ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

Bilim ve Teknoloji Dergisi A-Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik
Cilt: 14 Sayı: 3 2013
Sayfa: 213-229

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

Engin YILDIZTEPE[1], A.Fırat ÖZDEMİR[2]

ASİMETRİK VE AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMLARIN KONUM PARAMETRESİNİN BOOTSTRAP GÜVEN ARALIKLARI İÇİN BİR BENZETİM ÇALIŞMASI

ÖZ

Bootstrap yöntemi, kestiricinin örnekleme dağılımı bilinmediği durumlarda çıkarsama yapabilmemizi sağlayan modern bir istatistiksel araçtır. Tüm bootstrap yöntemlerinin temel fikri aynı olsa da literatürde farklı varyasyonları yer almaktadır. Bu çalışmada, detaylı bir Monte Carlo benzetimi ile asimetrik ve ağır kuyruklu dağılımlar için, yaygın olarak kullanılan dört bootstrap güven aralığı yönteminin kapsama oranı araştırılmıştır. Dayanıklı kestiriciler için yüzdelik bootstrap yöntemiyle elde edilen kapsama oranları birçok durum için nominal değere yakın bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler*:* Bootstrap, Güven aralığı, Kapsama oranı, Dayanıklı konum ölçüleri

A SIMULATION STUDY OF BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVALS FOR THE LOCATION OF ASYMMETRIC AND HEAVY TAILED DISTRIBUTIONS

ABSTRACT

Bootstrap methodology is a modern statistical tool which enables us making statistical inference when the sampling distribution of the estimator is not known. Although the underlying idea is the same in all bootstrap methods, one might come across so many variations in the literature. In this study, the coverage accuracy of four most commonly used bootstrap confidence interval methods was assessed for various asymmetric and heavy tailed distributions with an exhaustive Monte Carlo simulation. In most of the cases, it has been found that the coverage accuracy of bootstrap percentile method is close to nominal for robust estimators of location.

Keywords: Bootstrap, Confidence interval, Coverage accuracy, Robust estimators of location

[1,] Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Tınaztepe Yerleşkesi, Buca, İzmir, Türkiye
Tel: 0 232 301 86 04, E-posta: engin.yildiztepe@deu.edu.tr

[2,] Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Tınaztepe Yerleşkesi, Buca, İzmir, Türkiye
Tel: 0 232 301 85 52, E-posta: firat.ozdemir@deu.edu.tr

Geliş: 28 Kasım 2012 **Düzeltme:** 19 Nisan 2013 **Kabul:** 21 Haziran 2013

1. GİRİŞ

Kitle ortalaması için güven aralığı bulmakta kullanılan en bilindik ve yaygın yöntem olan t güven aralığının kitle normal dağıldığında (1-α) kapsama oranına sahip olduğu, normal olmayan kitle için kapsama oranının yaklaşık (1-α) olduğu bilinmektedir. Ancak kitlenin dağılımı asimetrik olduğunda kapsama oranı düşmektedir (Boos ve Hughes-Oliver, 2000). Verilerin asimetrik ve ağır kuyruklu bir kitleden geldiği durumlarda dayanıklı konum ölçüleri kullanılabilir. Birçok dayanıklı konum ölçüsünün standart hatasının analitik yolla hesaplanamaması nedeniyle güven aralıklarının bulunmasında bootstrap yöntemleri kullanılabilir (Wilcox, 2012). Parametrik çıkarsama elde edilmesinin çok zor olduğu veya analitik bir çözümün bulunmadığı durumlarda, kestiricinin standart hatasının hesaplanması, güven aralıklarının bulunması ve hipotez testinde bootstrap yöntemi kullanılabilir.

Bootstrap, ilk olarak Efron (1979) tarafından Quenouille-Tukey jackknife yöntemine alternatif olarak önerilen bir yeniden örnekleme yöntemidir. Yeniden örnekleme yöntemlerinde örneklem kitle gibi düşünülüp bu örneklemden tekrarlı çekilişle yeni örneklemler üretilir. Efron "bootstrap" olarak isimlendirdiği yönteme ilişkin çalışmasında bir istatistiğin bootstrap dağılımını elde etmek için teorik hesaplamaların, Monte Carlo yaklaşımının veya Taylor seri açılımının kullanılabileceğini belirtmiş ve bu durumlara örnekler vermiştir (Efron, 1979). Takip eden yıllarda bootstrap ile standart hatanın hesaplanması, güven aralıklarının belirlenmesi, hipotez testlerinde, regresyon çözümlemesinde ve zaman serilerinde kullanılması konularını içeren birçok çalışma yapılmıştır. Standart hatanın ve güven aralıklarının bootstrap örnekleme ile bulunmasına ilişkin makalesinde Efron, yüzdelik bootstrap (bootstrap percentile), yanlılığı düzeltilmiş yüzdelik bootstrap (Bias Corrected – BC) ve bootstrap-t yöntemlerini tanımlamıştır (Efron, 1981). Efron ve Tibshirani (1986) yaptıkları çalışmada standart hatanın bootstrap kestirimi ve bootstrap güven aralıklarını örneklerle ele almışlar, bootstrap tekrar sayısının ne olması gerektiğini tartışmışlardır. BC bootstrap yönteminin geliştirilmiş hali olan yanlılığı düzeltilmiş hızlandırılmış (Bias Corrected Accelerated – BCa) bootstrap yöntemi ise yine Efron tarafından önerilmiştir (Efron, 1987). Bootstrap güven aralıkları araştırmalarının verildiği ve tartışıldığı bir diğer çalışmada DiCiccio ve Efron (1996), bootstrap güven aralıklarının parametrik ve parametrik olmayan kullanımlarını incelemişlerdir. 1990'lı yıllarda bilgisayarların hesaplama gücünün artmasıyla bootstrap yöntemlerinin popülerliği ve uygulanabilirliği artmıştır. Regresyon çözümlemesi, zaman serileri gibi konularda bootstrap prensibine dayalı yöntemler geliştirilmiştir. Bootstrap yöntemi günümüzün çok işlemcili bilgisayarları sayesinde mühendislik, genetik, meteoroloji gibi bilimlerde de yaygın olarak kullanılan bir yeniden örnekleme yöntemi olmuştur. Bootstrap metodolojisindeki gelişmelerin incelendiği ve tartışıldığı bir çalışma olarak Davison vd. (2003) incelenebilir. Bootstrap temel prensipleri ve yöntemleri hakkında detaylı bilgi için Efron ve Tibshirani (1993), Davison ve Hinkley (1997) kaynaklarına başvurulabilir.

Özellikle kitle dağılımının çarpık olduğu durumda konum parametresi için güven aralıkları kestirimi konusunda birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda, bootstrap yöntemlerinde içinde olduğu farklı yöntemler ile elde edilen güven aralığı kestirimleri, kitle parametre değerini kapsama oranlarına göre (coverage accuracy) karşılaştırılmıştır (Zhou ve Gao, 2000), (Zhou ve Dinh, 2005), (Kuonen, 2006), (Banik ve Kibria, 2010). Yapılan çalışmalar incelendiğinde genellikle seçilen bir konum ölçüsünün farklı kitlelerden gelen örneklem için farklı yöntemlerle elde edilen güven aralıklarının performanslarının karşılaştırıldığı görülmektedir. Bu çalışmada ise örneklemin çekildiği kitlenin şekline ve kullanılan kestiriciye bağlı olarak bootstrap güven aralıkları yöntemleri arasında bir farklılık olup olmadığı sorusuna cevap aranmaktadır.

Gerçekleştirilen benzetim çalışması ile dört farklı bootstrap güven aralığı yöntemi kapsama oranı açısından karşılaştırılmıştır. Benzetim çalışması R istatistiksel programlama dili kullanılarak yapılmıştır. Kullanılan yöntemler ve tablolarda kullanılan kısaltmaları şu şekildedir; bootstrap-normal yaklaşım (bs-norm), yüzdelik bootstrap (bs-yüzd), bootstrap-t (bs-t) ve bootstrap BCa (bs-BCa). Çalışmada rassal veriler standart normal dağılımdan ve g&h dağılımlarından çekilmiştir. Ayrıca iki farklı gerçek veri seti de kullanılmıştır. Konum ölçüleri olarak altı dayanıklı kestirici (budanmış ortalama (γ=0.1, 0.2, 0.25), medyan, tek-adım M-tahmin edicisi, düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi) ve örneklem ortalaması alınmıştır.İkinci bölümde ilgilenilen bootstrap güven aralıklarından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde kullanılan dayanıklı kestiriciler anlatılmıştır. Dördüncü bölümde yapılan benzetim çalışması ve sonuçları, son bölümde ise bulunan sonuçlara ait yorumlar yer almaktadır.

2. BOOTSTRAP GÜVEN ARALIKLARI

$i = 1,...,n$ olmak üzere Xi bilinmeyen bir olasılık dağılımına sahip kitleden seçilmiş rassal bir örneklem ve ilgilenilen kitle parametresi θ, örneklemden elde edilen kestirim $\hat{\theta}$ olsun. Efron tarafından 1979'da önerilen bootstrap yöntemi, $\hat{\theta}$'in standart hatasının analitik yolla hesaplanamadığı veya hesaplamanın çok karmaşık olduğu durumlarda $\hat{\theta}$'in standart hatasının kestirilmesini amaçlar.

Bootstrap örneklemleri, n genişliğindeki orijinal örneklemden yerine koyarak yapılan rassal çekilişlerle belirlenir ve orijinal örneklemle aynı genişlikte olur. Bir başka ifade ile {x1, x2,…,xn} birimlerinden oluşan bir örneklemden iadeli çekilişle belirlenen x* rassal örneklemlerine bootstrap örneklemleri denir. Bu işlem B kez tekrar edilir ve her bir x* örnekleminden ilgilenilen istatistik $\hat{\theta}^*$ hesaplanır. Bu istatistiklerin dağılımı bootstrap dağılımını oluşturur. Bulunan bootstrap dağılımı istatistiğin standart hatasını ve yanlılığını kestirip örnekleme dağılımının şeklini, yayılımını ve konumunu belirlemek için kullanılır. Bu işlemin adımlarını şöyledir;

1) $\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$ bilinmeyen bir olasılık dağılımına sahip kitleden seçilmiş n genişliğinde rassal bir örneklem olsun. Bu örneklemden iadeli olarak yine n genişliğinde B tane rassal örneklem çekilir.

2) Her bir bootstrap örneklemden ilgilenilen istatistik hesaplanarak bootstrap dağılımı oluşturulur.
$$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*,...,\hat{\theta}_b^*,...,\hat{\theta}_B^*$$

3) $\hat{\theta}$'in standart hatasının kestirimi,

$$\hat{se}^*_{boot} = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}^*(.)\right)^2}{B-1}} \tag{1}$$

ile hesaplanır. Burada;

$\hat{\theta}_b^*$: b. bootstrap örneklemden hesaplanan istatistik ve $\hat{\theta}^*(.) = \sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}_b^* \Big/ B$

4) $\hat{\theta}$'in yanlılığının (bias) kestirimi $\hat{bias}^* = \hat{\theta}^*(.) - \hat{\theta}$ ile bulunur.

Bu yaklaşım parametrik olmayan bootstrap olarak isimlendirilir. Parametrik bootstrap yaklaşımında ise örneklemin çekildiği kitlenin dağılımı parametrik bir modelle ifade edilebiliyordur. Bu durumda bootstrap örneklemleri örneklem verilerinden yerine koyarak yapılan çekilişle değil parametrik modelden çekilir. Standart hatanın bootstrap kestiriminde B'nin 200 alınmasının yeterli olduğu ancak bootstrap güven aralıkları için 1000 ile 2000 arasında örneklem çekmenin gerektiği ifade edilmiştir (Efron ve Tibshirani, 1993). Günümüzde bootstrap ile güven aralıklarının kestirimi için önerilen birçok yöntem bunmaktadır. Bu çalışmada ise temel yöntemler olarak ifade edilebilecek en çok kabul gören dört yaklaşıma yer verilmiştir.

2.1 Normal Yaklaşım ile Bootstrap Güven Aralıkları

İlgilenilen istatistiğin standart hatasının bilinmediği ancak örnekleme dağılımının normal dağılım gösterdiği varsayımı altında kullanılabilir. Bu yaklaşımda bootstrap yöntemi standart hatanın bir kestirimini sağlar. θ için iki yönlü yüzde (1-α) bootstrap standart normal güven aralığı;

$$\left(\hat{\theta} - \hat{\text{bias}}^*\right) \pm z_{1-(\alpha/2)} \hat{\text{se}}^*_{\text{boot}} \tag{2}$$

ile elde edilir. Burada $z_{1-(\alpha/2)}$, standart normal dağılımda *1-(α/2)*'lik alana karşılık gelen z değeridir. Bu yöntemin arka planında yatan varsayım nedeniyle çok tercih edilmediği ve uygulamada yerini yüzdelik yaklaşıma verdiği söylenebilir.

2.2 Yüzdelik Bootstrap Güven Aralıkları

Bu yöntemde güven aralığının sınırları $\hat{\theta}$'in bootstrap dağılımı ile belirlenir. θ için iki yönlü yüzde (1-α) yüzdelik bootstrap güven aralığı hesaplama adımları;

1) Bootstrap örneklemlerden hesaplanan kestirim değerleri artan sırada sıralanır;

$$\hat{\theta}^*_1, \ldots, \hat{\theta}^*_i, \hat{\theta}^*_j, \ldots, \hat{\theta}^*_B \qquad \hat{\theta}^*_i < \hat{\theta}^*_j$$

2) Yüzde (1-α) güven aralığı için *k=B(α/2)* olmak üzere *k.* sıradaki $\hat{\theta}^*$ değeri alt sınır, *(B-k).* sıradaki $\hat{\theta}^*$ değeri üst sınır olarak alınır. *k* değerinin tam sayı olmaması durumunda *k*, (en büyük tamsayı) ≤ [*(B+1).(α/2)*] olarak alınır.

3) θ için iki yönlü yüzde (1-α) yüzdelik bootstrap güven aralığının sınırları $(\hat{\theta}^*_k,\ \hat{\theta}^*_{B-k})$ ile elde edilir.

2.3 Bootstrap-t Güven Aralıkları

Varsayımlar sağlandığında, güven aralığı bulmakta kullanılan parametrik yöntemlerde z veya t tablosuna ihtiyaç vardır. Bu metotta ise eldeki veri için geçerli olabilecek bir tablo oluşturulur ve güven aralığının oluşturulmasında kullanılır. İşlem adımları;

1) Her bir bootstrap örneklemi için *t** değerleri hesaplanır.

$$t^*_b = \frac{\hat{\theta}^*_b - \hat{\theta}}{\hat{\text{se}}^*_b} \qquad b = 1,2,\ldots,B \tag{3}$$

Burada ilgilenilen istatistik için her bir bootstrap örneklemden elde edilen standart hatanın kestirimine ihtiyaç vardır. Kestiricinin standart hatası bilinmiyorsa veya hesaplanması çok zahmetli ise elde edilen her bir bootstrap örnekleme tekrar bootstrap uygulanması ve bu yolla standart hatanın elde edilmesi sağlanır. Çift (double) bootstrap adı verilen bu yöntem hesaplama yükü ve harcanan zaman açısından oldukça masraflıdır. Nankervis (2005) tarafından yapılan çalışmada çift bootstrap için hesaplama zamanını azaltan algoritmalar tartışılmıştır.

2) t^* değerleri artan sırada sıralanır.

3) Burada $\hat{t}^*_{\alpha/2}$ değeri *k=B.(α/2)* olmak üzere *k.* sıradaki t^* değeri ve $\hat{t}^*_{1-(\alpha/2)}$ değeri *(B-k).* sıradaki t^* değeri olarak alınır.

4) θ için iki yönlü yüzde (1-α) bootstrap-t güven aralığı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$(\hat{\theta}-\hat{t}^*_{1-(\alpha/2)}.\hat{se}^*_{boot},\hat{\theta}-\hat{t}^*_{\alpha/2}.\hat{se}^*_{boot}) \tag{4}$$

Efron ve Tibshirani (1993) bootstrap-t'nin kapsama olasılıklarının teorik olarak iyi olduğunu ancak uygulamada değişken sonuçlar verebildiğini belirtmişlerdir.

2.4 Yanlılığı Düzeltilmiş ve Hızlandırılmış Güven Aralıkları

Efron tarafından önerilen bir başka bootstrap yöntemi de *bias corrected accelerated* bootstrap yöntemidir (Efron, 1987). Bu yönteme isminden yola çıkarak BCa bootstrap denilmektedir. Yüzdelik bootstrap yönteminin hem teoride hem de uygulamada görülen yetersizliklerinin giderilmesi amacıyla geliştirilen bu yöntemin kapsama oranlarında küçük örneklemler için değişkenlik görülebileceği de belirtilmiştir (Efron ve Tibshirani, 1993). Yüzdelik bootstrap yönteminden yola çıkılarak geliştirilen yöntemde $\hat{a}$ ve $\hat{z}_0$ ile gösterilen sırasıyla *hızlandırma* ve *yanlılık düzeltmesi* adı verilen değerler kullanılmaktadır. $\hat{a}$ ve $\hat{z}_0$ değerlerinin sıfır olduğu durumlarda BCa güven aralığı yüzdelik bootstrap ile bulunanla aynı olur. θ için iki yönlü yüzde (1-α) BCa güven aralığı $\left(\hat{\theta}^*_{\alpha1}\ ,\ \hat{\theta}^*_{\alpha2}\right)$ olsun. Burada α_1 ve α_2 (5) ve (6)'daki gibi bulunur.

$$\alpha_1=\Phi\left(\hat{z}_0+\frac{\hat{z}_0+z_{\alpha/2}}{1-\hat{a}(\hat{z}_0+z_{\alpha/2})}\right) \tag{5}$$

$$\alpha_2=\Phi\left(\hat{z}_0+\frac{\hat{z}_0+z_{1-(\alpha/2)}}{1-\hat{a}(\hat{z}_0+z_{1-(\alpha/2)})}\right) \tag{6}$$

Burada $\Phi(.)$ standart normal birikimli dağılım fonksiyonu ve $z_{1-(\alpha/2)}$, standart normal dağılımda *1-(α/2)*'lik alana karşılık gelen z değeridir. Örneğin; $\Phi(1.96)=0.975$, $z_{0.975}=1.96$. Yanlılık düzeltmesi değeri $\hat{z}_0$;

$$\hat{z}_0=\Phi^{-1}\left(\frac{\#\left\{\hat{\theta}^*<\hat{\theta}\right\}}{B}\right) \tag{7}$$

ile bulunur. Burada $\Phi^{-1}(.)$ standart normal birikimli dağılım fonksiyonunun tersidir. Örneğin; $\Phi^{-1}(0.975)=1.96$. Çarpıklığa bağlı bir ölçü olan $\hat{a}$, jackknife kestirimi kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(-i)})^3}{6\left\{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(-i)})^2\right\}^{3/2}} \tag{8}$$

Burada $\hat{\theta}_{(-i)}$ i. gözlem çıkartılarak hesaplanmış $\hat{\theta}$ değerini, $\hat{\theta}_{(.)}$ ise bulunan $\hat{\theta}_{(-i)}$ değerlerinin ortalamasını gösterir. Bootstrap güven aralıkları hakkında detaylı bilgi için (Carpenter ve Bithell, 2000) incelenebilir.

3. DAYANIKLI KONUM ÖLÇÜLERİ

3.1 Budanmış Ortalama

γ budama yüzdesi ile hesaplanan kitle budanmış ortalaması

$$\mu_t = \frac{1}{1-2\gamma}\int_{x_\gamma}^{x_{1-\gamma}} x\,dF(x) \tag{9}$$

biçimindedir. Burada x_γ ve $x_{1-\gamma}$,γ ve 1-γ yüzdelikleridir $(0 \le \gamma < 0.5)$.

μ_t kitle budanmış ortalamasının kestiricisi örneklem budanmış ortalaması aşağıda verildiği gibi hesaplanır. $X_1,...,X_n$ bir rassal örneklem olsun ve $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$ sıralanmış bir rassal örneklem olsun. $g = [\gamma n]$ ve $[\gamma n]$, γn çarpımının aşağıdaki tam sayıya yuvarlanmış hali ise örneklem budanmış ortalaması

$$\overline{X}_t = \frac{X_{(g+1)} + ... + X_{(n-g)}}{n-2g} \tag{10}$$

ile hesaplanır (e.g. Wilcox, 2012).

3.2 Tek-Adım M-Kestiricisi

$\xi(X-\mu_m)$ bir X değişkeni ile bilinmeyen μ_m sabiti arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyon olsun. ψ, bu fonksiyonun μ_m 'ye göre türevi olsun. Burada μ_m 'in bir fonksiyonu olan ve türevi olan $E[\xi(X-\mu_m)]$ fonksiyonları ile ilgilenilmektedir. Bir konum ölçüsü tanımlarken genel yaklaşım $\xi(X-\mu_m)$ fonksiyonunu en küçükleyen μ_m değerinin seçilmesidir. Genel olarak μ_m , $E[\psi(X-\mu_m)] = 0$ eşitliğini sağlar.

$\xi(X-\mu_m) = (X-\mu_m)^2$ ise $E[\psi(X-\mu_m)] = 0$ ve $\mu_m = \mu$, kitle aritmetik ortalaması olur. ξ ve ψ için pek çok öneri yapılmıştır. Bu çalışmada Huber'in ψ fonksiyonu kullanılmıştır (Huber, 1981).

$$\psi(x) = \max\{-k, \min(k,x)\} \tag{11}$$

Huber'in M-konum ölçüsünün tahmini genellikle Newton-Raphson gibi iteratif bir tahmin yöntemi ile yapılır. Tek bir iterasyonda bile ortaya çıkan kestiricinin asimptotik özellikleri iyidir (Serfling, 1980). Tek iterasyon tek-adım M-kestiricisini verir.

$$\hat{\mu}_m = \frac{1.28MADN(i_2 - i_1) + \sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} X_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \tag{12}$$

Burada, M örneklem medyanı olmak üzere,

$$MADN = MAD/0.6745$$

$$MAD = Medyan\{|X_1 - M|, |X_2 - M|, ..., |X_n - M|\}$$

i_1, $\frac{X_i - M}{MADN} < -1.28$ koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını,

i_2 ise $\frac{X_i - M}{MADN} > 1.28$ koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını gösterir.

Tek-adım M-kestiricisi ile budanmış ortalama arasındaki temel fark, tek-adım M-kestiricisinin budanacak gözlem sayısını eldeki veriye göre deneysel olarak belirlemesi, budanmış ortalamanın ise önceden saptanmış sabit bir budama yüzdesine göre belirlemesidir. Tek-adım M-kestiricisinin budanmış ortalamaya göre kolaylıkla görülebilen bir avantajı örneklemin seçildiği kitleye göre budanacak gözlem sayısında değişiklik yapabilmesidir. Kitle hafif kuyruklu bir dağılım ise çok az gözlemin budanması veya hiçbir gözlemin budanmaması doğru tercih olabilir. Aynı şekilde, kitle sağdan çarpık ise sağdan daha çok gözlemin budanması daha doğru bir tercih olabilir (Wilcox, 2001).

3.3 Düzeltilmiş Tek-Adım M-Kestiricisi

Tek-adım M-kestiricisindeki $1.28(MADN)(i_2 - i_1)$ terimi Newton Raphson yönteminde ortadan kalkar. Bu durum düzeltilmiş tek-adım M-kestiricisini ortaya çıkarır. Düzeltilmiş tek-adım M-kestiricisi aykırı değer olarak belirlenmeyen gözlemlerin ortalamasını hesaplar. Normal dağılım altında etkinliğinin artması için tek-adım M-kestiricisi tarafından kullanılan aykırı değer belirleme kuralı değiştirilmiştir. Kestirici

$$\hat{\mu}_{mom} = \frac{\sum_{i=i_1+1}^{n-i_2} X_{(i)}}{n - i_1 - i_2} \tag{13}$$

biçimindedir. Burada i_1, $(X_i - M)/MADN < -2.24$, koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını i_2 ise $(X_i - M)/MADN > 2.24$ koşulunu sağlayan X_i gözlemlerinin sayısını gösterir (Hampel identifier) (Wilcox, 2012).

4. BENZETİM ÇALIŞMASI

Bu bölümde altı dayanıklı kestirici (budanmış ortalama (γ=0.1, 0.2, 0.25), medyan, tek-adım M-tahmin edicisi, düzeltilmiş tek-adım M-tahmin edicisi) ve örneklem ortalaması için parametrik olmayan bootstrap yöntemler ile elde edilen iki yönlü %95 güven aralıklarının performanslarının karşılaştırılması amacıyla bir benzetim çalışması düzenlenmiştir. Çalışmada güven aralıkları, kapsama oranı ve ortalama genişlik yönlerinden değerlendirilmiştir.

4.1 Benzetim Çalışmasının Tasarımı

Bu çalışmada kullanılan teorik dağılımlar standart normal dağılım ve farklı parametre değerleri ile iki g&h dağılımıdır. Örneklem genişlikleri n=20 ve 50 olarak alınmıştır. Bootstrap örneklem sayısının B=1500 alındığı çalışmada her durum için 3500 tekrar yapılmıştır. Bootstrap-t güven aralıkları hesaplanırken gereken ancak analitik formu bilinmeyen standart hata kestirimleri için ikinci düzey bootstrap uygulanmıştır. Standart hata kestirimi için bootstrap örneklem sayısı 500 alınmıştır. Kapsama oranı, parametrenin gerçek değerini içeren aralıkların sayısının tekrar sayısına bölünmesiyle elde edilmiştir. Kitle parametresinin gerçek değerinin, güven aralığının alt limitinin altında kalanların ve üst limitin üstünde kalanların sayılarının tekrar sayısına bölünmesiyle alt ve üst kapsama oranları elde edilmiştir. Güven aralıklarının ortalama genişliği de değerlendirme kriteri olarak alınmıştır. Nominal değere yakın kapsama oranı elde edilen güven aralıklarında daha küçük ortalama genişliğe sahip yöntem daha iyi olarak belirtilmiştir. Güven düzeyi, uygulamada en çok kullanılan %95 (α=0.05) olarak alınmıştır. Literatürdeki benzer çalışmalar da (Kuonen, 2005; Banik vd., 2010) incelenerek $(1-\alpha)\pm(0,2\alpha)$ aralığında olan kapsama oranları nominal değere yakın olarak kabul edilmiştir.

g&h dağılımı, çarpıklığın kontrol edilebileceği g ve basıklığın kontrol edilebileceği h parametreleri ile normal dağılımdan uzaklaşmayı derecelendirerek gözleme imkanı veren ve g=h=0 için standart normal dağılıma eşdeğer olan bir dağılımdır (Hoaglin, 1985). Çalışmada kullanılan g ve h değerleri ile elde edilen dağılımlara ait çarpıklık ve basıklık değerleri Tablo I'de verilmiştir.

Tablo 1. Kullanılan g&h dağılımlarına ait çarpıklık ve basıklık değerleri

g	**h**	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$
0	0	0	3
0.5	0.2	10.554	200.736
0.5	0.4	76.877	14091.46

4.2 Sonuçlar

Bu bölümde, gerçekleştirilen benzetim çalışmasının sonucunda elde edilen kapsama oranı değerleri ve güven aralıklarının ortalama genişlikleri verilmiştir. Nominal değere yakın olan kapsama oranları vurgulanmıştır.

Tablo 2. Kitle dağılımı Normal(0,1) iken gerçekleşen kapsama oranları

		n=20				**n=50**			
		bs-BCa	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**	**bs-BCa**	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**
μ	Kapsama	0,9251	**0,9500**	0,9274	0,9257	**0,9406**	**0,9480**	**0,9426**	**0,9414**
	Alt	0,0366	0,0263	0,0366	0,0363	0,0317	0,0266	0,0306	0,0294
	Üst	0,0383	0,0237	0,0360	0,0380	0,0277	0,0254	0,0269	0,0291
	Ort.Gen.	0,8503	0,9449	0,8453	0,8442	0,5478	0,5698	0,5472	0,5461
$\mu_{tr=0.1}$	Kapsama	**0,9409**	**0,9514**	**0,9431**	0,9314	**0,9503**	**0,9537**	**0,9503**	**0,9434**
	Alt	0,0309	0,0260	0,0297	0,0357	0,0251	0,0231	0,0243	0,0263
	Üst	0,0283	0,0226	0,0271	0,0329	0,0246	0,0231	0,0254	0,0303
	Ort.Gen.	0,9104	0,9828	0,9083	0,9062	0,5736	0,5892	0,5734	0,5718
$\mu_{tr=0.2}$	Kapsama	0,9374	**0,9457**	**0,9406**	0,9271	**0,9523**	**0,9531**	**0,9506**	**0,9426**
	Alt	0,0323	0,0271	0,0303	0,0351	0,0220	0,0206	0,0223	0,0257
	Üst	0,0303	0,0271	0,0291	0,0377	0,0257	0,0263	0,0271	0,0317
	Ort.Gen.	0,9436	1,0319	0,9422	0,9413	0,5960	0,6188	0,5960	0,5945
$\mu_{tr=0.25}$	Kapsama	**0,9414**	**0,9477**	**0,9434**	0,9257	**0,9491**	**0,9543**	**0,9506**	**0,9411**
	Alt	0,0294	0,0254	0,0286	0,0366	0,0226	0,0206	0,0223	0,0274
	Üst	0,0291	0,0269	0,0280	0,0377	0,0283	0,0251	0,0271	0,0314
	Ort.Gen.	0,9634	1,0697	0,9625	0,9623	0,6066	0,6343	0,6066	0,6052
Medyan	Kapsama	0,9374	0,9063	0,9386	0,9086	**0,9497**	0,9126	**0,9511**	0,9174
	Alt	0,0406	0,0491	0,0297	0,0480	0,0303	0,0420	0,0231	0,0391
	Üst	0,0220	0,0446	0,0317	0,0434	0,0200	0,0454	0,0257	0,0434
	Ort.Gen.	1,0703	1,2510	1,0521	1,1020	0,6906	0,7788	0,6949	0,7092
Tek adım-M	Kapsama	0,9366	**0,9566**	**0,9394**	0,9297	**0,9440**	**0,9497**	**0,9457**	0,9383
	Alt	0,0309	0,0223	0,0314	0,0351	0,0277	0,0260	0,0277	0,0306
	Üst	0,0326	0,0211	0,0291	0,0351	0,0283	0,0243	0,0266	0,0311
	Ort.Gen.	0,9139	1,0819	0,9084	0,9076	0,5720	0,5964	0,5718	0,5702
Düzeltilmiş Tek adım-M	Kapsama	0,9303	0,9157	**0,9566**	0,9189	**0,9397**	0,9374	**0,9549**	0,9377
	Alt	0,0354	0,0440	0,0206	0,0431	0,0274	0,0286	0,0206	0,0286
	Üst	0,0343	0,0403	0,0229	0,0380	0,0329	0,0340	0,0246	0,0337
	Ort.Gen.	1,0414	1,1029	1,0322	1,0332	0,6326	0,6387	0,6334	0,6319

Tablo 2' de Normal dağılan kitle için alınan sonuçlar görülmektedir. Normal dağılım durumunda bs-t ve bs-yüzdelik, n=20 için yedi kestiricinin beşinde başarılı sonuçlar vermişlerdir. bs-yüzdelik güven aralıklarının ortalama genişliği daha dardır. Örneklem genişliği 50 olduğunda bs-BCa ve bs-yüzdelik tüm kestiriciler için başarılıdır.

Tablo 3. Kitle dağılımı g&h(g=0.5,h=0.2) iken gerçekleşen kapsama oranları

		n=20				**n=50**			
		bs-BCa	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**	**bs-BCa**	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**
μ	Kapsama	0,8743	0,9083	0,8817	0,8797	0,9009	0,9171	0,9020	0,9006
	Alt	0,0977	0,0771	0,1074	0,1143	0,0723	0,0640	0,0877	0,0949
	Üst	0,0280	0,0146	0,0109	0,0060	0,0269	0,0189	0,0103	0,0046
	Ort.Gen.	1,6137	2,1716	1,4420	1,4616	1,0855	1,2623	0,9859	0,9941
$\mu_{tr=0.1}$	Kapsama	**0,9391**	**0,9511**	**0,9451**	**0,9480**	**0,9463**	**0,9431**	**0,9500**	**0,9500**
	Alt	0,0300	0,0340	0,0306	0,0443	0,0246	0,0291	0,0246	0,0369
	Üst	0,0309	0,0149	0,0243	0,0077	0,0291	0,0277	0,0254	0,0131
	Ort.Gen.	1,3307	1,3503	1,3053	1,3012	0,7373	0,7334	0,7352	0,7334
$\mu_{tr=0.2}$	Kapsama	**0,9397**	**0,9431**	**0,9414**	**0,9397**	**0,9466**	**0,9474**	**0,9494**	**0,9480**
	Alt	0,0297	0,0357	0,0294	0,0466	0,0251	0,0260	0,0237	0,0346
	Üst	0,0306	0,0211	0,0291	0,0137	0,0283	0,0266	0,0269	0,0174
	Ort.Gen.	1,1478	1,1829	1,1474	1,1485	0,6783	0,6869	0,6787	0,6764
$\mu_{tr=0.25}$	Kapsama	0,9386	**0,9440**	**0,9431**	0,9360	**0,9491**	**0,9517**	**0,9517**	**0,9460**
	Alt	0,0263	0,0334	0,0283	0,0494	0,0214	0,0231	0,0203	0,0329
	Üst	0,0351	0,0226	0,0286	0,0146	0,0294	0,0251	0,0280	0,0211
	Ort.Gen.	1,1477	1,1724	1,1219	1,1222	0,6708	0,6848	0,6716	0,6694
Medyan	Kapsama	0,9369	0,9037	0,9377	0,9237	**0,9494**	0,9120	**0,9503**	0,9229
	Alt	0,0403	0,0509	0,0294	0,0491	0,0300	0,0406	0,0231	0,0443
	Üst	0,0229	0,0454	0,0329	0,0271	0,0206	0,0474	0,0266	0,0329
	Ort.Gen.	1,1312	1,2903	1,1389	1,1925	0,7064	0,7879	0,7186	0,7324
Tek adım-M	Kapsama	0,9326	**0,9543**	0,9346	0,9346	**0,9394**	**0,9449**	**0,9440**	0,9377
	Alt	0,0377	0,0314	0,0403	0,0534	0,0320	0,0323	0,0326	0,0463
	Üst	0,0297	0,0143	0,0251	0,0120	0,0286	0,0229	0,0234	0,0160
	Ort.Gen.	1,1629	1,3911	1,1394	1,1404	0,7029	0,7413	0,6976	0,6958
Düzeltilmiş Tek adım-M	Kapsama	0,9243	0,8971	**0,9586**	0,9197	0,9343	0,9177	**0,9503**	0,9226
	Alt	0,0440	0,0683	0,0229	0,0563	0,0320	0,0440	0,0243	0,0474
	Üst	0,0317	0,0346	0,0186	0,0240	0,0337	0,0383	0,0254	0,0300
	Ort.Gen.	1,2177	1,2530	1,2065	1,2157	0,7363	0,7489	0,7329	0,7329

Tablo 3, kitle dağılımı g=0.5, h=0.2 iken elde edilen sonuçları vermektedir. Beklendiği gibi ortalama için hiçbir yöntem nominal değeri yakalayamamıştır. n=20 için bs-t ve bs-yüzdelik yedi kestiricinin dördü için nominal anlam düzeyini korumuştur. bs-yüzdelik için ortalama genişlikler daha dardır. n=50 için bs-yüzdelik yedi kestiricinin altısında nominal değeri yakalamıştır.

Tablo 4. Kitle dağılımı g&h(g=0.5,h=0.4) iken gerçekleşen kapsama oranları

		n=20				n=50			
		bs-BCa	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**	**bs-BCa**	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**
μ	Kapsama	0,8083	0,8451	0,8131	0,8166	0,8446	0,8643	0,8463	0,8454
	Alt	0,1720	0,1489	0,1831	0,1814	0,1366	0,1280	0,1506	0,1540
	Üst	0,0197	0,0060	0,0037	0,0020	0,0189	0,0077	0,0031	0,0006
	Ort.Gen.	2,8997	8,5989	2,3482	2,4486	2,1904	5,3525	1,7589	1,8289
$\mu_{tr=0.1}$	Kapsama	**0,9394**	**0,9520**	**0,9471**	**0,9617**	**0,9463**	0,9369	**0,9514**	**0,9577**
	Alt	0,0297	0,0380	0,0294	0,0326	0,0257	0,0354	0,0243	0,0337
	Üst	0,0309	0,0100	0,0234	0,0057	0,0280	0,0277	0,0243	0,0086
	Ort.Gen.	1,9390	1,8272	1,8387	1,8547	0,8927	0,8547	0,8889	0,8901
$\mu_{tr=0.2}$	Kapsama	**0,9400**	**0,9437**	**0,9437**	**0,9549**	**0,9491**	**0,9443**	**0,9497**	**0,9549**
	Alt	0,0306	0,0369	0,0286	0,0366	0,0240	0,0280	0,0240	0,0320
	Üst	0,0294	0,0194	0,0277	0,0086	0,0269	0,0277	0,0263	0,0131
	Ort.Gen.	1,3450	1,3166	1,3439	1,3654	0,7452	0,7326	0,7458	0,7419
$\mu_{tr=0.25}$	Kapsama	**0,9406**	**0,9420**	**0,9429**	**0,9546**	**0,9500**	**0,9483**	**0,9517**	**0,9540**
	Alt	0,0300	0,0366	0,0286	0,0354	0,0211	0,0254	0,0206	0,0300
	Üst	0,0294	0,0214	0,0286	0,0100	0,0289	0,0263	0,0277	0,0160
	Ort.Gen.	1,2616	1,2493	1,2630	1,2709	0,7216	0,7165	0,7226	0,7189
Medyan	Kapsama	0,9369	0,9014	0,9377	0,9374	**0,9494**	0,9080	**0,9503**	0,9294
	Alt	0,0403	0,0523	0,0294	0,0429	0,0300	0,0440	0,0231	0,0394
	Üst	0,0229	0,0463	0,0329	0,0197	0,0206	0,0480	0,0266	0,0311
	Ort.Gen.	1,2009	1,3108	1,2081	1,2638	0,7225	0,7885	0,7352	0,7476
Tek adım-M	Kapsama	0,9300	**0,9520**	0,9354	**0,9466**	0,9386	**0,9429**	**0,9463**	**0,9420**
	Alt	0,0406	0,0351	0,0403	0,0460	0,0329	0,0357	0,0314	0,0451
	Üst	0,0294	0,0129	0,0243	0,0074	0,0286	0,0214	0,0223	0,0129
	Ort.Gen.	1,3383	1,5468	1,3054	1,3048	0,7791	0,8037	0,7723	0,7689
Düzeltilmiş Tek adım-M	Kapsama	0,9211	0,8983	**0,9583**	0,9306	0,9311	0,9131	**0,9569**	0,9314
	Alt	0,0417	0,0571	0,0197	0,0397	0,0360	0,0489	0,0191	0,0423
	Üst	0,0371	0,0446	0,0220	0,0297	0,0329	0,0380	0,0240	0,0263
	Ort.Gen.	1,3387	1,3142	1,3192	1,3297	0,7740	0,7658	0,7699	0,7677

g&h(0.5,0.4) dağılan kitle için elde edilen sonuçlar Tablo IV'te verilmiştir. n=20 için bs-t ve bs-yüzdelik yedi kestiricinin dördü için nominal anlam düzeyini korumuştur. Bu kestiriciler için en dar güven aralığı çoğunlukla bs-t yöntemi ile elde edilmiştir. Örneklem genişliği 50 olduğunda bs-yüzdelik yedi kestiricinin altısında nominal anlam düzeyini yakalamıştır.

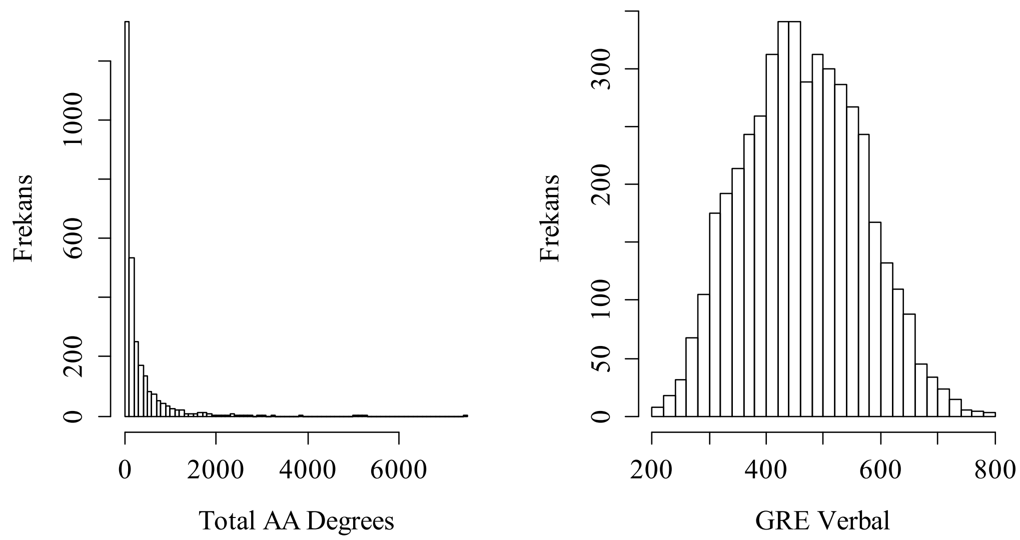
Sonuçları genel olarak değerlendirdiğimizde Normal(0,1) dağılım için örneklem genişliği 20 olduğunda bs-yüzdelik yöntemi ortalama ve medyan hariç diğer beş kestirici için, bs-t yöntemi medyan ve düzeltilmiş tek adım-M hariç diğer beş kestirici için nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Örneklem genişliğinin 50 olduğu durumda ise bs-BCa ve bs-yüzdelik yöntemlerinin kapsama oranları tüm kestiriciler için nominal değere yaklaşmıştır. Asimetrik ağır kuyruklu dağılımlarda bs-yüzdelik yöntemi geniş örneklem durumunda ortalama haricinde diğer altı kestirici için nominal değere yakın sonuçlar vermiştir.

4.3 Gerçek Veri Örneği

Bu bölümde benzetim çalışmasında kullanılan yöntemler ve kestiriciler iki farklı gerçek veri setine uygulanmıştır. Gerçek veriler http://www.freewebs.com/tedstats adresinden alınan farklı karakterdeki iki veri setidir. Benzetim çalışmasında kullanılan gerçek verilere ilişkin bazı istatistikler Tablo V'te verildiği gibidir. Örneklem genişlikleri ve tekrar sayıları benzetim çalışması ile aynı alınmıştır.

Tablo 5. Kullanılan gerçek verilere ait istatistikler

Veri Seti Adı	N	Ortalama	Medyan	Standart Sapma	IQR	Çarpıklık	Basıklık
Carnegie Verisi							
Total AA Degrees	2859	268.98	114.0	451.96	281	4.98	47.31
Standart Testler							
GRE Verbal	4637	468.81	470	103.23	150	0.13	2.54



Şekil 1. Kullanılan gerçek verilerin histogramları

Tablo VI, kitle dağılımı sağdan çarpık "Total AA Degrees" isimli gerçek veri seti iken elde edilen sonuçları vermektedir. n=20 için bs-BCa yöntemiyle ortalama hariç diğer tüm kestiriciler için elde edilen kapsama oranları nominal değeri yakalamışlardır. n=50 için bs-BCa ve bs-yüzdelik yedi kestiricinin altısı için başarılı sonuçlar vermişlerdir.

Tablo 6. "Total AA Degrees" gerçek veri seti için gerçekleşen kapsama oranları

		n=20				n=50			
		bs-BCa	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**	**bs-BCa**	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**
μ	Kapsama	0,8757	0,9274	0,8529	0,8383	0,9163	0,9386	0,8971	0,8880
	Alt	0,1014	0,0626	0,1386	0,1577	0,0626	0,0477	0,0951	0,1086
	Üst	0,0229	0,0100	0,0086	0,0040	0,0211	0,0137	0,0077	0,0034
	Ort.Gen.	389,05	625,43	329,03	335,99	253,78	305,19	226,57	228,43
$\mu_{tr=0.1}$	Kapsama	**0,9417**	**0,9611**	**0,9420**	0,9269	**0,9474**	**0,9526**	**0,9489**	0,9303
	Alt	0,0289	0,0297	0,0320	0,0689	0,0289	0,0291	0,0280	0,0620
	Üst	0,0294	0,0091	0,0260	0,0043	0,0237	0,0183	0,0231	0,0077
	Ort.Gen.	302,64	337,97	289,13	292,92	165,32	173,47	163,69	164,37
$\mu_{tr=0.2}$	Kapsama	**0,9437**	**0,9600**	**0,9440**	0,9260	**0,9463**	**0,9517**	**0,9486**	0,9240
	Alt	0,0280	0,0283	0,0271	0,0691	0,0280	0,0306	0,0271	0,0671
	Üst	0,0283	0,0117	0,0289	0,0049	0,0257	0,0177	0,0243	0,0089
	Ort.Gen.	242,07	273,14	241,83	246,72	139,50	148,09	139,75	140,46
$\mu_{tr=0.25}$	Kapsama	**0,9440**	**0,9606**	**0,9460**	0,9317	**0,9480**	**0,9560**	**0,9494**	0,9374
	Alt	0,0280	0,0286	0,0246	0,0629	0,0220	0,0231	0,0206	0,0531
	Üst	0,0280	0,0109	0,0294	0,0054	0,0300	0,0209	0,0300	0,0094
	Ort.Gen.	228,76	260,21	230,70	235,43	133,55	142,24	134,37	135,14
Medyan	Kapsama	**0,9466**	0,9286	**0,9417**	0,9303	**0,9454**	0,9217	**0,9480**	0,9280
	Alt	0,0346	0,0354	0,0271	0,0534	0,0331	0,0371	0,0249	0,0534
	Üst	0,0189	0,0360	0,0311	0,0163	0,0214	0,0411	0,0271	0,0186
	Ort.Gen.	211,24	262,52	221,35	237,35	125,28	141,49	129,71	132,55
Tek adım-M	Kapsama	**0,9391**	0,9660	0,9357	0,9083	**0,9480**	0,9651	**0,9460**	0,9189
	Alt	0,0331	0,0180	0,0463	0,0806	0,0254	0,0166	0,0363	0,0674
	Üst	0,0277	0,0160	0,0180	0,0111	0,0266	0,0183	0,0177	0,0137
	Ort.Gen.	266,05	423,95	248,55	254,30	156,84	197,41	152,10	153,07
Düzeltilmiş Tek adım-M	Kapsama	**0,9417**	0,9057	**0,9469**	0,9137	**0,9423**	0,9246	**0,9534**	0,9117
	Alt	0,0294	0,0526	0,0351	0,0631	0,0277	0,0403	0,0297	0,0651
	Üst	0,0289	0,0417	0,0180	0,0231	0,0300	0,0351	0,0169	0,0231
	Ort.Gen.	258,11	281,37	237,87	250,39	150,46	164,57	143,75	146,80

Tablo VII'de kitle dağılımı, simetrik "GRE Verbal" isimli gerçek veri seti iken elde edilen sonuçlar verilmiştir. Küçük örneklem genişliğinde bs-yüzdelik yöntemi ortalama hariç diğer tüm yöntemlerde nominal değere yakın sonuçlar vermiştir. Geniş örneklem durumunda bs-BCa ve bs-yüzdelik yöntemleri tüm kestiriciler için nominal değeri yakalamışlardır. bs-t güven aralığı kestirimlerinde medyan haricinde diğer kestiriciler için nominal değere yakın sonuçlar elde edilmiştir. Nominal değere yaklaşan yöntemlerin ortalama genişlikleri karşılaştırıldığında bs-BCa ve bs-yüzdelik yöntemleriyle elde edilen güven aralığı kestirimlerinin daha dar olduğu görülmektedir.

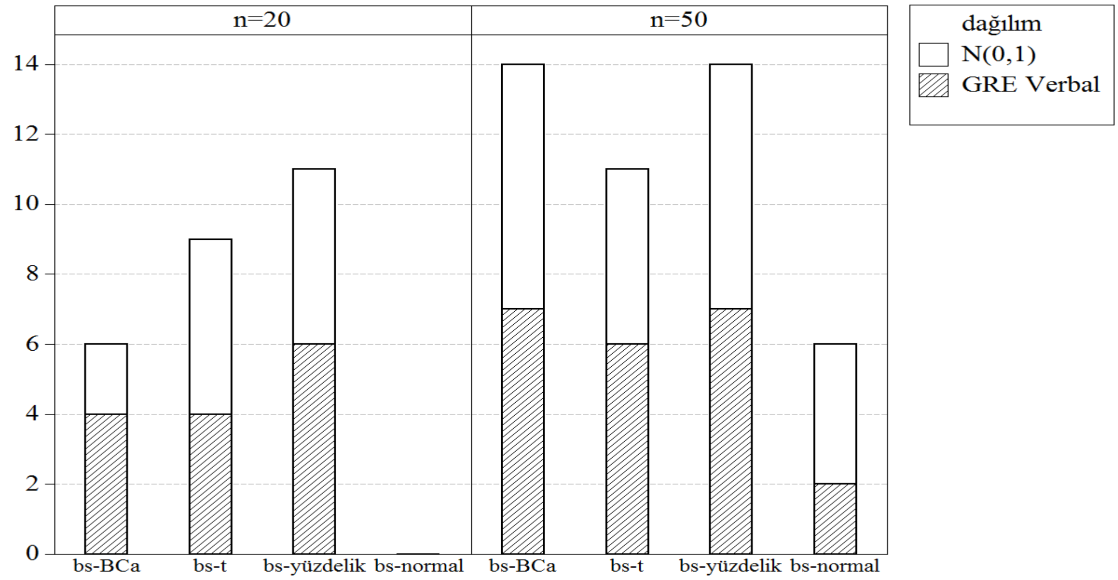
Tablo 7. "GRE Verbal" gerçek veri seti için gerçekleşen kapsama oranları

		n=20				n=50			
		bs-BCa	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**	**bs-BCa**	**bs-t**	**bs-yuzd.**	**bs-norm.**
μ	Kapsama	0,9363	**0,9571**	0,9311	0,9320	**0,9447**	**0,9530**	**0,9410**	**0,9420**
	Alt	0,0360	0,0266	0,0383	0,0383	0,0317	0,0260	0,0330	0,0333
	Üst	0,0277	0,0163	0,0306	0,0297	0,0237	0,0210	0,0260	0,0247
	Ort.Gen.	87,87	97,73	87,53	87,43	56,73	59,06	56,68	56,52
$\mu_{tr=0.1}$	Kapsama	**0,9426**	**0,9560**	**0,9431**	0,9317	**0,9449**	**0,9506**	**0,9443**	0,9377
	Alt	0,0320	0,0231	0,0300	0,0374	0,0314	0,0260	0,0314	0,0363
	Üst	0,0254	0,0209	0,0269	0,0309	0,0237	0,0234	0,0243	0,0260
	Ort.Gen.	96,25	105,34	96,06	95,93	61,49	63,66	61,50	61,33
$\mu_{tr=0.2}$	Kapsama	**0,9417**	**0,9537**	**0,9426**	0,9223	**0,9437**	**0,9497**	**0,9460**	0,9363
	Alt	0,0357	0,0263	0,0326	0,0426	0,0340	0,0289	0,0309	0,0374
	Üst	0,0226	0,0200	0,0249	0,0351	0,0223	0,0214	0,0231	0,0263
	Ort.Gen.	101,72	113,34	101,64	101,66	65,28	68,32	65,28	65,15
$\mu_{tr=0.25}$	Kapsama	**0,9423**	**0,9523**	**0,9423**	0,9231	**0,9429**	**0,9511**	**0,9431**	0,9323
	Alt	0,0351	0,0291	0,0323	0,0423	0,0337	0,0271	0,0323	0,0386
	Üst	0,0226	0,0186	0,0254	0,0346	0,0234	0,0217	0,0246	0,0291
	Ort.Gen.	104,53	118,45	104,51	104,66	66,83	70,45	66,83	66,72
Medyan	Kapsama	0,9389	0,8874	**0,9483**	0,8951	**0,9540**	0,8946	**0,9611**	0,9011
	Alt	0,0503	0,0674	0,0366	0,0660	0,0363	0,0700	0,0274	0,0666
	Üst	0,0109	0,0451	0,0151	0,0389	0,0097	0,0354	0,0114	0,0323
	Ort.Gen.	117,18	140,23	115,66	121,90	77,87	89,58	78,36	80,63
Tek adım-M	Kapsama	**0,9417**	**0,9626**	**0,9400**	0,9334	**0,9437**	**0,9520**	**0,9414**	0,9374
	Alt	0,0326	0,0209	0,0329	0,0371	0,0317	0,0277	0,0326	0,0351
	Üst	0,0257	0,0166	0,0271	0,0294	0,0246	0,0203	0,0260	0,0274
	Ort.Gen.	98,46	117,75	97,77	97,63	61,46	64,16	61,44	61,28
Düzeltilmiş Tek adım-M	Kapsama	0,9383	0,9223	**0,9520**	0,9240	**0,9509**	**0,9454**	**0,9540**	**0,9454**
	Alt	0,0309	0,0440	0,0277	0,0400	0,0291	0,0326	0,0271	0,0329
	Üst	0,0309	0,0337	0,0203	0,0360	0,0200	0,0220	0,0189	0,0217
	Ort.Gen.	113,29	120,94	112,03	111,78	67,39	67,23	67,57	67,22

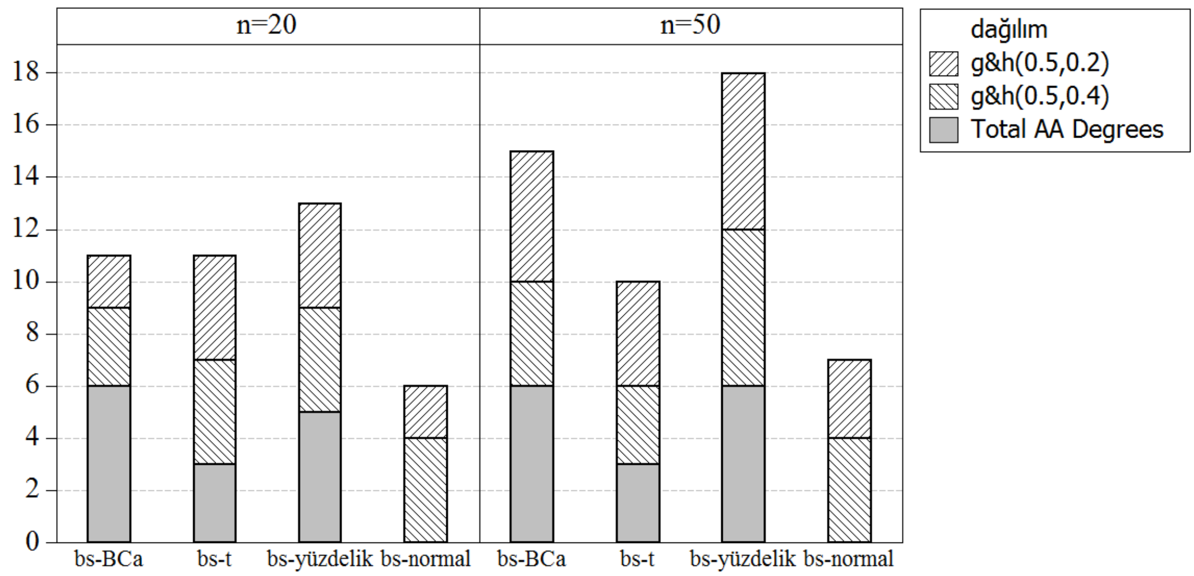
5. SONUÇ

Bu çalışmada, kitlenin simetrik, asimetrik ağır kuyruklu olduğu durumlar ve iki farklı gerçek veri seti için bootstrap güven aralıklarının dayanıklı kestiriciler ile olan performansları incelenmiştir.

Kitlenin simetrik (N(0,1) ve GRE Verbal) olduğu 28 deney düzeninin; 25'inde bs-yüzdelik, 20'sinde bs-t ve bs-BCa nominal değeri korumuştur (Şekil II). Örneklemlerin asimetrik ağır kuyruklu kitlelerden (g&h(0.5, 0.2), g&h(0.5, 0.4),Total AA Degrees) çekildiği 42 deney düzeninin; 31'inde bs-yüzdelik, 26'sında bs-BCa, 21'inde bs-t ve 13'ünde bs-normal nominal değeri koruyabilmiştir (Şekil III). Özellikle kitlenin asimetrik olduğunda kullanılması önerilen ve yüzdelik bootstrap yönteminin geliştirilmiş bir şekli olan BCa yöntemi, benzetim çalışmamızda kullanılan dayanıklı kestiriciler için yüzdelik bootstrap yönteminden daha iyi sonuçlar verememiştir.



Şekil 2. Bootstrap yöntemlerin nominal güven düzeyini koruduğu düzenlerin sayısı (kitle simetrik)



Şekil 3. Bootstrap yöntemlerin nominal güven düzeyini koruduğu düzenlerin sayısı (kitle asimetrik)

KAYNAKLAR

Banik, S., Kibria, B.M.G. (2010). Comparison of some Parametric and Nonparametric Type One Sample Confidence Intervals for Estimating the Mean of a Positively Skewed Distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 39(2), 361-389.

Boos, D., Hughes-Oliver, J. (2000). How Large Does n Have to be for z and t Intervals?, *American Statistician,* 54(2), 121–128.

Carpenter, J., Bithell, J. (2000). Bootstrap Confidence Intervals: when, which, what? A Practical Guide for Medical Statisticians. *Statistics in Medicine*, 19, 1141–1164.

Chernick, M.R. (2008). *Bootstrap Methods: a Guide for Practitioners and Researchers*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.

Davison, A.C., Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge University Press.

Davison, A.C., Hinkley, D.V., Young, G.A. (2003). Recent Developments in Bootstrap Methodology. *Statistical Science*, 18(2), 141 – 157.

DiCiccio, T.J., Efron. B. (1996). Bootstrap Confidence Intervals, *Statistical Science*, 11(3), 189-212.

Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at The Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.

Efron, B. (1981). Nonparametric Standard Errors and Confidence Intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 9(2), 139 – 158.

Efron, B. (1987). Better Bootstrap Confidence Intervals. *Journal of The American Statistical Association,* 82(397), 171 – 200.

Efron, B., Tibshirani, R. (1986). Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and other Measures of Statistical Accuracy. *Statistical Science* 1(1), 54 – 77.

Efron, B., Tibshirani R. (1993). *An Introduction to The Bootstrap*. Chapman and Hall, London.

Hoaglin, D. C. (1985). *Summarizing Shape Numerically: The g-and-h Distributions.* In D. Hoaglin, F. Mosteller, & J. Tukey (eds.), Exploring Data Tables, Trends, and Shapes. Wiley, New York.

Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. New York: Wiley.

Kuonen, D. (2005). Studentized Bootstrap Confidence Intervals Based on Mestimates. *Journal of Applied Statistics,* 32(5), 443-460.

Nankervis, J.C. (2005). Computational Algorithms for Double Bootstrap Confidence Intervals. *Computational Statistics & Data Analysis*, 49, 461 – 475.

Ng, H.K.T., Filardo, G., Zheng, G. (2008). Confidence Interval Estimating Procedures for Standardized Incidence Rates. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 3501-3516.

Özdemir, A. F., Wilcox, R.R. (2012). New Results on The Small-Sample Properties of some Robust Univariate Estimators of Location. *Communications in Statistics - Simulation and Computation,* 41(9), 1544-1556.

Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Newyork: Wiley.

Ted' Micceri's Web Site. http://www.freewebs.com/tedstats. Alıntı tarihi: 01.10.2012.

Wilcox, R.R. (2001). *Fundamentals of Modern Statistical Methods*. Springer-Verlag.

Wilcox, R.R. (2012). *Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing*. 3rd Edition, Academic Press.

Zhou, X. H., Dinh, P. (2005). Nonparametric Confidence Intervals for The One and Two Sample Problems. *Biostatistics*, 6(2), 187 – 200.

Zhou, X. H., Gao, S. (2000). One-sided Confidence Intervals for Means of Positively Skewed Distributions. *The American Statistician*, 54(2), 100 – 104.