Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B- Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoritical Sciences

2017 - Cilt: 5 Sayı: 2
Sayfa: 161- 171
DOI: 10.20290/aubtdb.323291
Geliş: 22 Haziran 2017 Düzeltme: 03 Eylül 2017 Kabul: 16 Ekim 2017

2-FORMLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ SELF-DUALLİĞİ VE DUALİTE OPERATÖRÜ

Hatice ZEYBEK *

Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada n-boyutlu $(n > 4)$ yönlendirilmiş V iç çarpım uzayı üzerinde sıfırdan farklı Φ, $(n-4)$-formu yardımıyla 2-formlardan 2-formlara giden T_Φ dualite operatörü tanımlanmış ve bu operatörün simetrik olduğu gösterilmiştir. T_Φ operatörü yardımıyla $n > 4$ durumunda 2-formlar için self-duallik, anti-self-duallik, zayıf self-duallik ve zayıf anti-self-duallik kavramları tanımlanmıştır. Özel olarak, $5 \leq n \leq 8$ için $\mathbb{R}^n$ üzerindeki temel formlara karşılık gelen T_Φ operatörü ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Self-Dualite, 2-form, Hodge-star

GENERALIZED SELF-DUALITY OF 2-FORMS AND DUALITY OPERATOR

ABSTRACT

In this work, over n-dimensional $(n > 4)$ oriented inner product space V, duality operator T_Φ is defined by using non-zero $(n-4)$-form Φ and it is shown that this operator is symmetric. By the means of operator T_Φ, over the spaces whose dimension is greater than four we defined self-duality, anti-self-duality, weak self-duality and weak anti-self-duality of a 2-form. Especially, over the spaces $\mathbb{R}^n$ for $5 \leq n \leq 8$ the duality operator T_Φ which corresponds to the fundamental forms is studied in details.

Keywords: Self-Duality, 2-form, Hodge-star

1. GİRİŞ

Bir 2-formun self-dual ya da anti-self-dualliği 4-boyutta anlamlıdır. Özellikle 4-manifoldların geometrik ve topolojik özelliklerini incelemede bu tip 2-formlar oldukça önemlidir. Ayrıca Matematiksel Fizik'te de bu kavramlar çok yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin, 4-manifoldlar üzerinde yazılan ve iki denklemden oluşan Seiberg-Witten denklemlerinden ikincisi bir 2-formun self-dualligi ile tanımlanır [1-3]. 4-manifoldların topolojisini incelemede önemli olan Yang-Mills denklemlerinde de bir 2-formun anti-self-dualliği kullanılır [4-5].

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

V bir reel vektör uzayı olmak üzere bu uzay üzerindeki k −lineer dönüşümlerin uzayını $L^k(V)$ ile gösterecek olursak,

$L^k(\mathrm{V}) = \{\mathrm{T} \mid \mathrm{T}: V^k \to \mathbb{R}, \mathrm{k}-\text{lineer}\}$ kümesi, $\forall\, T_1, T_2 \in L^k(\mathrm{V})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$(T_1 + T_2)(v_1, \dots, v_k) := T_1(v_1, \dots, v_k) + T_2(v_1, \dots, v_k)$$

$$(\lambda T_1)(v_1, \dots, v_k) := \lambda T_1(v_1, \dots, v_k)$$

*Sorumlu Yazar: haticezeybek@hacettepe.edu.tr

işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Tanım 1: $T \in L^k(V)$ ve $\sigma \in S_k$ olmak üzere, $\forall\ (v_1, v_2, \dots, v_k)\ \in\ V^k$ için,

$$T\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right) = sgn\ \sigma\ T(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

oluyorsa, T dönüşümüne **alternedir** denir. Bu şekilde alterne olan dönüşümlerin kümesi $\Lambda^k(V^*)$ ile gösterilir, yani:

$$\Lambda^k(V^*) = \{T \in L^k(V) :\ T\ alterne\}$$

dir. Burada V^* ile V vektör uzayının duali kastedilmektedir. Bu durumda $\Lambda^k(V^*)$ kümesi $\forall\ T_1, T_2\ \in\ \Lambda^k(V^*)$ ve $\lambda\ \in\ \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(T_1 + T_2)(v_1, \dots, v_k) := T_1(v_1, \dots, v_k) + T_2(v_1, \dots, v_k)$$

$$(\lambda T_1)(v_1, \dots, v_k) := \lambda T_1(v_1, \dots, v_k)$$

işlemleriyle bir vektör uzayı olur.

Tanım 2: $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in\ \Lambda^1(V^*)$ ve $i, j = 1, \dots, k$ olmak üzere bu elemanların **wedge çarpımı**,

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

şeklinde tanımlanır.

Açıktır ki, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in\ \Lambda^1(V^*)$ olmak üzere $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \in \Lambda^k(V^*)$ dır.

Teorem 1: $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ **,** V^* uzayının tabanı olmak üzere,

$$\mathcal{A} = \{f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge f_{i_k}^* \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$$

kümesi $\Lambda^k(V^*)$ nin tabanıdır[6].

Tanım 3: V bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

multilineer ve alterne dönüşümüne, diğer bir ifadeyle $\Lambda^k(V^*)$ ın bir elemanına V üzerinde bir $\boldsymbol{k}$ **−form** denir[6].

Özellik 1: $\omega \in \Lambda^k(V^*), \varphi \in \Lambda^s(V^*), \theta \in \Lambda^r(V^*)$ olmak üzere,

1. $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$
2. $r = s$ iken, $\omega \wedge (\varphi + \theta) = (\omega \wedge \varphi) + (\omega \wedge \theta)$
3. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$

eşitlikleri sağlanır[6].

Şimdi $\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^7$ ve $\mathbb{R}^8$ için bilinen bazı temel formları inceleyelim.

Tanım 4: $V = \mathbb{R}^{2n}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}), y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ olmak üzere,

$$\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \cdots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ dir. Bu elemana **standart simplektik form** denir [7].

Özel olarak $n = 3$ durumunu inceleyelim. Bu durumda vektör uzayımız $\mathbb{R}^6$ olup,
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in \mathbb{R}^6$ alırsak, ω simplektik formu;

$$\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5$$

şeklinde bulunur. $\mathbb{R}^6$ nın tabanını $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ve dualinin tabanını $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ olarak gösterecek olursak $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6)^*$ elemanını $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, e^i \wedge e^j$ şeklinde taban elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazabiliriz. Sonuç olarak, ω standart simplektik formunun tabanlar türünden ifadesi

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6 \tag{1}$$

şeklinde olur.

Şimdi de oktonyonlar(O) yardımıyla $\mathbb{R}^7$ de özel bir Φ, 3-formu ve $\mathbb{R}^8$ de özel bir ψ, 4-formu tanımlayacağız.

Oktonyonlar üzerindeki çarpma işlemi yardımıyla $Im(O) \cong \mathbb{R}^7$ üzerinde, $\mathbb{R}^3$ deki bilinen vektörel çarpımla benzer özelliklere sahip bir "×" vektörel(cross) çarpım her $x, y \in Im(O)$ için,

$$x \times y = Im(x.\bar{y})$$

ile tanımlanır. Özellikleri $\mathbb{R}^3$ deki "×" çarpım ile aynıdır. Bu çarpım yardımıyla $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ ın özel bir elemanını,

$$\Phi: \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z) := < x \times y, z >$$

olarak elde edebiliriz. "×" çarpımın özellikleri yardımıyla Φ nin gerçekten bir 3-form olduğu gösterilebilir[7]. $\Phi \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ nın taban türünden ifadesi,

$$\Phi = e^{124} + e^{235} + e^{346} + e^{457} + e^{561} + e^{672} + e^{713} \tag{2}$$

şeklindedir. Bu forma $\mathbb{R}^7$ üzerindeki **temel 3-form** denir.

Son olarak $\mathbb{R}^8$ üzerinde bir 4-form tanımlayacağız. Yine oktonyonlar üzerindeki çarpma işlemi yardımıyla $O \cong \mathbb{R}^8$ üzerinde bir üçlü çarpımı,

$$x \times y \times z = -x(\bar{y}z) + < x, y > z + < y, z > x - < x, z > y$$

ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$\psi: \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, t) \mapsto \psi(x, y, z, t) := < x \times y \times z, t >$$

şeklinde $\Lambda^4(\mathbb{R}^8)^*$ in özel bir elemanı olan ψ 4-formunu elde ederiz. Üçlü çarpımın özelliklerinden ψ nin gerçekten bir 4-form olduğu gösterilebilir [7]. $\psi \in \Lambda^4(\mathbb{R}^8)^*$ nın taban türünden ifadesi,

$$\psi = e^{1234} + e^{1256} + e^{1278} + e^{1357} - e^{1368} - e^{1458} - e^{1467} + e^{5678} + e^{3478} + e^{3456} + e^{2468} - e^{2457} - e^{2358} - e^{2367} \tag{3}$$

ile verilir. Bu forma $\mathbb{R}^8$ üzerindeki **temel 4 $-$form** denir.

Şimdi V üzerindeki iç çarpım yardımıyla $\Lambda^k(V^*)$ üzerinde bir iç çarpım şu şekilde tanımlanabilir: $(V, <,>)$ bir iç çarpım uzayı ve V^* dual uzay olmak üzere, bu iki uzay arasındaki kanonik izomorfizmayı

$$\begin{aligned} \rho : V &\to V^* \\ x &\mapsto \rho_x : V \to \mathbb{R} \\ &\qquad\quad v \mapsto < x, v > \end{aligned}$$

ile ifade edilecek olursa buradaki ρ_x dönüşümüne x'in **metrik duali** denir. Bu dönüşüm yardımıyla V üzerindeki iç çarpım, $x, y \in V$ ve $\rho_x, \rho_y \in V^*$ olmak üzere,

$$< \rho_x, \rho_y > := < x, y >$$

olarak V^* üzerine taşınabilir. Ayrıca bu iç çarpımı $\Lambda^k(V^*)$ uzayı üzerine de $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k \in \Lambda^k(V^*)$ olmak üzere,

$$< \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k > := \begin{vmatrix} < \omega_1, \eta_1 > & < \omega_1, \eta_2 > & \cdots & < \omega_1, \eta_k > \\ < \omega_2, \eta_1 > & < \omega_2, \eta_2 > & \cdots & < \omega_2, \eta_k > \\ \vdots & & & \\ < \omega_k, \eta_1 > & < \omega_k, \eta_2 > & \cdots & < \omega_k, \eta_k > \end{vmatrix}$$

ile taşırsak bu gerçekten $\Lambda^k(V^*)$ üzerinde bir iç çarpımdır[8].

Yardımcı Teorem 1: V bir iç çarpım uzayı ve $\{e_1, \cdots, e_n\}$ V nin ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda yukarıda tanımlanan iç çarpıma göre,

$$\mathcal{A} = \{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$

kümesi $\Lambda^k(V^*)$ ın ortonormal tabanıdır [8].

Yardımcı Teorem 2: $(V, <,>, [\boldsymbol{B}])$ n $-$boyutlu yönlendirilmiş iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda tek türlü belirli bir $dV \in \Lambda^n(V^*)$ vardır öyle ki, keyfi bir $\boldsymbol{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \in [\boldsymbol{B}]$ ortonormal tabanı için,

$$dV(b_1, \dots, b_n) = 1$$

olur, ve $dV = b^1 \wedge \cdots \wedge b^n$ şeklinde yazılır [8].

Tanım 5: Yardımcı Teorem 2 de tek türlü belirli olan $dV \in \Lambda^n(V^*)$ elemanına **volume form** denir.

Tanım 6: $(V,<,>,[\boldsymbol{B}])$ $n-$boyutlu yönlendirilmiş iç çarpım uzayı ve $\boldsymbol{B}=\{b_1,\dots,b_n\}\in[\boldsymbol{B}]$ ortonormal taban olsun. $\Lambda^k(V^*)$ dan $\Lambda^{n-k}(V^*)$ a giden, tabanlar üzerinde,

$$\left(b^{i_1}\wedge\cdots\wedge b^{i_k}\right)\star\left(b^{i_1}\wedge\cdots\wedge b^{i_k}\right)=dV$$

formülüyle tanımlanıp, lineer olarak $\Lambda^k(V^*)$ a genişletilen dönüşüme **Hodge-Star dönüşümü** denir. Ayrıca, bu dönüşümün $\Lambda^k(V^*)$ dan kalktığını vurgulamak amacıyla $\star_k$ gösterimi de kullanılabilir. Bu dönüşümü tabanlardan bağımsız olarak da ifade etmek mümkündür:

$$\star:\Lambda^k(V^*)\to\ \Lambda^{n-k}(V^*)$$

dönüşümü, her $\omega,\eta\in\Lambda^k(V^*)$ için,

$$\omega\wedge\star\,(\eta)=<\omega,\eta>dV$$

eşitliğini sağlar [9].

Özellik 2: $\star$ operatörü bir lineer dönüşümdür ve her $\omega,\eta\in\Lambda^k(V^*)$ için,

1. $<\omega,\eta>=<\star\,\omega,\star\,\eta>$
2. $<\omega,\eta>=\star\,(\omega\wedge\star\,\eta)=\star\,(\eta\wedge\star\,\omega)$

eşitliklerini sağlar[9].

Özellik 3: $(V,<,>,[\boldsymbol{B}])$ $n-$boyutlu yönlendirilmiş iç çarpım uzayı ve $\boldsymbol{B}=\{b_1,\dots,b_n\}\in[\boldsymbol{B}]$ ortonormal taban olsun. $\omega=b^{i_1}\wedge\cdots\wedge b^{i_k}\in\Lambda^k(V^*)$ olmak üzere,

$$\star^2\,(\omega)=\star_{n-k}\left(\star_k\,(\omega)\right)=(-1)^{k(n-k)}\omega$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 6 da verilen Hodge-star operatörü yardımıyla self-dual 2-formlar, 4-boyutlu uzay üzerinde doğal olarak karşımıza çıkar. Şimdi kısaca bu durumu incelemek istiyoruz:

$(V,<,>,[\boldsymbol{B}])$ $4-$boyutlu yönlendirilmiş iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda Hodge-star operatörü,

$$\star:\Lambda^2(V^*)\to\Lambda^{4-2}(V^*)=\Lambda^2(V^*)$$

şeklinde olur. Yani, $\omega\in\Lambda^2(V^*)$ için ω ile $\star\,(\omega)$ aynı uzaydadır. Ayrıca Özellik 2'den $\star^2=Id$ eşitliği elde edilir. Bu özellikten $\star$ dönüşümünün $-1{,}1$ özdeğerlerinin olduğu sonucu çıkar. O halde, $\star\,(\omega)=\omega$ ve $\star\,(\eta)=-\eta$ olacak şekilde $\omega,\eta\in\Lambda^2(V^*)$ vardır.

Tanım 7: $(V,<,>,[\boldsymbol{B}])$ $4-$boyutlu yönlendirilmiş iç çarpım uzayı ve $\omega\in\Lambda^2(V^*)$ olsun. Bu durumda,

$\star\,(\omega)=\ \omega\ \Rightarrow\omega$ ya **self-dual 2-form**,
$\star\,(\omega)=-\ \omega\ \Rightarrow\omega$ ya **anti-self-dual 2-form**,

denir.

Özel olarak $V=\mathbb{R}^4$ alarak bu durumu inceleyelim:

$\mathbb{R}^4$ ün standart tabanı $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ iken $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ nin tabanı;

$$\{e^{12},e^{13},e^{14},e^{23},e^{24},e^{34}\}$$

şeklinde olur. Hodge-star dönüşümünün,

$$\star: \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$$

$$F \quad \mapsto \star(F)$$

matrisini kolayca hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\star(e^{12}) &= e^{34} = 0.e^{12} + 0.e^{13} + 0.e^{14} + 0.e^{23} + 0.e^{24} + 1.e^{34} \\
\star(e^{13}) &= -e^{24} = 0.e^{12} + 0.e^{13} + 0.e^{14} + 0.e^{23} + (-1).e^{24} + 0.e^{34} \\
\star(e^{14}) &= e^{23} = 0.e^{12} + 0.e^{13} + 0.e^{14} + 1.e^{23} + 0.e^{24} + 0.e^{34} \\
\star(e^{23}) &= e^{14} = 0.e^{12} + 0.e^{13} + 1.e^{14} + 0.e^{23} + 0.e^{24} + 0.e^{34} \\
\star(e^{24}) &= -e^{13} = 0.e^{12} + (-1).e^{13} + 0.e^{14} + 0.e^{23} + 0.e^{24} + 0.e^{34} \\
\star(e^{34}) &= e^{12} = 1.e^{12} + 0.e^{13} + 0.e^{14} + 0.e^{23} + 0.e^{24} + 0.e^{34}
\end{aligned}$$

olup, bu durumda dönüşümün matrisi,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu dönüşümün özdeğerleri,

$$\{-1,-1,-1,1,1,1\}$$

dir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise, sırasıyla $e^{34} - e^{12}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}, e^{12} + e^{34}, e^{24} - e^{13}, e^{14} + e^{23}$ şeklindedir.

Buna göre

$$\Lambda_3^{2,-1} = span\,\{e^{34} - e^{12}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}\}$$
$$\Lambda_3^{2,1} = span\,\{e^{12} + e^{34}, e^{24} - e^{13}, e^{14} + e^{23}\}$$

denilirse 2-formların uzayı,

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* = \Lambda_3^{2,-1} \oplus \Lambda_3^{2,1}$$

şeklinde parçalanır. Dikkat edilirse $\Lambda_3^{2,-1}$ anti-self-dual 2-formların uzayı, $\Lambda_3^{2,1}$ self-dual 2-formların uzayıdır.

3. YÜKSEK BOYUTLARDA 2-FORMLARIN SELF DUALLİĞİ

V nin 4-boyutlu olması durumunda Hodge-star dönüşümü yardımıyla doğal olarak tanımlanan 2-formlar için self-dualite ve anti-self-dualite kavramlarının benzerlerini yüksek boyutlu uzaylar için de tanımlayabiliriz. Ancak, $n > 4$ iken bir F, 2-formu aldığımızda F ve $\star(F)$ farklı uzaylarda bulunduğundan bu elemanları karşılaştıramayız. Bu nedenle yeni bir yaklaşıma ihtiyaç vardır. Bunun için biz V üzerindeki bazı özel formlardan yararlanacağız. Daha detaylı bilgi için yüksek lisans tezi [10] incelenebilir.

V, n −boyutlu $(n > 4)$ yönlendirilmiş iç çarpım uzayı ve Φ de V üzerinde 0 dan farklı $(n-4)$-form olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T_\Phi : \Lambda^2(V^*) &\to \Lambda^2(V^*) \\ F &\mapsto T_\Phi(F) := \star(\Phi \wedge F) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Dikkat edilirse, wedge ve Hodge-star özelliklerinden dolayı T_Φ bir lineer dönüşümdür. Ayrıca, T_Φ operatörü aşağıda kanıtlanan çok önemli bir özelliğe sahiptir:

Teorem 2. T_Φ dönüşümü simetriktir yani, her $F_1, F_2 \in \Lambda^2(V^*)$ için,

$$< T_\Phi(F_1), F_2 > = < F_1, T_\Phi(F_2) >$$

eşitliği sağlanır[10].

Kanıt. Özelik 1, Özellik 2 ve Özellik 3 kullanılarak kolayca yapılır.

İlk olarak sol tarafın eşitini bulalım:

$$\begin{aligned} < T_\Phi(F_1), F_2 > &= <\star(\Phi \wedge F_1), F_2 > \\ &= <\star_2\left(\star_{n-2}(\Phi \wedge F_1)\right), \star(F_2) > \\ &= < (-1)^{(n-2).2}(\Phi \wedge F_1), \star(F_2) > \\ &= < \Phi \wedge F_1, \star(F_2) > \\ &= \star\left(\Phi \wedge F_1 \wedge \star_{n-2}\left(\star_2(F_2)\right)\right) > \\ &= \star\left(\Phi \wedge F_1 \wedge (-1)^{(n-2).2}(F_2)\right) \\ &= \star(\Phi \wedge F_1 \wedge F_2)\,. \end{aligned}$$

Şimdi de sağ tarafın eşitini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} < F_1, T_\Phi(F_2) > &= < F_1, \star(\Phi \wedge F_2) > \\ &= <\star(F_1), \star_2\left(\star_{n-2}(\Phi \wedge F_2)\right) > \\ &= <\star(F_1), (-1)^{(n-2).2}(\Phi \wedge F_2) > \\ &= <\star(F_1), \Phi \wedge F_2 > \\ &= \star\Big(\Phi \wedge F_2 \wedge \star_{n-2}\left(\star_2(F_1)\right)\Big) \\ &= \star\left(\Phi \wedge F_2 \wedge (-1)^{(n-2).2}(F_1)\right) \\ &= \star(\Phi \wedge F_2 \wedge F_1) \\ &= \star\Big(\Phi \wedge \left((-1)^{2.2}(F_1 \wedge F_2)\right)\Big) \\ &= \star(\Phi \wedge F_1 \wedge F_2)\,. \end{aligned}$$

İki tarafta aynı sonuca eşit bulunduğundan istenilen elde edilmiş olur, yani T_Φ dönüşümü simetriktir.

Teorem 3. $T: V \to V$ simetrik lineer dönüşüm ise herhangi bir ortonormal tabana göre T nin matrisi simetriktir [11].

Tanım 8. T_Φ ye 2 −formlar için ***dualite operatörü*** denir [10].

O halde Yardımcı Teorem 1 deki tabana göre T_Φ nin matrisi simetriktir.

Sonuç: Simetrik bir matrisin özdeğerleri reel olduğundan T_Φ nin tüm özdeğerleri reeldir.

Tanım 9. $(V, <,>, [\boldsymbol{B}])$ yönlendirilmiş iç çarpım uzayı ve $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ için,
$T_\Phi(\omega) = \omega \Rightarrow \omega$ ya ***self-dual* 2*-form***
$T_\Phi(\omega) = -\omega \Rightarrow \omega$ ya ***anti-self-dual* 2*-form***
$T_\Phi(\omega) = \lambda\omega\ ;\ \lambda > 0\ , \lambda \neq 1 \Rightarrow \omega$ ya ***zayıf self-dual* 2*-form***
$T_\Phi(\omega) = \lambda\omega\ ;\ \lambda < 0\ , \lambda \neq -1 \Rightarrow \omega$ ya ***zayıf anti-self-dual* 2*-form***
denir[10].

Şimdi bu yaklaşımı bazı özel $\mathbb{R}^n$ öklid uzaylarına uygulayalım :

$\boldsymbol{n = 5}$ **durumu:** $\mathbb{R}^5$ uzayı üzerinde yardımcı form olarak $\Phi = \eta = e^5$, 1-formunu alalım. Bu durumda T_η dönüşümü,

$$\begin{aligned} T_\eta :\ \Lambda^2(\mathbb{R}^5)^* &\to \Lambda^2(\mathbb{R}^5)^* \\ F &\mapsto T_\eta(F) := \star\,(\eta \wedge F) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\mathbb{R}^5$ in standart tabanını $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olarak alırsak, $\Lambda^2(\mathbb{R}^5)^*$ nin tabanı;

$$\{e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{15}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{34}, e^{35}, e^{45}\}$$

şeklinde olur. T_η dönüşümünün matrisini bilinen yollarla aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matris aracılığıyla dönüşümün özdeğerleri,

$$\{-1, -1, -1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise, $e^{34} - e^{12}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}, e^{12} + e^{34}, e^{24} - e^{13}, e^{14} + e^{23}, e^{45}, e^{35}, e^{25}, e^{15}$ şeklindedir. Buna göre

$$\begin{aligned} \Lambda_3^{2,-1} &= span\,\{e^{34} - e^{12}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}\} \\ \Lambda_3^{2,1} &= span\,\{e^{12} + e^{34}, e^{24} - e^{13}, e^{14} + e^{23}\} \\ \Lambda_4^{2,0} &= span\,\{e^{45}, e^{35}, e^{25}, e^{15}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa 2-formların uzayı,

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^5)^* = \Lambda_3^{2,-1} \oplus \Lambda_3^{2,1} \oplus \Lambda_4^{2,0}$$

şeklinde parçalanır. Burada $\Lambda_3^{2,1}$ uzayı self-dual 2-formların uzayı, $\Lambda_3^{2,-1}$ uzayı anti-self-dual 2-formların uzayıdır.

$\boldsymbol{n = 6}$ **durumu:** $\mathbb{R}^6$ uzayı üzerinde yardımcı form olarak (1) de ifade ettiğimiz

$$\Phi = \omega = e^{12} + e^{34} + e^{56}$$

standart simplektik formunu alalım. Bu durumda T_ω dönüşümü,

$$\begin{aligned} T_\omega :\ \Lambda^2(\mathbb{R}^6)^* &\to \Lambda^2(\mathbb{R}^6)^* \\ F &\mapsto T_\omega(F) := \star\,(\omega \wedge F) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\mathbb{R}^6$ nın standart tabanını $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ olarak alırsak, $\Lambda^2(\mathbb{R}^6)^*$ nin tabanı;

$$\{e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{15}, e^{16}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{26}, e^{34}, e^{35}, e^{36}, e^{45}, e^{46}, e^{56}\}$$

şeklinde olur. T_ω dönüşümünün özdeğerleri,

$$\{2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin belirlediği altuzaylar

$$\begin{aligned} \Lambda_8^{2,-1} &= \{e^{56} - e^{12}, e^{35} + e^{46}, e^{45} - e^{36}, e^{34} - e^{12}, e^{15} + e^{26}, e^{25} - e^{16}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}\} \\ \Lambda_6^{2,1} &= \{e^{46} - e^{35}, e^{36} + e^{45}, e^{26} - e^{15}, e^{16} + e^{25}, e^{24} - e^{13}, e^{14} + e^{23}\} \\ \Lambda_1^{2,2} &= \{e^{12} + e^{34} + e^{56}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Sonuç olarak 2-formların uzayı,

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^6)^* = \Lambda_1^{2,2} \oplus \Lambda_6^{2,1} \oplus \Lambda_8^{2,-1}$$

şeklinde parçalanır. Burada $\Lambda_6^{2,1}$ uzayı self-dual 2-formların uzayı, $\Lambda_8^{2,-1}$ uzayı anti-self-dual 2-formların uzayı ve $\Lambda_1^{2,2}$ uzayı ise zayıf self-dual 2-formların uzayıdır.

$\boldsymbol{n = 7}$ **durumu:** $\mathbb{R}^7$ uzayı üzerinde yardımcı form olarak (2) de ifade ettiğimiz $\mathbb{R}^7$ deki temel 3-formu, yani

$$\Phi = e^{124} + e^{235} + e^{346} + e^{457} + e^{561} + e^{672} + e^{713}$$

formunu alalım. Bu durumda T_Φ dönüşümü,

$$\begin{aligned} T_\Phi :\ \Lambda^2(\mathbb{R}^7)^* &\to \Lambda^2(\mathbb{R}^7)^* \\ F &\mapsto T_\Phi(F) := \star\,(\Phi \wedge F) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\mathbb{R}^7$ nin standart tabanını $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ olarak alırsak, $\Lambda^2(\mathbb{R}^7)^*$ nin tabanı;

$$\{e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{15}, e^{16}, e^{17}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{26}, e^{27}, e^{34}, e^{35}, e^{36}, e^{37}, e^{45}, e^{46}, e^{47}, e^{56}, e^{57}, e^{67}\}$$

şeklinde olur. Bu dönüşümünün özdeğerleri,

$$\{-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin belirlediği altuzaylar

$$\Lambda_7^{2,-2} = span\,\{e^{35} + e^{67} - e^{14}, e^{12} + e^{57} - e^{36}, e^{24} + e^{37} + e^{56}, e^{16} + e^{47} - e^{23}, e^{46} - e^{17} - e^{25}, e^{13} + e^{26} + e^{45}, e^{15} + e^{34} - e^{27}\}$$

$$\Lambda_{14}^{2,1} = span\,\{e^{14} + e^{67}, e^{57} - e^{12}, e^{56} - e^{24}, e^{47} - e^{16}, e^{17} + e^{46}, e^{45} - e^{13}, e^{37} - e^{24}, e^{12} + e^{36}, e^{14} + e^{35}, e^{34} - e^{15}, e^{15} + e^{27}, e^{26} - e^{13}, e^{25} - e^{17}, e^{16} + e^{23}\}$$

şeklindedir. Sonuç olarak 2-formların uzayı,

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^7)^* = \Lambda_7^{2,-2} \oplus \Lambda_{14}^{2,1}$$

şeklinde parçalanır. Burada $\Lambda_{14}^{2,1}$ uzayı self-dual 2-formların uzayı, $\Lambda_7^{2,-2}$ uzayı zayıf anti-self-dual 2-formların uzayıdır.

$\boldsymbol{n = 8}$ **durumu:** $\mathbb{R}^8$ uzayı üzerinde yardımcı form olarak (3) de verilen,

$$\Phi = \psi = e^{1234} + e^{1256} + e^{1278} + e^{1357} - e^{1368} - e^{1458} - e^{1467} + e^{5678} + e^{3478} + e^{3456} + e^{2468} - e^{2457} - e^{2358} - e^{2367}$$

$\mathbb{R}^8$ deki temel 4-formu alalım. Bu durumda T_ψ dönüşümü,

$$\begin{aligned} T_\psi :\ \Lambda^2(\mathbb{R}^8)^* &\to \Lambda^2(\mathbb{R}^8)^* \\ F &\mapsto T_\psi(F) := \star\,(\psi \wedge F) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\mathbb{R}^8$ nın standart tabanını $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ olarak alırsak, $\Lambda^2(\mathbb{R}^8)^*$ nin tabanı;

$$\{e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{15}, e^{16}, e^{17}, e^{18}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{26}, e^{27}, e^{28}, e^{34}, e^{35}, e^{36}, e^{37}, e^{38}, e^{45}, e^{46}, e^{47}, e^{48}, e^{56}, e^{57}, e^{58}, e^{67}, e^{68}, e^{78}\}$$

şeklinde olur. Bu dönüşümünün özdeğerleri,

$$\{3,3,3,3,3,3,3,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1\}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin belirlediği altuzaylar

$$\Lambda_7^{2,3} = span\,\{e^{12} + e^{34} + e^{56} + e^{78}, e^{24} + e^{68} - e^{13} - e^{57}, e^{58} + e^{67} - e^{14} - e^{23}, e^{15} + e^{48} - e^{26} - e^{37}, e^{16} + e^{25} + e^{38} + e^{47}, e^{28} + e^{46} - e^{17} - e^{35}, e^{36} + e^{45} - e^{18} - e^{27}\}$$

$$\Lambda_{21}^{2,-1} = span\,\{e^{78} - e^{12}, e^{13} + e^{68}, e^{14} + e^{67}, e^{14} + e^{58}, e^{57} - e^{13}, e^{56} - e^{12}, e^{48} - e^{15}, e^{47} - e^{16}, e^{17} + e^{46}, e^{18} + e^{45}, e^{38} - e^{16}, e^{15} + e^{37}, e^{18} + e^{36}, e^{35} - e^{17}, e^{34} - e^{12}, e^{17} + e^{28}, e^{27} - e^{18}, e^{15} + e^{26}, e^{25} - e^{16}, e^{13} + e^{24}, e^{23} - e^{14}\}$$

şeklindedir. Sonuç olarak 2-formların uzayı,

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^8)^* = \Lambda_7^{2,3} \oplus \Lambda_{21}^{2,-1}$$

şeklinde parçalanır. Burada $\Lambda_{21}^{2,-1}$ uzayı anti-self-dual 2-formların uzayı, $\Lambda_7^{2,3}$ uzayı zayıf self-dual 2-formların uzayıdır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $(n > 4)$ olmak üzere n −boyutlu uzaylarda, sıfırdan farklı bir $(n-4)$-form yardımıyla 2-formlar için self-dualite, anti-self-dualite, zayıf self-dualite ve zayıf anti-self-dualite kavramları tanımlanmıştır. Burada önerilen self-dualite ve anti-self-dualite kavramları yüksek boyutlu Seiberg-Witten denklemlerine uygulanabilir. Bu kısım da daha sonraki çalışmalar için planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Moore J. Lectures Notes on Seiberg-Wittens Invariants. Springer-Verlag New York, Inc, 1996.

[2] Morgan J. The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds. Princeton University Press, 1995.

[3] Donaldson SK. The Seiberg-Witten and 4-manifold topology. Bull Amer Math Soc 1996; 33:45-70.

[4] Donaldson SK. Yang-Mills Invariants of Four-Manifolds. Cambridge University Press, 1990.

[5] Naber GL. Topology, Geometry and Gauge Fields. Springer-Verlag New York, Inc, 1996.

[6] P. do Carmo M. Diferential Forms and Applications. Springer-Verlag New York, Inc, 1994.

[7] Harvey FR. Spinors and Calibrations. Academic Press, Inc. California 1990.

[8] Lee JM. Introduction to Smooth Manifolds. Springer-Verlag New York, Inc, 2003.

[9] Nowaczyk N. The Hodge Decomposition. https://nikno.de/wp-content/uploads/2016/07/hodge.pdf

[10] Zeybek H. 2-Formların Genelleştirilmiş Self-Dualliği. Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye, 2014.

[11] Smith L. Linear Algebra. Springer-Verlag New York, Inc, 1998.