Volume: 09 Number: 02 Category: 02 Page: 65-76 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 09 Sayı: 02 Kategori: 02

TAMAM OLMAYAN PİYASADA TEK PERİYOT KARESEL RİSKTEN KORUMA PROBLEMİNDE PARAMETRELERİN BELİRSİZLİĞİ ALTINDA DAYANIKLI OPTİMİZASYON YAKLAŞIMI

Gültaç EROĞLU İNAN* **Ayşen APAYDIN**** **Mustafa Ç. PINAR*****

ÖZET

Bu çalışmada, öncelikle tamam olmayan piyasada tek periyot için karesel riskten korunma problemi ele alındı. Problemin Föllmer-Schweizer (1989) tarafından elde edilen optimal çözümü verildi. Sonrasında, varlık fiyatı için Pınar (2006) tarafından önerilen bir stokastik model ile yazarlar tarafından problemin optimal çözümü elde edildi. Yine aynı çalışmada elde edilen bazı özel hesaplamalara yer verildi. Bir diğer aşamada, model parametrelerinin belirsizlik gösterdiği durum için, ilgili çalışmada önerilen dayanıklı optimizasyon yaklaşımı ele alındı. Son aşamada, sadece oynaklığın bilinmediği durum için bu yaklaşımın bir uygulamasına yer verildi. Sayısal sonuçlar, oynaklığın bilindiği durumda elde edilen klasik çözüm ile belirsizlik durumunda elde edilen çözümün, amaç fonksiyonuna yakın değerler verdiğini göstermiştir. Sonuç olarak, belirsizlik durumunda elde edilen çözümün, oynaklık değişimine karşı dayanıklı olduğunu söyleyebiliriz.

Anahtar Kelimeler: Belirsizlik, Dayanıklı optimizasyon, Karesel riskten korunma.

1. GİRİŞ

Opsiyon, iki taraf arasında yapılan, bir finansal varlığın, gelecekte belirlenen bir tarihte (vade tarihi) bir prim karşılığında (opsiyonun fiyatı) önceden belirlenmiş bir fiyattan (uygulama fiyatı K) satma veya satın alma hakkını veren bir sözleşmedir. Opsiyon sözleşmesi, taraflardan birine anlaşmadaki hakları kullanmak veya bu haklardan vazgeçmek seçeneği tanırken, diğer taraftan hak sahibinin sözleşmedeki haklarını kullanmayı seçmesi durumunda, anlaşmanın gereklerini yerine getirme sorumluluğu yüklemektedir. Bir opsiyonu satan tarafa, opsiyonu satan ya da opsiyonu yazan denilmektedir. Bir opsiyonu alan tarafa ise opsiyonu alan denilmektedir. Opsiyonlar, alıcı açısından alım opsiyonu ve satım opsiyonu olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Vade tarihi açısından ise opsiyonlar, Amerikan Opsiyonu ve Avrupa Opsiyonu olarak ayrılmaktadır. Avrupa Opsiyonları sadece vade tarihinde kullanılabilmektedir. Amerikan Opsiyonları ise vade tarihinden önce kullanılabilir.

Bugün pek çok mal ve finansal varlık üzerine yazılmış opsiyonlar mevcuttur. Opsiyonlar gelecekte bir zamanda olası, fiyat dalgalanma beklentilerine karşı çeşitli stratejiler geliştirme imkanı vermektedir. Opsiyon anlaşmalarının, bir finansal varlık olarak yararları, risk aktarma, kar sağlama olarak sayılabilir. Opsiyon almanın hak sahibine sağladığı en büyük fayda, sınırlı bir riskle, sınırsız kar sağlama olanağı elde

*Araş. Gör., Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü e-posta: geroglu@science.ankara.edu.tr

**Prof. Dr., Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü e-posta: apaydin@science.ankara.edu.tr

***Prof. Dr., Bilkent Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü e-posta: mustafap@bilkent.edu.tr

etmektir. Opsiyon sözleşmesi satın alanın riski veya uğrayabileceği zarar ise ödediği prim ile sınırlıdır. Opsiyon sözleşmesi satan kişinin riski veya uğrayabileceği zararı ise sınırsız olabilmektedir (Alpan, 1999).

Bu risk, varlığın dönem sonundaki fiyatına bağlı olarak oluşabilecek kayıbıdır. Bu kayıp opsiyonun bedeli olarak tanımlanmaktadır ve ileriki bölümlerde H olarak gösterilecektir. Opsiyonu satan, kendisini bu riske karşı korumak için H opsiyonun bedelini dönem sonunda geri sağlayacak bir ticari strateji oluşturmaya çalışır.

Eğer içinde bulunulan piyasa tamam olmayan (complete market) bir piyasa ise, opsiyonun bedeli H geri kazanılabilir, $V_M = H$ olacak şekilde kendi kendini finanse eden (self-financing strategy) bir ticari strateji vardır. Eğer piyasa tamam olmayan (incomplete market) bir piyasa ise H geri sağlanamaz, riskten korunma stratejisi bazı optimallik kriterlerine bağlı olarak seçilmelidir. Bu durumda, riskten korunma stratejisini oluşturmak için genellikle karesel risk minimizasyonu (quadratic risk minimization) kullanılmaktadır (Coleman vd., 2003).

2. YÖNTEM

Bu çalışmada, tamam olmayan piyasada tek periyotlu durumda varlık fiyatının hareketi için tanımlanan modelin parametrelerinde belirsizlik olduğu varsayımı altında karesel riskten korunma problemi ele alındı. Çalışmada belirsizlik durumu ile mücadele için optimizasyon yöntemi olarak, dayanıklı optimizasyon yöntemi kullanılmıştır.

2.1 Tek Periyot için Karesel Riskten Korunma Problemi

Bu bölümde, tamam olmayan piyasada, tek periyot için karesel riskten korunma problemi ele alındı. Burada ekonomi, $k = 0,1$ zamanlarında X_k maliyeti ile bir X riskli varlığı (stok) ve bir risksiz varlığı (bond or account) içermektedir. $k = 1$ zamanında X_1, stok maliyeti $k = 1$ zamanına kadar biriktirilmiş bilgi ile ölçülebilen bir rasgele değişkendir. $k = 0$ zamanında X_0 değeri bilinmektedir yani bir $x_0 > 0$ için $P(X_0 = x_0) = 1$ dır. $k = 1$ zamanında, opsiyonun bedeli, H rasgele değişkeni ile tanımlanır. Bir alım opsiyonu için,

$$H = \left(X_1 - K\right)_+ = \begin{cases} X_1 - K & , \quad X_1 > K \\ 0 & , \quad X_1 \le K \end{cases} \tag{1}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada K, uygulama (anlaşma) fiyatı olarak tanımlanan önceden belirlenen bir fiyattır. $X_1 > K$ olması durumunda $H = X_1 - K$ pozitif bir değer alacaktır. $\left(X_1 - K\right)_+$ gösteriminde yer alan $+$, pozitiflik durumu için kullanılmıştır.

Opsiyonu satan taraf, $X_1 > K$ olması durumunda, pazarda daha pahalı olan bir malı K anlaşma fiyatından karşı tarafa satarak $H = X_1 - K$ zarar etmiş olacaktır. Bu olaya karşı, opsiyonu satan kendini garantiye almak ve opsiyonu korumak ister.

Bunun için kendisine, bir portföy oluşturur. Bu portföyün $k=0$ zamanındaki değeri;

$$V_0 = \xi X_0 + \eta_0 \tag{2}$$

dır.

Burada;

ξ : $k=0$ zamanında X riskli varlığından satın alınan miktar
η_0 : $k=0$ zamanında risksiz varlığa yatırılan miktar

olarak tanımlanmaktadır. Risksiz varlığın maliyeti 1 olarak alınmaktadır. Açıklamak gerekirse, örneğin, $\eta_0.1$ miktarda İsviçre Frankına yatırım yapıldığı düşünülebilir (Föllmer vd., 1989).

$k=1$ zamanında sonuçlanan portföyün değerinin $V_1 = H$ olması istenir. Buradan;

$$\begin{aligned} V_1 = \xi X_1 + \eta_1 &\rightarrow H = \xi X_1 + \eta_1 \\ &\rightarrow \eta_1 = H - \xi X_1 \end{aligned} \tag{3}$$

olarak hesaplanır.

Verilen bir H için, bir strateji, ξ ve V_0 sabitlerinin ilk baştaki seçimleriyle belirlenebilir.

Bir (ξ, V_0) stratejisinin neden olduğu maliyet incelenmek istensin.

C_k :"k.zamana kadar birikmiş maliyet"

olmak üzere

$k=0$ zamanından $k=1$ zamanına kadar geçen sürede yapılan ilave maliyet

$$\begin{aligned} C_1 - C_0 &= \eta_1 - \eta_0 \\ &= (V_1 - \xi X_1) - (V_0 - \xi X_0) \\ &= H - V_0 - \xi (X_1 - X_0) \\ &= H - V_0 - \xi \, \Delta X \end{aligned} \tag{4}$$

olarak verilir. Burada problem, ticari stratejinin beklenen karesel ilave maliyetini en küçükleyecek, V_0 ve ξ değerlerini belirlemektir.

Problem matematiksel olarak,

$$\min_{V_0,\xi} = E\left(C_1 - C_0\right)^2 = E\left(H - V_0 - \xi\Delta X\right)^2 \tag{5}$$

biçiminde ifade edilebilir.
Problemin çözümü ise,

$$\xi = {Cov\left(H, X_1\right)} \Big/ {Var\left(X_1\right)} \tag{6}$$

$$V_0 = E\left(H\right) - \xi E\left(\Delta X\right) \tag{7}$$

olarak elde edilir (Föllmer vd., 1989). Föllmer-Schweizer çalışmalarında, çözüm için Doğrusal Regresyonda En Küçük Kareler yaklaşımını kullanmışlardır.

Burada özetlemek gerekirse;

C_0, $k=0$ başlangıç zamanındaki nakite durumu, C_1, $k=1$ zamanındaki nakite durumu olmak üzere, başlangıç zamanından $k=1$ zamanına, $C_1 - C_0$ ilave maliyetinin, karesel beklenen değeri $E\left(C_1 - C_0\right)^2 = E\left(H - V_0 - \xi\Delta X\right)^2$ en küçük olacak şekilde,

$$\xi = {Cov\left(H, X_1\right)} \Big/ {Var\left(X_1\right)}$$

$$V_0 = E\left(H\right) - \xi E\left(\Delta X\right)$$

olarak elde edilmiştir.

Karesel riskten korunma probleminin optimizasyonu alanında yapılan çalışmaların detaylı incelemesi için okuyucular (Schweizer, 2001) çalışmasına yönelebilir.

(Avellaneda vd., 1995), (Ahn vd., 1997) ve (Ahn vd., 1999) varlık fiyatının oynaklığının (volatility) tam olarak bilinmediği fakat bir belirsizlik aralığında yer aldığı durumda, opsiyon fiyatlama için dayanıklı riskten korunma stratejileri geliştirmişlerdir.

İlk çalışmada oynaklık tam olarak bilinmemekte, sadece $\sigma_{\min}$ ve $\sigma_{\max}$ uç değerleri arasında değer aldığı bilinmektedir. Bu çalışmada, oynaklık için aralık belirsizliği altında, Black-Scholes yapısında, varlık fiyatının, Black-Scholes-Barenblatt Eşitliği olarak tanımlanan bir lineer olamayan PDE'nin (Partial Differential Equations) çözümü olarak tanımlanabildiği gösterilmiştir. Eşitliğin çözümü için, sonlu fark algoritması (finite-differencing) ve üçgensel ağaç (trinomial tree) sunulmuştur.

İkinci çalışmada, Black-Scholes yaklaşımında, dayanıklı riskten koruma stratejisi geliştirmek için, üstel yarar fonksiyonu kullanılmıştır. En kötü oynaklık senaryosu için (worst–case volatility scenario) yatırımcının faydası en iyilenmeye çalışılmıştır. Çalışmada Avrupa Opsiyonları (Europan Option) ele alınmıştır.

Üçüncü çalışmada ise, bir önceki çalışmanın aksine yatırımcı sadece Black-Scholes stratejisi ile sınırlandırılmamaktadır. Burada Dinamik Programlama Eşitliği (Dynamic Programming Equation-DPE) yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu yaklaşım sadece Avrupa Opsiyonlarında değil, Barrier Opsiyonları gibi opsiyonlarda da kullanılabilir. DPE yaklaşımının sonuçları, Black-Scholes yaklaşımına göre daha iyi çalışan etkili stratejiler elde edildiğini göstermiştir.

2.2 Varlık Fiyatının Hareketi için Temel Bir Stokastik Model

(Pınar, 2006), çalışmasında varlık fiyatının hareketini $X_1 = X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right)$ stokastik modeli olarak tanımlamıştır. Burada

μ: Varlık fiyatının eğilimi (drift)
σ: Varlık fiyatının sapması (volatility)
$Z \sim N(0,1)$: Standart Normal Dağılım

biçiminde tanımlıdır. $\Delta X = X_1 - X_0 = X_0\left(\mu+\sigma Z\right)$, Avrupa alım opsiyonu için, K uygulama fiyatı ile, $H = \left(X_1 - K\right)_+ = \left(X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right) - K\right)_+$ dır. Çalışmada $E(H - V_0 - \xi \Delta X)^2$ değeri

$$A + B(-2V_0 - 2\xi X_0) + C(-2\xi X_0\sigma) + V_0^2 + 2V_0\xi X_0\mu + \xi^2(X_0^2\mu^2 + X_0^2\sigma^2) \qquad (8)$$

olarak elde edilmiştir.

Burada,

$$\begin{aligned}
A &= \left[X_0^2(1+2\mu+\mu^2) - 2K(1+\mu) + K^2\right](1-F_Z(b)) \\
&\quad + \left[X_0^2(2\sigma+2\mu\sigma) - 2K X_0\sigma\right] f_Z(b) + X_0^2\sigma^2(1-F_Z(b)+bf_Z(b)) \\
B &= \left[X_0(1+\mu) - K\right](1-F_Z(b)) + X_0\,\sigma\, f_Z(b) \\
C &= \left[X_0(1+\mu) - K\right] f_Z(b) + X_0\,\sigma(1-F_Z(b)+b\,f_Z(b))
\end{aligned}$$
biçiminde elde edildi.

Burada f_Z, Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, F_Z Z rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$b = \frac{K}{X_0\sigma} - \frac{1+\mu}{\sigma}$$
dır (Pınar, 2006).

Bu çalışmamızda yazarlar tarafından,

$k=0$ zamanında $E\left(H - V_0 - \xi\Delta X\right)^2$ karesel beklenen değeri minimum olacak şekilde

$$\xi = \left(\left(\begin{array}{l} X_0^2\sigma^2\left(1-F_Z\left(b\right)+bf_Z\left(b\right)\right)+X_0^2\sigma\left(1+\mu\right)f_Z\left(b\right) \\ -KX_0\sigma\left(1-F_Z\left(b\right)\right)X_0\left(1+\mu\right) \end{array} \right) \Big/ X_0^2\sigma^2 \right) \tag{9}$$

olarak, portföyün değeri ise

$$V_0 = X_0\left(1+\mu\right)\left(1-F_Z\left(b\right)\right)+X_0\sigma f_Z\left(b\right)-K\left(1-F_Z\left(b\right)\right)-\xi X_0\mu \tag{10}$$

olarak elde edilmiştir. Çıkarımlar, parçalı momentler (Winkler, 1972) yardımıyla elde edilmiştir.

2.3 Dayanıklı Optimizasyon

Optimizasyon algoritmaları ve yazılımlar kullanıcıya, kompleks optimizasyon problemlerinin geniş ölçüde ele alınmasına olanak vermesine rağmen, optimal çözümler problem girdilerindeki ufak değişikliklere oldukça duyarlı olabilmektedir. Bu duyarlılığın nedeni ise gerçek dünya verilerinin nadiren kesin değerli olmasıdır.

Klasik doğrusal optimizasyon yönteminde, küçük veri belirsizlikleri (%1 veya daha az) göz ardı edilir. Verilen (sözde) veriler kesin ise problem çözülür ve sonuçlanan nominal optimal çözümdür. Küçük veri belirsizliklerinin çözümün uygunluk ve optimallik özelliklerini önemli ölçüde etkilemeyeceği umulur. Fakat bazen küçük veri belirsizlikler, dikkat edilmesi gereken önemli sonuçlara neden olmaktadır.

Dayanıklı optimizasyon belirsizliğin kümeler yoluyla bir tarifine dayanan, en son geliştirilen bir tekniktir. Belirsiz parametrelerin sadece bilinen kümelere ait olduğu bilinmektedir. Belirsiz problemin dayanıklı karşılığı üzerinde durulmaktadır. Bu dayanıklı karşılıklar aslında, orijinal problemin en kötü durum formülasyonlarıdır.

Bir belirsiz doğrusal optimizasyon problemi,

$$\left\{ \min_x \left\{ c^t x + d \,:\, Ax \le b \right\} \right\}_{(c,\,d,\,A,\,b)\in U} \tag{11}$$

ifade edilsin. Burada, U bir belirsizlik kümesidir. Klasik optimizasyon probleminin dayanıklı karşılığı,

$$\min_x \left\{ \left[\max_{(c,d,A,b)\in U} \left([c^t x + d] \right) :\; Ax \le b \;\forall\, (c,d,A,b) \in U \right] \right\} \tag{12}$$

olarak tanımlıdır. Problem

$$\min_{t,x} \left\{ t \,/\, c^t x + d \le t\,, Ax - b \ge 0 \;\; \forall\, (c,d,A\,,b) \in U \right\} \tag{13}$$

olarak da verilebilir (Ben Tal vd., 2009, 9).

2.4 Parametrelerin Belirsizliği Altında Dayanıklı Optimizasyon Yaklaşımı

Bu bölümde, μ ve σ parametrelerinin her ikisinde belirsizlik olduğu durumda, V_0 ve ξ değerlerinin elde edilmesine ilişkin Pınar (2006) dayanıklı yaklaşımı ele alındı. Çalışmada dayanıklı karesel opsiyon koruma problemi

$$\min_{V_0,\,\varepsilon}\ \max_{(\mu,\,\sigma)} \phi\left(\mathrm{V}_0,\ \varepsilon,\ \mu,\ \sigma\right)=E_Z\left\{\left[\left(X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right)-K\right)_+ -V_0-\varepsilon\, X_0\left(\mu+\sigma Z\right)\right]^2\right\} \tag{14}$$

olarak, belirsizlik kümesi ise

$$\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}\in U=\left\{\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\mu}\\ \bar{\sigma}\end{pmatrix}+\mathrm{P_u}:\ \left\|\mathrm{u}\right\|_2\le 1\right\} \tag{15}$$

biçiminde tanımlıdır (Pınar, 2006, 5).

Önerme : $V_0^*,\ \xi^*$ çifti, (14) probleminde optimaldir; eğer ve sadece, $\max_{(\mu,\,\sigma)} \phi\left(\mathrm{V}_0^*,\varepsilon^*,\ \mu,\sigma\right)=\ \phi\left(\mathrm{V}_0^*,\varepsilon^*,\ \mu_j,\sigma_j\right)$, olacak ve *j=1,...,r* *r* negatif olmayan sayılar $\alpha_j\ge 0$, $\sum_{j=1}^{r}\alpha_j=1$ olacak şekilde $1\le r\le 3$ için $\left(\mu_1,\sigma_1\right),...,\left(\mu_r,\sigma_r\right)$ çiftleri varsa; öyle ki

$$\xi^*=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j Cov_j\left(H,X_1\right)\Big/\sum_{j=1}^{r}\alpha_j Var_j\left(H,X_1\right) \tag{16}$$

$$V_0^*=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j E_j\left(H\right)-\xi^*\sum_{j=1}^{r}\alpha_j E_j\left(\Delta X\right) \tag{17}$$

dır. Burada;

$$E_j\left(H\right)=\ \mathrm{E}\left(\mathrm{H}\left(\mu_{\mathrm{j}},\sigma_{\mathrm{j}}\right)\right),\ E_j\left(\Delta X\right)=\ \mathrm{E}\left(\Delta\mathrm{X}\left(\mu_{\mathrm{j}},\sigma_{\mathrm{j}}\right)\right)$$

$$\mathrm{Cov}_j\left(H,X_1\right)=\ \mathrm{Cov}\left(H\left(\mu_{\mathrm{j}},\sigma_{\mathrm{j}}\right),X_1\left(\mu_{\mathrm{j}},\sigma_{\mathrm{j}}\right)\right)\qquad j=1,...,r$$

dır.

İspat: Sabit μ,σ değerleri için, V_0,ξ 'ın fonksiyonu olan $g_Z=\left\{\left[\left(X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right)-K\right)_+ -V_0-\varepsilon\,X_0\left(\mu+\sigma Z\right)\right]^2\right\}$, V_0,ξ da birlikte konvekstir ve Z etrafında beklenen değer konveksliği korumaktadır. Bir konveks fonksiyonun noktasal supremumu aynı zamanda konveks bir fonksiyon olduğundan, μ,σ etrafında maksimizasyon V_0,ξ da fonksiyonun konveks olmasını sağlar. Demyanov ve Malozemov (1990, 196-197)'e göre $V_0^*,\ \xi^*,$ (14) probleminde optimaldir, öyle ki;

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \left(\frac{\partial E_z \left[g_Z \left(\mu_j, \sigma_j, \mathrm{V}_0^*, \xi^* \right) \right]}{\partial \xi^*} \right) = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \left(\frac{\partial E_Z \left[g_Z \left(\mu_j, \sigma_j, \mathrm{V}_0^*, \xi^* \right) \right]}{\partial V_0^*} \right) = 0 \tag{19}$$

formülleri çözüldüğünde (16) ve (17) kolaylıkla elde edilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde öncelikle, varlık fiyatının hareketinin $X_1 = X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right)$ stokastik modeline dayandığı varsayımı altında tek periyot için klasik riskten korunma probleminin optimizayonu yapılacaktır. σ oynaklık parametresinin bazı değerleri için çalışmanın ikinci bölümünde elde edilen optimal ξ, V_0 değerleri ve $E\left(H - V_0 - \xi\Delta X\right)^2$ amaç fonksiyonu değerleri verilecektir.

Sonraki aşamada; σ oynaklık parametresinin kesin olarak bilinmediği; sadece hangi aralıkta değer aldığı bilindiği durumda dayanıklı riskten korunma probleminin optimizasyonu ele alınacaktır.

Son olarak elde edilen klasik ve dayanıklı çözümler amaç fonksiyonuna verdikleri değerler açısından karşılaştırılacaktır.

İlk olarak, çalışmanın ikinci bölümü, 2.2 kısımında, varlık fiyatının hareketinin $X_1 = X_0\left(1+\mu+\sigma Z\right)$ modeline dayandığı varsayımı altında, $\min\limits_{V_0,\xi} = E\left(C_1 - C_0\right)^2 = E\left(H - V_0 - \xi\Delta X\right)^2$ probleminin optimal çözümü yazarlar tarafından,

$$\xi = \left(\frac{\left(\begin{array}{l} X_0^2\sigma^2\left(1-F_Z\left(b\right)+bf_Z\left(b\right)\right)+X_0^2\sigma\left(1+\mu\right)f_Z\left(b\right) \\ -KX_0\sigma\left(1-F_Z\left(b\right)\right)X_0\left(1+\mu\right) \end{array} \right)}{X_0^2\sigma^2} \right) \tag{20}$$

olarak, portföyün değeri ise

$$V_0 = X_0\left(1+\mu\right)\left(1-F_Z\left(b\right)\right)+X_0\sigma f_Z\left(b\right)-K\left(1-F_Z\left(b\right)\right)-\xi X_0\mu \tag{21}$$

olarak elde edildiği hatırlatılsın. Çalışmada; $X_0 = 10$, $K = 9$, $\mu = 0.1$, $0.1 \le \sigma \le 0.2$ değerleri keyfi olarak alınmıştır. Bu varsayımlar altında, bazı σ değerleri için optimal çözümler ξ, V_0 ve Z amaç fonksiyonu değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. k=0 zamanında optimal riskli varlık miktarı, portföyün değeri ve amaç fonksiyonu değerleri

σ	ξ	V_0	Z
0.10	0.9772	1.0312	0.0052
0.11	0.9655	1.0495	0.0101
0.12	0.9522	1.0716	0.0174
0.13	0.9380	1.0968	0.0273
0.14	0.9234	1.1248	0.0399
0.15	0.9088	1.1548	0.0553
0.16	0.8944	1.1866	0.0735
0.17	0.8803	1.2198	0.0944
0.18	0.8667	1.2541	0.1180
0.19	0.8537	1.2893	0.1442
0.20	0.8413	1.3253	0.1729

İkinci aşamada, kabul edilen değerler altında 4. Bölümde (14) problemi olarak tanımlı problemde, sadece oynaklığın bilinmediği varsayılarak,

$$\min_{V_0,\,\xi}\ \max_{\sigma}\ E_Z\left\{\left[\left(H=\left(X_1-K\right)_+\right)-V_0-\xi\, X_0\left(\mu+\sigma Z\right)\right]^2\right\} \tag{22}$$

dayanıklı optimizasyon probleminin optimal çözümü ele alındı. (Pınar, 2006) yaklaşımı olan ilgili önermenin uygulanmasıyla elde edilen optimal çözüm Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Problem (22) için optimal çözüm

σ	$\left(\xi^*,V_0^*\right)$	Z
0.20	(0.8413,1.3253)	0.1729

Optimal çözümün, oynaklığın bazı farklı değerleri için amaç fonksiyonuna verdiği değerler Tablo 3'de verilmiştir.

Tablo 3. Optimal çözümün, oynaklığın bazı farklı değerleri için amaç fonksiyonu değerleri

σ	$\left(\xi^*=0.8413,V_0^*=1.3253\right)$ için Z amaç fonksiyonu değerleri
0.10	0.0306
0.11	0.0322
0.12	0.0346
0.13	0.0381
0.14	0.0431
0.15	0.05
0.16	0.0591
0.17	0.0796
0.18	0.0847
0.19	0.1016
0.20	$\max_{0.1\le\sigma\le 0.2} E_Z\left\{\left[H-V_0-\xi\,\Delta X\right]^2\right\}=0.1729$

Bazı (ξ, V_0) değerleri için amaç fonksiyonunun en büyük değerleri Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Bazı riskli varlık miktarı, portföyün başlangıç değerleri için, amaç fonksiyonunun aldığı en büyük değerler

(ξ, V_0)	$\max\limits_{0.1\le\sigma\le 0.2} E_Z\left\{\left[H - V_0 - \xi\,\Delta X\right]^2\right\}$
(0.9862,1.0217)	0.2718
(0.9665,1.0495)	0.2583
(0.9522,1.0716)	0.2425
(0.9380,1.0968)	0.2277
(0.9234,1.1248)	0.2139
(0.9088,1.1548)	0.2017
(0.8944,1.1866)	0.1915
(0.8803,1.2541)	0.1834
(0.8667,1.2541)	0.1776
(0.8537,1.2893)	0.1741
(0.8413,1.3253)	$\min\limits_{V_0,\xi}\max\limits_{0.1\le\sigma\le 0.2} E_Z\left\{\left[H - V_0^* - \xi^*\Delta X\right]^2\right\} =$ 0.1729

Her bir σ için amaç fonksiyonun klasik ve dayanıklı çözümde aldığı değerler ve farkları Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Her bir oynaklık değeri için klasik ve dayanıklı çözümlerin amaç fonksiyonu değerleri ve farkları

σ	ξ	V_0	Z_0	Z_1 (0.8413,1.3253) için	$Z_1 - Z_0$
0.10	0.9772	1.0312	0.0052	0.0487	0.0435
0.11	0.9655	1.0495	0.0101	0.0517	0.0416
0.12	0.9522	1.0716	0.0174	0.0555	0.0381
0.13	0.9380	1.0968	0.0273	0.0604	0.0331
0.14	0.9234	1.1248	0.0399	0.0671	0.0272
0.15	0.9088	1.1548	0.0553	0.0761	0.0208
0.16	0.8944	1.1866	0.0735	0.0880	0.0145
0.17	0.8803	1.2198	0.0944	0.1032	0.0088
0.18	0.8667	1.2541	0.1180	0.1222	0.0042
0.19	0.8537	1.2893	0.1442	0.1453	0.0011
0.20	0.8413	1.3253	0.1729	0.1729	0

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tablo 1'e göre, σ oynaklık değeri arttıkça portföyün değeri V_0 değeri de artmaktadır. Tablo 5, bazı $0.1 \leq \sigma \leq 0.2$ değerleri için, elde edilen $\left(\xi^* = 0.8413, V_0^* = 1.3253\right)$ dayanıklı çözümünün ve klasik çözümlerin amaç fonksiyonuna verdiği değerleri içermektedir. σ oynaklığının kesin olarak bilindiği durumda amaç fonksiyonunun aldığı değer Z_0, belirsiz olduğu durumda, $\left(\xi^* = 0.8413, V_0^* = 1.3253\right)$ için amaç fonksiyonunun değeri Z_1 olarak tanımlanmıştır. Tablo 5'e göre, $Z_1 - Z_0$ farkları incelendiğinde; elde edilen değerlerin küçük olduğu gözlemlenmiştir. Burada, σ oynaklığının kesin olarak bilindiği durumda ve belirsizlik durumunda elde edilen klasik ve dayanıklı çözümlerin birbirine yakın olduğu söylenebilir. Böylelikle elde edilen $\left(\xi^* = 0.8413, V_0^* = 1.3253\right)$ çözümünün, parametre belirsizliğinden etkilenmediği, parametre belirsizliğine karşı dayanıklı bir çözüm olduğu rahatlıkla söyelenebilir. Sonraki çalışmalarda, sapma ve oynaklığın aynı anda belirsizlik gösterdiği durum incelenebilir. Farklı stokastik modeller ele alınabilir. Tek periyot durumunda yapılan çalışma, çoklu periyot durumu için genelleştirilebilir.

5. KAYNAKLAR

Ahn, H., Muni, A., Swindle, G., 1997. Misspecified Asset Price Models and Robust Hedging Strategies, Applied Mathematical Finance Vol. 4, 21-36.

Ahn, H., Muni, A., Swindle, G., 1999. Optimal Hedging Strategies for Misspecified Asset Price Models, Applied Mathematical Finance, Vol.6, 197-208.

Avellaneda, M., Levy., A., Paras, A., 1995. Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities, Applied Mathematical Finance, Vol. 2, 73-88.

Alpan, F., 1999. Örneklerle Futures Anlaşmalar ve Opsiyonlar. Literatür Yayınları, İstanbul.

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., Nemirovski, A., 2009. Robust Optimization, Princeton University Press, USA.

Coleman, T. F., Li, Y., Patron, M. C., 2003. Discrete Hedging Under Piecewise Linear Risk Minimization, Journal of Risk, Vol. 5, 39-65.

Dem'yanov, V. F., Malozemov, V. N., 1990. Inroduction to Minimax. Dover Publications, New York.

Föllmer, B. Y., Schweizer, M., 1989. Hedging by Sequential Regression: An Introduction to the Mathematics of Option Trading, ASTIN Bulletin, Vol.18, No.2; 147-160.

Pınar, M. Ç., 2006. On Robust Quadratic Hedging of Contingent Claims in Incomplete Markets Under Ambiguous Uncertainty. Presented at the First Conference on Advanced Mathematical Methods in Finance (Bilkent University 2006-Princeton University 2008).

Schweizer, M., 2001. Variance-optimal Hedging in Discrete Time. Mathematics of Operation Research, Vol. 20, 1-32.

Winkler R. L., Roodman G., Britney, R., 1972. The Determination of Partial Moments, Management Science, Vol. 19, No. 3, 290-296.

ROBUST OPTIMIZATION APPROACH FOR ONE PERIOD QUADRATIC OPTION HEDGING PROBLEM UNDER THE UNCERTAINTY OF PARAMETERS IN INCOMPLETE MARKET

ABSTRACT

In this study, first the quadratic hedging problem for one period is considered in an incomplete market. Optimal solution of the problem obtained by Föllmer-Schweizer (1989) is given. Next, the optimal solution of the problem is obtained by the authors with a stochastic model proposed by Pınar (2006). Some special calculations obtained in the same study were included. In another stage, the robust optimization approach, which is suggested in the related work is discussed for the situation where the model parameters are subject to uncertainty. In the last stage, an application of this approach is included for the situation where only the volatility is unknown. Numerical results show that classical solution obtained for the situation when volatility is known and the solution obtained under the uncertainty situation give similar values at the objective function. As a result, we can say that, the solution obtained under the uncertainty situation is robust to volatility variation.

Keywords: Uncertainty, Robust optimization, Quadratic option hedging.