac{1}{1-m}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{1-m}\,\phi^2 d\omega = \int_\Omega \big(\nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m)\big)\frac{\phi^2}{u^m} d\omega + \int_\Omega V(\omega)\phi^2 d\omega \tag{10}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, bu eşitliğin sağındaki ilk terim için kısmi integrasyon uygulanıp gerekli türev alma işlemleri yapıldığında,

$$\int_{\Omega} \left(\nabla_k \cdot (A(\omega)\nabla_k u^m)\right)\frac{\phi^2}{u^m} d\omega = -\int_{\Omega} A(\omega)\,|\nabla_k\phi|^2 d\omega + \int_{\Omega} A(\omega)\left|m\frac{\phi}{u}\nabla_k u - \nabla_k\phi\right|^2 d\omega$$
$$\geq -\int_{\Omega} A(\omega)|\nabla_k\phi|^2 d\omega \tag{11}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (10) ve (11) ifadeleri birleştirildiğinde

$$\frac{1}{1-m}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^{1-m}\,\phi^2 d\omega \geq \int_{\Omega} V(\omega)\phi^2 d\omega - \int_{\Omega} A(\omega)|\nabla_k\phi|^2 d\omega \tag{12}$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < t_1 < t_2 < T$ olmak üzere, (12) eşitsizliği $t = t_1$'den $t = t_2$'ye kadar integre edilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{(1-m)(t_2-t_1)}\int_{\Omega}\left(u^{1-m}(\omega,t_2) - u^{1-m}(\omega,t_1)\right)\phi^2 d\omega \geq \int_{\Omega} V(\omega)\phi^2 d\omega - \int_{\Omega} A(\omega)|\nabla_k\phi|^2 d\omega.$$

Bu aşamada, $\frac{Q-2}{Q} \leq m < 1$ olduğu dikkate alınarak, $f(u) = u^{\frac{(1-m)Q}{2}}$ konkav fonksiyonu için Jensen eşitsizliği uygulanırsa, $i = 1, 2$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega}\left(u(\omega,t_i)\right)^{\frac{(1-m)Q}{2}} d\omega \leq C(|\Omega|)\left(\int_{\Omega} u(\omega,t_i)\,d\omega\right)^{\frac{(1-m)Q}{2}}$$

sonucu elde edilir. Ω sınırlı bir bölge ve $u(\omega,t_i) \in L^1(\Omega)$ olduğundan

$$C(|\Omega|)\left(\int_{\Omega} u(\omega,t_i)\,d\omega\right)^{\frac{(1-m)Q}{2}}$$

integrali sonludur. Dolayısıyla, $i = 1, 2$ için

$$u^{1-m}(\omega,t_i) \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$$

olur. Buradan

$$\left(u^{1-m}(\omega,t_2) - u^{1-m}(\omega,t_1)\right) \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$$

olacağı aşikardır. Şimdi, $u^{1-m}(\omega,t_2) - u^{1-m}(\omega,t_1)$ fonksiyonu için, Önerme 3.1'de ifade edilen ağırlıklı Sobolev tipi eşitsizlik kullanılırsa, herhangi $\varepsilon \in (0,1)$ değeri için

$$\varepsilon\int_{\Omega} |\nabla_k\phi|^2 d\omega + S(\varepsilon)\int_{\Omega} \phi^2 d\omega \geq \frac{1}{(1-m)(t_2-t_1)}\int_{\Omega}\left(u^{1-m}(\omega,t_2) - u^{1-m}(\omega,t_1)\right)\phi^2 d\omega$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir $S(\varepsilon)$ sayısının olduğu görülür. Böylelikle,

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 d\omega + S(\varepsilon) \int_{\Omega} \phi^2 d\omega \geq \int_{\Omega} V(\omega)\phi^2(\omega) d\omega - \int_{\Omega} A(\omega)|\nabla_k \phi|^2 d\omega$$

eşitsizliği ve dolayısıyla

$$R_\phi = \frac{\int_\Omega \big(\varepsilon + A(\omega)\big)|\nabla_k \phi|^2 d\omega - \int_\Omega V(\omega)\phi^2 d\omega}{\int_\Omega \phi^2\, d\omega} \geq -S(\varepsilon)$$

ilişkisi elde edilir. $S(\varepsilon)$ pozitif bir reel sayı olduğundan, R_ϕ Rayleigh oranı alttan sınırlıdır ve dolayısıyla sonlu bir infimum değerine sahiptir. Buradan

$$inf\{R_\phi : 0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \backslash N)\} \neq -\infty$$

sonucu elde edilir ki bu Teorem 3.1'de verilen (9) varsayımı ile çelişir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

4. GREINER OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

$\mathbb{R}^n$'de L^p Hardy eşitsizliği, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < n$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx \tag{13}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir. (13) Hardy eşitsizliği Greiner vektör alanlarına Zhang ve Niu (2003) tarafından genelleştirilmiştir: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \backslash \{0\})$ fonksiyonu ve $1 < p < Q$ değerleri için

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{p(2k-1)} \left(\frac{|\phi|}{\rho}\right)^p d\omega \tag{14}$$

eşitsizliği geçerlidir.

D'Ambrosio (2005) yılındaki, Δ_k operatörünü de içeren, ikinci mertebeden yarı-lineer dejenere operatörler ile ilgili çalışmasında ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra, Niu ve ark. (2010) yılında yaptıkları çalışmada (14) eşitsizliğinin ağırlıklı halini ispatlamıştır. Bu eşitsizlik şu şekildedir:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \left|\frac{Q+\alpha p-p}{p}\right|^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} d\omega \tag{15}$$

Burada, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \backslash \{0\})$, $Q > 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \neq p$ ve $Q + \alpha p - p > 0$ şeklindedir. Ayrıca, $\left|\frac{Q+\alpha p-p}{p}\right|^p$ sabiti (15) eşitsizliği için en iyi sabittir.

Bunların yanında, Lian (2013) yılındaki çalışmasında (15) eşitsizliğinin farklı bir formunu ispatlamıştır. Ahmetolan ve Kömbe (2016), Δ_k Greiner operatörüne ilişiklendirilmiş iki ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra, Yener (2018) Greiner vektör alanında genel ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde etmek için kullanılan etkili bir yöntem tanıtmıştır. Bu yöntem aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 4.1 $A \in C^1(\mathbb{R}^{2n+1})$ ve $B \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun. Hemen hemen her $\omega \in \mathbb{R}^{2n+1}$ için pozitif $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ fonksiyonu

$$-\nabla_k \cdot (A|\nabla_k f|^{p-2}\nabla_k f) \geq B f^{p-1}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, $p > 1$ ve $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} A(\omega)|\nabla_k \phi(\omega)|^p d\omega \geq \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} B(\omega)|\phi(\omega)|^p d\omega$$

genel ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlik geçerlidir (Yener, 2018).

Şimdi, yukarıda ifade edilen Teorem 4.1'den faydalanarak, radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip bazı L^p Hardy tipi eşitsizlikler ispatlarıyla verilecektir.

Teorem 4.2 $\Omega = \{\omega = (x, y, l) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 > 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olmak üzere,

$$\int_\Omega \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p-1) \int_\Omega \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $x_1 > 1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Teorem 4.1'de $A(\omega) = \cos h^\alpha y_1$ ve $f(\omega) = \log x_1$ seçimi yapılsın. Seçilen fonksiyonlar X_j ve Y_j Greiner vektör alanlarıyla işleme sokulduğunda,

$$X_j(\log x_1) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + 2k y_j |z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}\right)(\log x_1) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\log x_1) = \begin{cases} \frac{1}{x_1}, & j = 1, \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$$

ve

$$Y_j(\log x_1) = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - 2k x_j |z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}\right)(\log x_1) = 0, \qquad \forall j = 1,2,\dots,n$$

olduğundan,

$$\nabla_k(\log x_1) = \left(\frac{1}{x_1}, 0,0,\dots,0\right)$$

olarak bulunur ve dolayısıyla

$$|\nabla_k (\log x_1)|^{p-2} = x_1^{2-p}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
-\nabla_k \cdot (A|\nabla_k f|^{p-2}\nabla_k f) &= -\nabla_k \cdot \left(\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1}}, 0, \dots, 0\right) \\
&= -X_1\left(\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1}}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2ky_1|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}\right)\left(\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1}}\right) \\
&= -\cos h^\alpha y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{1-p}\right) \\
&= (p-1)\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} f^{p-1}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Tüm bu işlemlerin sonucunda

$$B(\omega) = (p-1)\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1}$$

olarak bulunur ve Teorem 4.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge ve $p > 1$ olsun. O halde,

$$\int_\Omega e^{-px_1}|\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_\Omega e^{-px_1}|\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. Teorem 4.1'de, $p > 1$ için $A(\omega) = e^{-px_1}$ ve $f(\omega) = e^{x_1}$ seçimleri yapılsın. Gerekli türev işlemleri ile

$$\nabla_k f = e^{x_1}(1,0,0,\dots,0)$$

olur ve buradan

$$|\nabla_k f|^{p-2} = e^{x_1(p-2)}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle,

$$A(\omega)|\nabla_k f|^{p-2}\nabla_k f = e^{-x_1}(1,0,0,\dots,0)$$

vektör fonksiyonuna ulaşılır. Bu fonksiyon ile $-\nabla_k$ operatörü iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}
-\nabla_k \cdot (A(\omega)|\nabla_k f|^{p-2}\nabla_k f) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2ky_1|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial l}\right)(e^{-x_1}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-x_1}) \\
&= e^{-x_1}
\end{aligned}$$

skaler fonksiyonu bulunur ve buradan

$B(\omega) = e^{-px_1}$

ağırlık fonksiyonuna ulaşılır. Böylelikle, Teorem 4.3 ispatlanmıştır.

Yazarların Katkısı
Yazarların makaleye katkıları eşit orandadır.

Çıkar Çatışması Beyanı
Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı
Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

KAYNAKÇA

Ahmetolan, S. & Kombe, I. (2016). Hardy and Rellich type inequalities with two weight functions. Mathematical Inequalities & Applications, 19(3), 937-948.

Baras, P. & Goldstein, J. A. (1984). The heat equation with a singular potential. Transactions of the American Mathematical Society, 284(1), 121–139.

Beals, R. & Greiner, P. C. (1988). Calculus on Heisenberg Manifolds. Annals Mathematics Studies, 119, Princeton University Press.

Cabré, X. & Martel, Y. (1999). Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier. Comptes Rendus de l'Académié des Sciences-Series I-Mathematics, 329(11), 973–978.

Crespo, J. A. & Alonso, I. P. (2000). Global behavior of the Cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 31(6), 1270–1294.

D'Ambrosio, L. (2005). Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 4, 451–586.

Folland, G. B. (1973). A fundamental solution for a subelliptic operator. Bulletin of the American Mathematical Society, 79, 373–376.

Garcia A. J. & Peral A. I. (1998). Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. Journal of Differential Equations, 144, 441–476.

Goldstein J. A. & Kömbe I. (2003). Nonlinear parabolic differential equations with singular lower order term. Advances in Differential Equations, 10, 1153-1192.

Goldstein, G. R., Goldstein, J. A. & Kombe, I. (2005). Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and critical exponent. Applicable Analysis, 84(6), 571–583.

Greiner, P. C. (1979). A fundamental solution for non-elliptic partial differential operator. Canadian Journal of Mathematics, 31, 1107–1120.

Hörmander, L. (1967). Hypoelliptic second order differential equations. Acta Mathematica, 119, 147–171.

Kombe, I., (2006). On the nonexistence of positive solutions to nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients. Applicable Analysis, 85(5), 467-478.

Lian, B. (2013). Some sharp Rellich type inequalities on nilpotent groups and application. Acta Mathematica Sinica, English Series, 33, 59–74.

Nagel, S., Stein, E. M. & Wainger, S. (1985). Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Mathematica, 155, 103–147.

Niu, P., Ou, Y. & Han, J. (2010), Several Hardy-type inequalities with weights related to generalized Greiner operator. Canadian Mathematical Bulletin, 53, 153–162.

Shen, Y. T. (1980). On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equation with strongly singular coefficients. Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, 1407-1417.

Utku A. (2022). Greiner operatörü ile ilişkilendirilmiş hızlı difüzyon denklemi ve bazı integral eşitsizlikleri [Yüksek Lisans Tezi]. İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Yener, A. (2018). General weighted Hardy-type inequalities related to Greiner operators. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 48(7), 2405-2430.

Zhang, H. & Niu, P. (2003). Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of p-degenerate subelliptic operators and applications. Nonlinear Analysis, 54, 165–186.