Marmara Üniversitesi

İ.İ.B.F. Dergisi

YIL 2009, CİLT XXVII, SAYI II, S. 329-344

VASICEK VE CIR MODELLERİ KULLANILARAK OYNAKLIK VE FAİZ ORANLARININ MODELLENMESİ

Doç. Dr. Ömer ÖNALAN*

Özet

Bu çalışmada, VIX oynaklık endeksi ve U.S. 3-aylık hazine bonosu zaman serilerinin stokastik davranışını modellemek için Vasicek modeli ve CIR (Cox-Ingersoll-Ross) modellerini *kullanıyoruz. Çalışmanın esas amacı, bu zaman serilerin geleceğini tahmin etmek için uygun bir stokastik model bulmak ve iki farklı yaklaşımla elde edilen sonuçları karşılaştırmaktır.*

VIX oynaklık endeksi piyasanın bir bütün olarak sezgisini gösterir. Kısa vadeli faiz oranı dinamikleri, bir stokastik süreç izler. Kısa vadeli faiz oranları ve onların vade yapısının modellenmesi önemlidir. Çalışmamızda, ilk olarak, modellerin yapısı açıklanmaktadır, sonra modellerin parametre tahmin yöntemleri incelenmektedir. Özel olarak CIR modeli parametrelerinin tahmini için martingale tahmin metodu verilmiştir. Bu metod piyasa riskinin sonuçlara etkisini ortadan kaldırmaktadır. Daha sonra modeller gerçek verilere uyarlanmaktadır. Son olarak, bir simülasyon çalışmasıyla modellerin performansını deneysel olarak test ediyoruz. Simülasyon deneyleri modellerden elde edilmiş olan sonuçların gerçek verilerle cok uyumlu olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: *Vasicek modeli, CIR modeli, Faiz oranı, Oynaklık, Simülasyon*

MODELLING OF VOLATILITY AND INTEREST RATES USING WITH VASICEK AND CIR MODELS

Abstract

In this study we use Vasicek and CIR models to model the stochastic behaviour of VIX volatility index and US 3 month Treasure Bill rate . The main purpose of this study is find a stuitable stochastic model to forecasting the future of this time series and to compare results which obtained from the this two different approach. VIX volatility index

* Doç. Dr., Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Öğretim Üyesi

represent intuition of all over market. The dinamics of short rate are follows a stochastic model. The short rates and the modelling of their term structure is very important. In study, first time we explained the structure of models. Then, we give the parameter estimation methods of models. Particularly ,for the parameter estimation of CIR model is given martingale estimation method. This metod is eliminate the effect of market risk on results. We fit the models to real data. Finally, we test the empirical performance of our results in a simulation study. Simulated experiments show that the obtained results from models is very fit real data.

Keywords: *Vasicek model,CIR model,Interest rate,Volatility,Simulation*.

1.Giriş

Kısa vadeli risksiz faiz oranı, paranın global maliyetinin temel göstergesidir. Bu oran risk faktörleri ve diğer farklı vade yapılarına sahip oranların hesabı için temel bir yapı sunmaktadır. Faiz oranlarının davranışını belirlemek için stokastik modeller kullanılır. Örneğin; mal fiyatlama teorisinde genellikle stokastik diferensiyel denklemler kullanılır. Faiz oranları ve onların vade yapısının modellenmesi, özellikle yatırım ve finansman kararlarında, portföy yönetiminde, finans mühendisliği ve sigortacılık vb. alanlarda yoğun olarak kullanılmaktadır.

Faiz oranlarının vade yapısı, bir yatırımın getirisi ile yatırımın vadesine kalan süre arasındaki ilişki olarak tanımlanabilir. FOVY genellikle, sürekli bileşiklendirilmiş, yıllıklaştırılmış kuponsuz tahvillerin verimi kullanılarak hesaplanır. FOVY doğrudan gözlenemez. Bu nedenle FOVY genellikle, farklı vadeli tahvillerin bir kümesine bazı tahmin teknikleri uygulanarak tahmin edilir. Faiz oranlarının vade yapısını tahmin etmek için kullanılan modeller iki grupta toplanabilir.

i) *Denge modelleri:* Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan ve Schwats (1979), Cox (1985) bu modellerde, kısa vadeli faiz oranlarının bir stokastik süreç izlediği kabul edilmektedir. Bu modellerin amacı, tüm vade yapılarını içeren, arbitrajın yokluğu varsayımına dayanan bir oran elde etmektir**.**

ii) *Deneysel modeller:* McCulloch (1971), Vasicek-Fong (1982), Nelson-Siegel (1987) ve Pham (1977) ve vb. Bu modellerin amacı, kuponlu tahvil fiyatlarının bir kümesinden sıfır kupon oranı veya vadeli (forward) oran ya da iskonto fonksiyonlarını elde etmektir. Bu ise, vade yapısını karakterize eden esnek bir fonksiyonel formun uydurulmasını gerektirir.

Tahvillerin vadeye kadarki verim eğrisine, bir fonksiyonel formun uydurulması esasına dayanan faiz oranı vade yapısı tahmininde, genellikle regresyon analizi kullanılır. Fakat kupon etkisi ve sıfır kuponlu oranların belirlenmesindeki sınırlılıkları dolayısı ile, bu yöntem çok iyi sonuçlar vermemektedir. Bu eksikliği gidermek için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir. İyi bir vade yapısı modeli aşağıdaki istemleri yerine getirmelidir.[1]

- Önerilen yöntem veriye iyi uyum sağlamalıdır.

[1] Nawalkha, Sanjay K., Natalia A. Beliaeva, and Gloria M. Soto, **Dynamic Term Structure Modeling: The Fixed Income Valuation Course**, Wiley Finance, John Wiley and Sons, NJ., 2007.

- Tahmin edilmiş olan sıfır kupon oranları ve vadeli (forward) oranlar tam vade üzerinde pozitif olmalıdır.
- Tahmin edilmiş olan oranlar sürekli ve düzgün olmalıdır.

Finansal oynaklık, menkul kıymet getirilerinin standart sapmasıdır. Ayrıca oynaklık sabit olmayıp zamanla değişmektedir. Bu nedenle oynaklığı hesaplamak için, *gerçekleşmiş oynaklık* ve *VIX oynaklık endeksi* kullanılabilir. VIX Şikago opsiyon borsası tarafından oluşturulmuş, S&P 500 endeks opsiyonlarının ağırlıklı ortalamasına dayanan popüler bir oynaklık endeksidir. Eğer VIX endeksinin değeri çok yüksekse , piyasa kötümser olup bu hisse senedi fiyatlarında düşüşe yol açacaktır. Öte yandan eğer VIX endeksinin değeri çok yüksekse, bu durumda piyasa hisse senedi fiyatlarındaki dibe vurmadan kaynaklanan hayal kırıklığı ile yüz yüze gelebilir. VIX gelecek oynaklığı herhangi bir tarihsel oynaklıktan daha iyi öngörür.

Çalışmanın geri kalan kısmı aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 2. Bölümde, önce faiz oranı modellemesindeki temel kavramlar kısaca gözden geçirilmiş, sonrada Vasicek ve CIR modelleri ayrıntılı olarak açıklanmıştır. 3. Bölümde modellerin gerçek verilere uygulanması , 4. Bölümde ise çalışmanın sonuçları yer almıştır.

2. Faiz Oranı Modelleri

Faiz oranlarının tekamülünü belirleyen süreç, bir faktörlü ve iki faktörlü olmak üzere ikiye ayrılır. Tek faktörlü modeller, son derece küçük bir zaman aralığında faizlerdeki belirsizliğin tek bir kaynağı olduğunu kabul eder. Bu durumda faiz oranı anlık faiz oranı olarak adlandırılır. Böyle bir oran modele göre tam verim eğrisini tanımlar. Faiz oranlarının vade yapısı tahvil fiyatlarından elde edilebilir. Tahvil fiyatları ile faiz oranları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$R_{i,T}$: T vadeli tahvil için t zamanındaki sürekli bileşiklendirilmiş spot oran

$P_{t,T}$: T vade süresi için t- zamanındaki sıfır kuponlu bono fiyatı

$$P_{t,T} = e^{R_{t,T}(T-t)}$$

r_t: Anlık faiz oranı yani, $r_t = \lim_{t\to T} R_{t,T}$ olmak üzere,

$$P_{t,T} = E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s\, ds}|\mathcal{F}_t\right] \qquad (2,1)$$

Burada Q risk yansız olasılık ölçümünü göstermektedir. Tek faktörlü modellerin genel hali aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$dr_t = (\vartheta_t - a_t r_t)dt + \sigma_t (r_t)^\delta dW_t \qquad (2,2)$$

2.1 Vasicek modeli

Bu model, kısa vadeli faiz oranlarının modellenmesi için Vasicek(1977) tarafından önerilmiş olan bu alandaki ilk stokastik modellerden birisidir. Vasicek modeli anlık faiz oranının sabit katsayılı bir Ornstein – Uhlenbeck süreci izlediğini kabul eder. Model lineerdir bu nedenle de kolayca çözülebilir. Model Gaussian dağılıma sahip olup, sıfır kuponlu tahviller ve türev menkul kıymetleri oluşturmak için kullanılabilir. Model aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (2,3)$$

$\alpha > 0, \theta > 0, \sigma > 0$ ve W_t standart Brownian harekettir. Model ortalamaya dönen Ornstein-Uhlenbeck sürecidir. Bunun anlamı şudur; süreç eninde sonunda ortama seviyesine geri dönecektir. Modelin en büyük eksikliği; faiz oranlarının negatif olmasına imkan vermesidir. Bu denklemde,

α: Ortalama seviyeye dönme hızı

θ:Uzun vadeli ortalama seviye

σ:Kısa vadeli faiz oranının oynaklığını göstermektedir.

Teorem2.1 $dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$ denkleminin çözümü

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}\, dW_u \qquad (2,4)$$

Şeklinde verilir. Burada, $0 \leq s < t$ dir.

İspat: $e^{\alpha t} r_t$ ifadesine önce Ito formülü uygular sonrada elde edilen bu ifadeye (2,3) denklemi dahil edilirse,

$$d(e^{\alpha t} r_t) = \alpha e^{\alpha t} r_t dt + e^{\alpha t} dr_t = \alpha e^{\alpha t} r_t dt + e^{\alpha t}[\alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t\,]$$

$$= e^{\alpha t}[\alpha\theta dt + \sigma dW_t]$$

Eşitliğin her iki tarafının, s den t ye kadar integrali alınırsa,

$$\int_s^t d(e^{\alpha u} r_u) = \int_s^t e^{\alpha u}[\alpha\theta du + \sigma dW_u]$$

$$e^{\alpha t} r_t - e^{\alpha s} r_s = \alpha\theta \int_s^t e^{\alpha u} du + \sigma \int_s^t e^{\alpha u} dW_u$$

$e^{\alpha t} r_t = e^{\alpha s} r_s + \theta(e^{\alpha t} - e^{\alpha s}) + \sigma \int_s^t e^{\alpha u} dW_u$ her iki taraf $e^{-\alpha t}$ terimi ile çarpılırsa,

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u$$

Teorem 2.2 (2,4) denklemi ile verilen r_t süreci ,

$$E(\,r_t) = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) \qquad (2,5)$$

beklenen değer ve

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right) \qquad (2,6)$$

varyans ,ile Gaussian dağılıma sahiptir.

İspat:[2] $e^{-\alpha(t-s)}$ deterministik bir fonksiyondur, ayrıca Ito isometri kuralı kullanılarak şu söylenebilir; $\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u$ integrali beklenen değeri sıfır olan bir rassal değişkendir. Bu rassal değişkenin varyansı ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Var\left(\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u\right) = E\left[\left(\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u\right)^2\right] - E\left[\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u\right]^2$$

$$= \sigma^2 \int_s^t e^{-2\alpha(t-u)} du \qquad [(dW_t)^2 = dt]$$

$p = -2\alpha(t-u)$ olsun. $dp = 2\alpha du$ ve $du = dp/2\alpha$, İntegralin sınırları değiştirilirse,$u = t$ için $p = 0$ ve $u = t$ için $p = -2\alpha(t-s)$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha} \int_{-2\alpha(t-s)}^{0} e^u \, du = \frac{1}{2\alpha} (e^p)\Big|_{-2\alpha(t-s)}^{0} = \frac{\alpha^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right) \quad \text{elde edilir.}$$

Limit durumunda ise aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\lim_{t\to\infty} E(r_t) = \theta \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty} Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \qquad (2,7)$$

Vasicek(1977)[3], T vade tarihinde, 1 birim ödeme yapan bir sıfır kuponlu tahvilin t zamanındaki fiyatını elde etmek için aşağıdaki ifadenin kullanılabileceğini göstermiştir.

$$P_{t,T} = A_{t,T} e^{-B_{t,T}(r_t)} \qquad (2,8)$$

$$B_{t,T} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$$

$$A_{t,T} = exp\left\{\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)\left[B_{t,T} - T + t\right] - \frac{\sigma^2}{4\alpha} B_{t,T}^2\right\}$$

r_t faiz oranının duragan durum yoğunluk fonksiyonu,

$$D_\infty = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{-\alpha(r-\theta)^2}{\sigma^2}}$$

Bu durumda $D_\infty \sim N\left(\theta, \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}}\right)$ dağılımına sahiptir.

Teorem2.3. r_t, nin korelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$Korr(r_t, r_{t+h}) = \frac{e^{-\alpha h}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right)}{\sqrt{\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right)\left(1 - e^{-2\alpha(t+h-s)}\right)}} \qquad (2,9)$$

---

[2] Eriksen,M.K.,"Interest rate modelling with non Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes",**Thesis,** Faculty of Mathematics and Natural Science,University of Oslo,2008.s.10

[3] O.Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure",
Journal of Financial Economics, 5,1977,s. 177-188.

$$\lim_{t\to\infty} Korr(r_t, r_{t+h}) = e^{-\alpha h}$$

2.1.1 Vasicek Modeli için Parametre Tahmini

r_t , s- zamanına kadar elde edilen informasyona bağlı olarak, ortalaması $r_s e^{-\alpha(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right)$ ve varyansı $\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right)$ olan normal dağılmış bir rassal değişkendir. Önce zaman aralığı, $0 = t_0, t_1, t_2$ ... zaman noktaları ile her bir zaman aralığının uzunluğu eşit ve $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ olacak şekilde kesikli hale getirilir.

Vasicek modeli, r_t kısa vadeli faiz oranının , aşağıdaki gibi ifade edilen bir $AR(1)$ süreci izlediğini kabul eder.

$$r_{t_i} = a + b\, r_{t_{i-1}} + \delta\, \varepsilon_{t_i} \qquad (2,10)$$

Bu durumda modelin kesikli versiyonunu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Delta r_t = \alpha(\theta - r_{t-1})\Delta t + \sigma \Delta z_t \qquad (2,11)$$

$\Delta z \sim N(0,1)$ dir. Eğer $\Delta t = 1$ ise

$$r_t = \alpha\theta - (1-\alpha) r_{t-1} + \sigma\Delta z_t \qquad (2,12)$$

(2,10) denkleminin parametreleri aşağıdaki gibidir.

$a = \theta(1 - e^{-\alpha\Delta t})$ (2,13)

$b = e^{-\alpha\Delta t}$ (2,14)

$\delta = \sigma\sqrt{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})/2\alpha}$ (2,15)

Vasicek modelinin parametrelerini kesikli gözlenmiş verilerden elde etmek için;

i) (2,10) denklemi kullanılarak, yani $r(t_i)$ zaman serisi ve bunun gecikmiş formu olan $r(t_{i-1})$, serisi ile regresyona tabi tutularak a,b ve δ parametreleri takdir edilir.

ii) En küçük kareler regresyonu a,b ve δ parametreleri için maksimum olabilirlik takdircilerini verir.

iii) (2,13),(2,14),(2,15) denklem takımı çözülerek $\alpha, \theta\ ve\ \sigma$ parametreleri aşağıdaki gibi belirlenir.[4]

$$\hat{\alpha} = \frac{-ln(\hat{b})}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta t}\ln\left[\frac{n\sum_{i=1}^{n} r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}}{n\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}\right)}\right] \qquad (2,16)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{c}}{1-\hat{b}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{b} r_{i-1})}{n(1-\hat{b})} \qquad (2,17)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\delta}\Big/\sqrt{\left(\hat{b}^2 - 1\right)\Delta t / 2ln\left(\hat{b}\right)} \qquad (2,18)$$

[4] BrigoD.,Dalessandro,A.,Neugebauer,M.,Triki,F.,“A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management”, **Working Paper**,2007.29.

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r_i - \hat{b}r_{i-1} - \hat{\theta}\left(1-\hat{b}\right)\right]^2 \qquad (2,19)$$

Vasicek Modelinin Simülasyonu

Modeli simüle etmek için önce zaman aralığı Euler şeması kullanılarak kesikli hale getirilir. Bu durumda model,

$$r_t = r_{t-1} + \alpha(\theta - r_{t-1})\Delta t + \sigma\, \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Şeklini alır.

2.2 Üstel Vasicek Modeli

Vasicek modelinin en büyük eksikliği, faiz oranlarının negatif olmasına imkan vermesidir. Oysa gerçekte negatif faiz oranı mümkün değildir. Modelin bu eksikliğini ortadan kaldırmak için modelin üstelini almak yeterlidir. Bu durumda yeni *üstel Vasicek modeli* aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$dr_t = \alpha r_t(\vartheta - log r_t)dt + \sigma r_t\, dW_t \qquad (2,20)$$

α , σ pozitif sabitler, $\vartheta = \theta + \sigma^2/2\alpha$

Üstel Vasicek modelinin $(0, t)$ aralığındaki çözümü, aşağıdaki gibi yazılabilir[5]. (Brigo,D.,Delessandro,A.,Neugebauer,M.,Triki,F.,(2007),s.32)

$$r_t = exp\left\{log(r_t)e^{-\alpha(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) + \sigma\int_s^t e^{-\alpha(u-t)}dW_u\right\} \qquad (2,21)$$

Bu modelin parametrelerini tahmin etmek için, tarihsel logaritmik faiz oranlarına, Vasicek modelinin tahmin yöntemlerini uygulamak yeterlidir

2.3 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modeli

Model ,Cox, Ingersoll ve Ross(1985)[6] tarafından önerilmiştir. Riskin piyasa fiyatı için uygun bir seçim yapılarak,model aşağıdaki şekilde yazılır.

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t \qquad (2,22)$$

Model ortalamaya dönme özelliğine sahiptir. Sürecin değişimlerinin standart sapması $\sqrt{r_t}$ ile orantılıdır. Yani, standart sapma arttığında faiz oranı da artar. CIR modeli için bono fiyatları, Vasicek modelindeki ile aynı yapıya sahiptir.

$$P_{t,T} = A_{t,T}e^{-B_{t,T}(r_t)} \qquad (2,23)$$

---

5 BrigoD.,Dalessandro,A.,Neugebauer,M.,Triki,F.,“A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management”, **Working Paper**,2007.s.32.

6 Cox,J.C.,Ingersoll,J.,E.,ve Ross,S.A.,”A Theory of the Term Structure of Interest Rate”, **Econometrica**,53,1985,s. 385-407.

$$A_{t,T} = \left[\frac{\gamma_1 e^{\gamma_2(T-t)}}{\gamma_2(e^{\gamma_1(T-t)}-1)+\gamma_1}\right]^{\gamma_3}$$

$$B_{t,T} = \left[\frac{\left(e^{\gamma_1(T-t)}-1\right)}{\gamma_2(e^{\gamma_1(T-t)}-1)+\gamma_1}\right]$$

$$\gamma_1 = \sqrt{(\alpha+\delta)^2+2\sigma^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha+\delta+\gamma_1}{2}$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha\theta}{\sigma^2}$$

Yazılabilir.[7],[8] r_t kısa vadeli faiz oranının kesinlikle pozitif olması için $\sigma^2 \geq 2\alpha\theta$ koşulunun sağlanması gerekir.

2.3.1 CIR Modelinin Parametrelerinin Tahmini

Modelin α parametresini tahmin etmek için aşağıdaki AR(1) süreci kullanılır.

$$r_t = a + br_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2,24)$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{log\left(\hat{b}\right)}{\Delta t}$$

$$\hat{\theta} = E(r_t)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2\hat{\alpha}Var(r_t)/\hat{\theta}} \qquad (2,25)$$

2.3.2 Martingale Tahmin Yöntemi

CIR modelini aşağıdaki gibi tekrar yazalım :

$$dr_t = (p+qr_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t \qquad (2,26)$$

(2,22) denklemi (2,26) denklemi ile karşılaştırılırsa, $-\alpha = q$ ve $\alpha\theta = p \rightarrow -\theta = p/q$ olduğu görülür.

$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ tarihsel kısa vadeli faiz oranları verilmiş olsun.[9]

[7] Bernaschi,M.,Torossantucci,L., ve Uboldi,A.,” Empirical Evaluation of the Market Price of Risk using the CIR Model”,**Physica A** 376, 2007,s.545.

[8] Hull,J.C., **Options, Futures and Other Derivatives,** Fifth Edition,Printice Hall,New Jersey,2003.s.543.

[9] Bernaschi,M., **a.g.e** .,2007,,s.545

$$q = \frac{1}{\Delta t}\ log \left[\frac{n\ \sum_{t=2}^{n}\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right)\ -\ (\sum_{t=2}^{n} r_t)\ \left(\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{1}{r_{t-1}}\right)\right)}{n^2 -\ (\sum_{t=2}^{n} r_{t-1})\ \left(\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{1}{r_{t-1}}\right)\right)} \right]$$

$$p = \frac{1}{1-e^{q\ \Delta t}}\ \frac{n\ e^{q\ \Delta t} - \sum_{t=2}^{n}\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{1}{r_{t-1}}\right)} \qquad (2,27)$$

Standart sapmanın tahmini olarak,[10],[11]

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left[r_t - \frac{(p+qr_{t-1})e^{q\ \Delta t} - p}{q}\right]^2 \left(\frac{1}{r_{t-1}}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left[\frac{(p+2qr_{t-1})\ e^{2q\Delta t} - 2(p+qr_{t-1})e^{q\Delta t} + p}{2r_{t-1}q^2}\right]} \qquad (2,28)$$

kullanılabilir.Kısa vadeli faiz oranının darağan durum yoğunluk fonksiyonu,

$$D_{\infty} = \frac{1}{\Gamma\ (k)}\ \left(\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)^k r^{k-1}\ e^{-\frac{2\alpha r}{\sigma^2} - ln\left(\Gamma\ (k)\right)} \quad , \quad k = 2\alpha\theta/\sigma^2$$

2.3.3 CIR Modelinin Simülasyonu

Modelin simülasyonu, (2,22) modelinin kesiklileştirilmiş versiyonu kullanılarak gerçekleştirilir.

$$r_t = r_{t-1} + \hat{\alpha}\ \left(\hat{\theta} - r_{t-1}\right) \Delta t + \hat{\sigma}\sqrt{r_{t-1}}\ \sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t \qquad (2,29)$$

Eğer martingale tahmin tekniği kullanılırsa,

$$r_t = r_{t-1} + \left(p + \frac{\sigma^2}{4}\ (\varepsilon^2 - 1) + qr_t\right)\ \Delta t + \sigma\sqrt{r_{t-1}}\ \sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t \qquad (2,30)$$

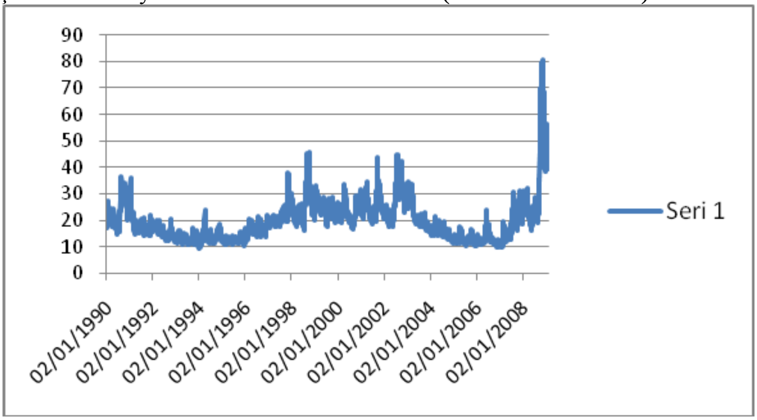
3.Uygulama

Uygulamada ilk olarak VIX oynaklık endeksinin 1/2/1990-2/26/2009 tarihleri arasındaki günlük verileri analiz edilmiştir.

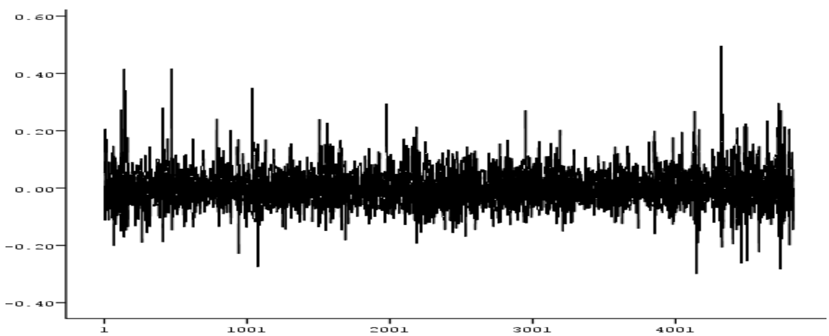
[10] Bernaschi,M., **a.g.e.**,2007,,s.549

[11] Jaeschke,A.G.,” Parameter Estimation and Bessel Processes in Financial Models and Numerical Analysis in Hamiltonian Dynamics”,**Diss.Math.** Wiss.ETH Zurich,1998.

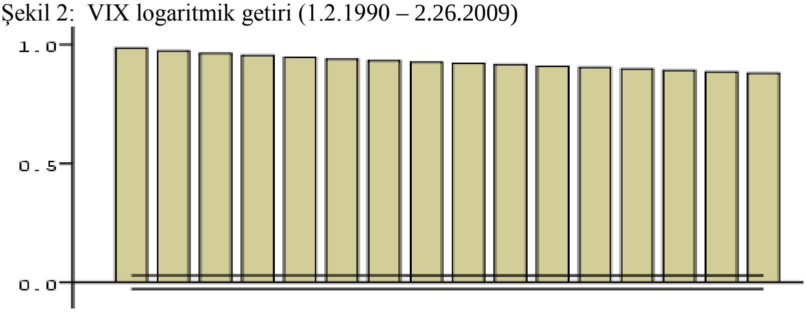
Şekil 1: VIX oynaklık endeksi tarihsel verileri(1/2/1990-2/26/2009)



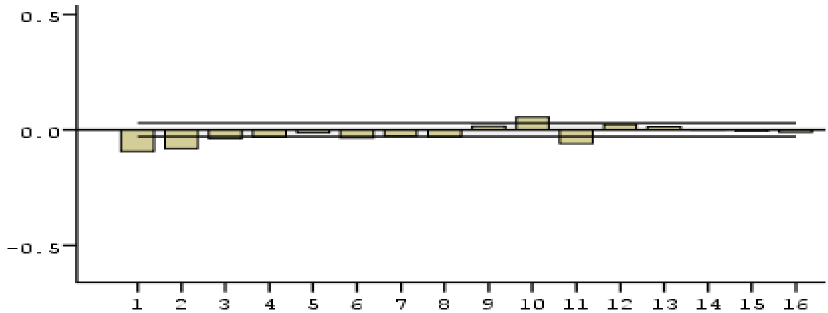
Tarihsel verilere bakıldığında, endeksin 1991 yılında ve 98-2003 yılları arasında sert yükselişleri görülmektedir. Özellikle de 2008 sonunda endeksin ani ve çok hızlı bir yükselişe geçtiği ve bu yükselişini belirli sevide koruduğu görülmektedir.



Şekil 2: VIX logaritmik getiri (1.2.1990 – 2.26.2009)

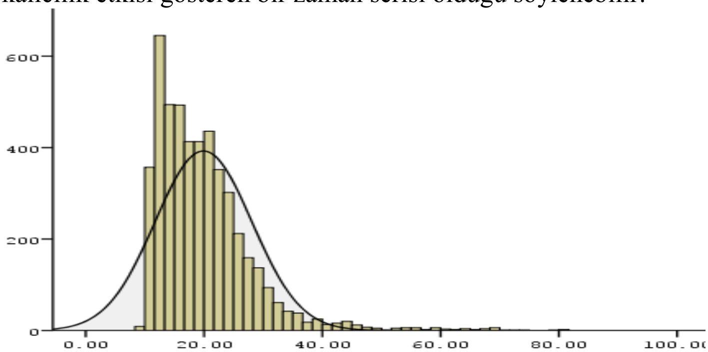


Şekil 3: ln VIX otokorelasyon fonksiyonu



Şekil 4: lnVIX ilk farklar serisi otokorelasyon fonksiyonu

Günlük faiz oranı seviyeleri yüksek otokorelasyona sahip olduğundan VIX endeksin kalıcılık etkisi gösteren bir zaman serisi olduğu söylenebilir.

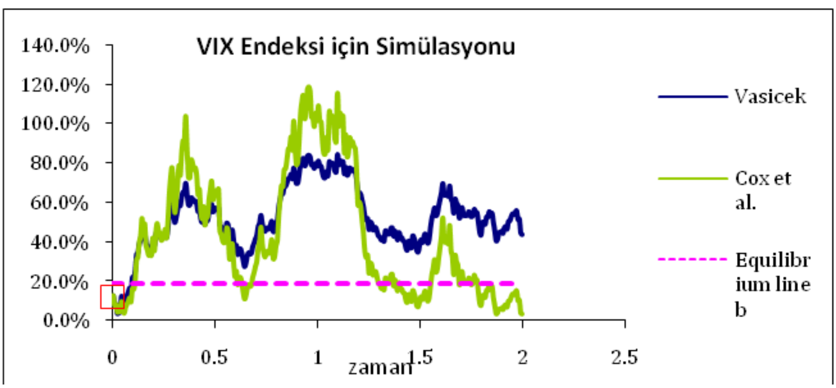


Şekil 5: VIX endeksi için histogram

VIX endeksi pozitif çarpıktır. Negatif kestirimlerden sakınmak için lnVIX kullanılabilir. Vasicek ve CIR modelinin parametreleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo1: VIX endeksi için Vasicek ve CIR modeli parametreleri

Parametre	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\delta}^2$
Vasicek	0.018164	18.88	0.38931	1.489
CIR	0.018164	18.9735	0,27952	

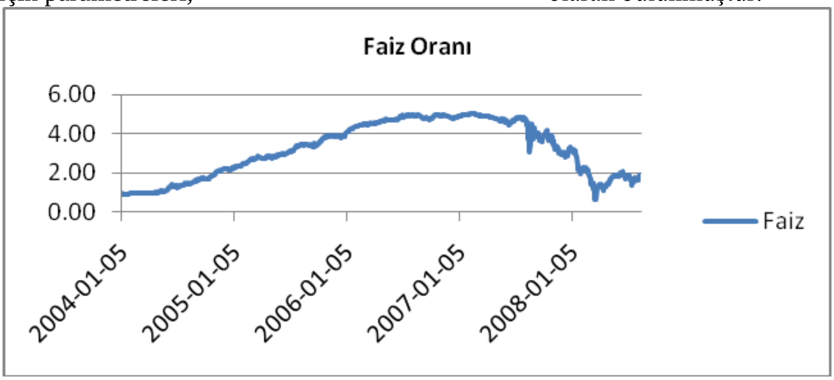


Şekil 6: VIX endeksinin simülasyonu

Tablo 2: VIX endeksi simülasyon verileri

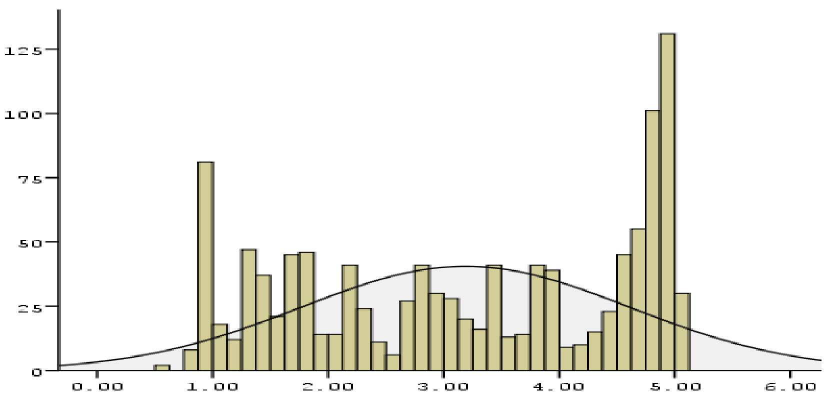
	Vasicek	**CIR**
r_0 : Başlangıç faiz oranı	12.00%	12.00%
Sim. zamanı (T)(yıl)	2	2
Dönme hızı	0.02	0.02
Denge faiz oranı	18.88%	18.88%
Oynaklık	38.93%	112.38%
Δt	0.0067	0.0067

İkinci olarak USD deki sabit vadeli 3 aylık hazine bonosunun 05.01.2004- 14.08.2008 yılları arasındaki günlük verimlerini analiz ediyoruz. Bu günlük veriler için AR(1) süreci için parametreleri, $\hat{a} = 0{,}007$ ve $\hat{b} = 0.998$ olarak bulunmuştur.

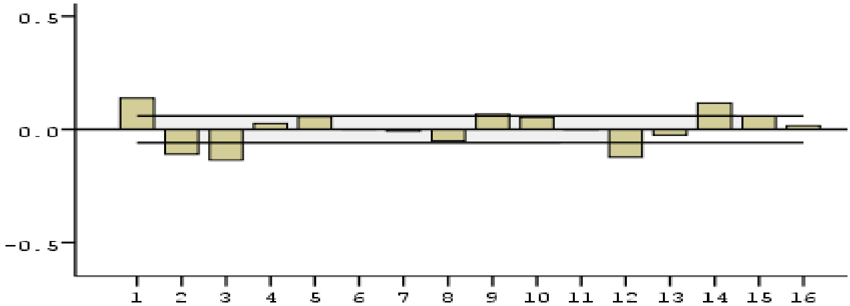


Şekil 7: Faiz oranı tarihsel verileri(05.01.2004- 14.08.2008)

Faiz oranları grafiğine bakıldığında uzun vadeli bir ortalama değer civarında dolaşıldığı görülmektedir. Bu da faiz oranı süreci için Vasicek veya CIR modelinin kullanılabileceğini gösterir.



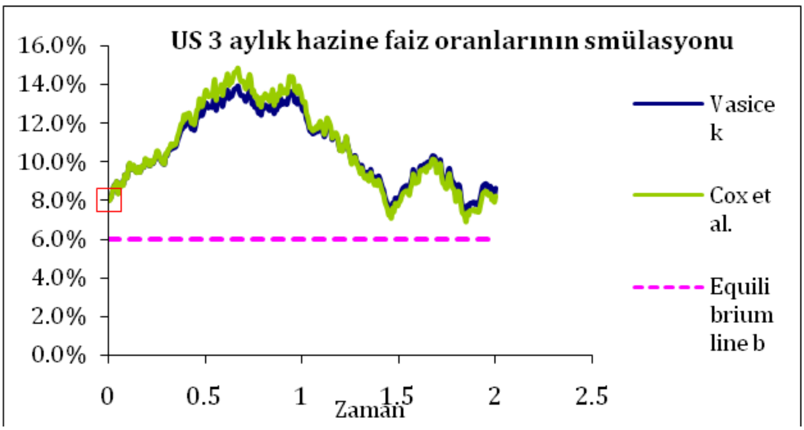
Şekil 8: Faiz Oranlarının Histogramı



Şekil 9: Faiz oranı için ilk farkların otokorelasyonu

Tablo 3 : Faiz oranı için Vasicek ve CIR parametreleri

Parametre	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\delta}^2$
Vasicek	0.0020002	3.1905	0.002945	0.0008655
CIR	0.0020002	3.19	0.050403	



Şekil 10: Faiz oranı simülasyonu

Simülasyonda aşağıdaki tabloda özetlenmiş veriler kullanılmıştır.

Tablo 4: Faiz oranları için simülasyon verileri

	Vasicek	**CIR**
r_0 : Başlangıç faiz oranı	8.00%	8.00%
Sim. zamanı (T)(yıl)	2	2
Dönme hızı	0.07	0.07
Denge faiz oranı	6.00%	6.00%
Oynaklık	3.00%	10.61%
Δt	0.0067	0.0067

4.Sonuç

Faiz oranı ve volatiliteye dayanan finansal ürünlerin modellenmesi ve analizindeki ilk adım ,söz konusu oran veya oynaklık için uygun bir modelin bulunması ve tarihsel verileri kullanarak modelin parametrelerinin tahmin edilmesidir. Çalışmada, VIX oynaklık endeksini ve US 3-aylık hazine bonosu faiz oranlarını modellemek için Vasicek modeli ve CIR modeli kullanıldı. Her iki modelde, sürekli zamanlı tek faktörlü kısa vadeli faiz oranı modeli olarak adlandırılmaktadır. Kısa vadeli oran piyasada doğrudan gözlenemediğinden kısa vadeli faiz oranları çoğunlukla vekil olarak kullanılır. Çalışmamızda US 3-aylık hazine bonosu verimlerini kısa oran için bir vekil olarak kullandık.

Her iki modelinde tahmin yöntemleri tanımlandı ve reel veriler kullanılarak modellerin parametreleri her iki seri için ayrı ayrı tahmin edildi. Daha sonrada bu parametreler kullanılarak her iki model içinde simülasyonlar düzenlendi. Elde edilen sonuçlara bakıldığında her iki zaman serisinin de normalden uzak olduğu, VIX endeksinin oldukça sağa çarpık olduğu görülmektedir. Ayrıca VIX endeksi için Vasicek ve CIR modellerinden elde edilen değerler arasında belirgin bir fark olduğu görülmektedir. Faiz oranı süreci için ise her iki modelinde birbirine yakın değerler verdiği görülmektedir. Vasicek modeli lineer olup kolaylıkla çözülebilir. Fakat temel eksikliği, faiz oranları negatif olabilir. Lokal oynaklığın sabit olması varsayımı gerçekci değildir. CIR modeli faiz oranlarının pozitif olmasını gerektirir. CIR modeli de, Vasicek modeli gibi bir ortalamaya dönme sürecidir. CIR modeli analitik olarak Vasicek modelinden daha az işlevseldir. Sonuç olarak modellerden elde edilen değerlerin gerçek verileri çok iyi bir şekilde temsil ettiği görülmektedir.

Kaynakça

BERNASCHI,M.,Torossantucci,L., ve Uboldi,A.,” Empirical Evaluation of the Market Price of Risk using the CIR Model”,**Physica A** 376, 2007,s.543-554.

BLISS, R.R.,“Movements in the Term Structure of Interest Rates”, **Economic Review, FRB of Atlanta**, fourth quarter, 1997,s.16-33.

BRIGOD.,Dalessandro,A.,Neugebauer,M.,Triki,F.,“A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management”, **Working Paper**,2007

COX,J.C.,Ingersoll,J.,E.,ve Ross,S.A.,”A Theory of the Term Structure of Interest Rate”, **Econometrica**,53,1985,s. 385-407.

ERIKSEN,M.K.,”Interest rate modelling with non Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes”,**Thesis,**Faculty of mathematics and Natural Science,University of Oslo,2008.

HULL,J.C., **Options, Futures and Other Derivatives,** Fifth Edition,Printice Hall,New Jersey,2003.

JAESCHKE,A.G.,” Parameter Estimation and Bessel Processes in Financial Models and Numerical Analysis in Hamiltonian Dynamics”,**Diss.Math.** Wiss.ETH Zurich,1998.

MCCULLOCH, J.H.,“Measuring the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Business,**44,1971,s. 19–31.

NAWALKHA, Sanjay K., Natalia A. Beliaeva, and Gloria M. Soto, **Dynamic Term Structure Modeling: The Fixed Income Valuation Course**, Wiley Finance, John Wiley and Sons, NJ.,2007.

NELSON, C.R. and A.F. Siegel,“Parsimonious Modeling of Yield Curves”, **Journal of Business** 60(4), 1987,s.473-489.

VASICEK, O.A. ve Fong,H.G.,“Term Structure Modeling Using Exponential Splines”,**Journal of Finance** 37(2), 1982,s.339-348.

VASICEK,O., "An equilibrium characterization of the term structure",

Journal of Financial Economics, 5, 177-188, 1977