Oğur, O., Güneş, Z. (2024). Newtonyen Olmayan Ölçülebilir Kümeler Üzerine Bir Not. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 14(1), 295-303.

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 14(1), 295-303, 2024. DOI: 10.31466/kfbd.1405273

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi
The Black Sea Journal of Sciences
ISSN (Online): 2564-7377 https://dergipark.org.tr/tr/pub/kfbd

Araştırma Makalesi / Research Article

Newtonyen Olmayan Ölçülebilir Kümeler Üzerine Bir Not

Oğuz OĞUR[1*], Zekiye GÜNEŞ[2]

Öz

Bu çalışmada, ilk olarak sayılabilir çoklukta ν −ölçülebilir kümenin kesişiminin ve bazı koşullar altında birleşiminin de ν −ölçülebilir olduğu gösterildi. Bunun yanında Newtonyen olmayan ${}^{\nu}G_{\delta}$ ve ${}^{\nu}F_{\sigma}$ küme tanımları verilerek, ilgili teoremler elde edildi. Ayrıca Newtonyen olmayan anlamda Cantor mükemmel küme tanımlandı ve ölçü teorisinde önemli örneklerden olan sayılamaz fakat ölçüsü sıfır olan Cantor kümesi Newtonyen olmayan anlamda genelleştirildi.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen Olmayan Ölçü, ν −ölçülebilir küme, ν −Cantor Küme

A Note on Non-Newtonian Measurable Sets

Abstract

In this study, it was first shown that the intersection of a countably large number of ν −measurable sets and their union under some conditions are also ν −measurable. Besides , the relevant theorems were obtained, by giving non-Newtonian set definitions ${}^{\nu}G_{\delta}$ and ${}^{\nu}F_{\sigma}$. In addition, the Cantor perfect set was defined in a non-Newtonian sense, and the Cantor set, which is an important example in measure theory being uncountable but has zero measure, was generalized in a non-Newtonian sense.

Keywords: Non-Newtonian Measure, ν −measurable set, ν −Cantor Set.

[1]Giresun University, Department of Mathematics, Giresun, Turkey, oguz.ogur@giresun.edu.tr
[2]Giresun Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun, Turkey, zekiyeakkaya52@gmail.com

[*]Sorumlu Yazar/Corresponding Author
Geliş/Received: 15.12.2023 **Kabul/Accepted:** 05.03.2024 **Yayın/Published:** 15.03.2024

1. Giriş

Geçmişten günümüze matematik, mühendislik, finans, ekonomi, tıp, biyomedikal gibi birçok uygulama alanına sahip olan Newtonyen olmayan kalkülüs, 1967-1970 yılları arasında Michael Grossmann ve Robert Katz tarafından klasik analize bir alternatif olarak oluşturulmuştur.

Newtonyen olmayan kalkülüsün temelini oluşturan "Non-Newtonian Calculus" isimli kitap, 1972 yılında Michael Grossmann ve Robert Katz tarafından yayınlanmıştır (Grossman & Katz, 1972). Daha sonra Newtonyen olmayan kalkülüs Michael Grossmann tarafından geliştirilerek geometrik, kuadratik ve harmonik hesap sınıfları elde edilmiştir (Grossmann, 1979; Grossmann, 1983).

Newtonyen olmayan analizde elde edilen bazı çalışmalara örnek verecek olursak; Çakmak ve Başar Newtonyen olmayan dizi uzayları (Çakmak & Başar, 2012), Duyar ve Oğur Newtonyen olmayan reel sayıların topolojisi (Duyar & Oğur, 2017), Duyar ve Sağır Newtonyen olmayan açık kümelerin Lebesgue ölçüsü (Duyar & Sağır, 2017), Oğur ve Demir Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsü (Oğur & Demir, 2019) üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmada Duyar ve Sağır'ın "Non-Newtonian Comment Of Lebesgue Measure in Real Numbers" adlı çalışması (Duyar & Sağır, 2017) ile Demir'in "Reel Sayılarda Newtonyen Olmayan Lebesgue Ölçüsünün Bazı Özellikleri" adlı yüksek lisans tezinden (Demir, 2019) faydalanarak Newtonyen olmayan ölçülebilir kümelerin eksik kalan bazı özellikleri verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1. ν, görüntü kümesi A olan bir üreteç olsun. Her $\dot{p},\dot{q} \in A$ olmak üzere, bu üretece göre aşağıdaki işlemler ve sıralama bağıntısı ile oluşan yapıya $\nu-$aritmetik denir.

$\nu -$ toplama $\quad \dot{p}\dot{+}\dot{q} = \nu\{\nu^{-1}(\dot{p}) + \nu^{-1}(\dot{q})\}$

$\nu -$ çıkarma $\quad \dot{p}\dot{-}\dot{q} = \nu\{\nu^{-1}(\dot{p}) - \nu^{-1}(\dot{q})\}$

$\nu -$ çarpma $\quad \dot{p}\,\dot{\times}\,\dot{q} = \nu\{\nu^{-1}(\dot{p}) \times \nu^{-1}(\dot{q})\}$

$\nu -$ bölme $(\nu^{-1}(\dot{q}) \neq 0)$ $\quad \dot{p}\dot{/}\dot{q} = \nu\{\nu^{-1}(\dot{p})/\nu^{-1}(\dot{q})\}$

$\nu -$ sıralama $\quad \dot{p} \dot{\leq} \dot{q} = \nu\{\nu^{-1}(\dot{p}) \leq \nu^{-1}(\dot{q})\}$

$\mathbb{R}_\nu = \mathbb{R}(N) = \{\nu(x): x \in \mathbb{R}\}$ kümesine Newtonyen olmayan gerçek sayı kümesi denir (Grossman & Katz, 1972).

Tanım 2. $\mathbb{R}_\nu$ deki $(\dot{a},\dot{b})_N$ $\nu-$ açık aralığının ölçüsü

$$m_N(\dot{a},\dot{b})_N = \nu\left(m\left(\nu^{-1}(\dot{a}),\nu^{-1}(\dot{b})\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır (Duyar & Sağır, 2017).

Tanım 3. $\mathbb{R}_\nu$ de boş olamayan bir G ν −açık kümesinin Newtonyen olmayan ölçüsü birleşen aralıklarının Newtonyen olmayan ölçülerinin toplamıdır. Yani

$$m_N(G) = {}_{\nu}\sum_k m_N(\delta_k)$$

Ayrıca

$$m_N(G) = {}_{\nu}\sum_k m_N(\dot{x}_k, \dot{y}_k)_N = {}_{\nu}\sum_k \dot{y}_k \dot{-} \dot{x}_k$$

Burada $\delta_k = (\dot{x}_k, \dot{y}_k)_N$ ile tanımlıdır (Duyar & Sağır, 2017).

Tanım 4. $\mathbb{R}_\nu$ de tanımlı boş olmayan ν −sınırlı, ν −kapalı F kümesinin ölçüsü

$$m_N F = \nu\{m(\nu^{-1}(A), \nu^{-1}(B)) - m(\nu^{-1}(C_S^F)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S = [A, B]_N$, F kümesini içeren en küçük ν −kapalı aralık. Burada $C_S^F = S - F$ kümesi ν −açık kümedir. Yukarıdaki tanım tekrar düzenlenirse

$$m_N F = B \dot{-} A \dot{-} m_N C_S^F$$

elde edilir (Duyar & Oğur, 2017; Oğur & Demir, 2019).

Tanım 5. Boş olmayan ν −sınırlı bir K kümesinin Newtonyen olmayan dış ölçüsü, K kümesini içeren tüm ν −sınırlı, ν −açık kümelerin ölçülerinin en büyük alt sınırıdır. Yani

$$m^*{}_N K = {}^{\nu}\inf_{K \subset G}\{m_N G\}$$

ile tanımlanır (Oğur & Demir, 2019).

Tanım 6. Boş olmayan ν −sınırlı bir K kümesinin Newtonyen olmayan iç ölçüsü, K kümesinin içerdiği tüm ν −kaplı kümelerin ölçülerinin en küçük üst sınırıdır. Yani

$$m_{*N} K = {}^{\nu}\sup_{F \subset K}\{m_N F\}$$

ile tanımlanır (Oğur & Demir, 2019).

Teorem 1. ν −sınırlı bir E kümesi verilsin. Eğer E kümesi ikişer ikişer ayrık ν −ölçülebilir E_k kümelerin sonlu ya da sayılabilir sonsuz kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa E, ν −ölçülebilirdir ve

$$m_N E = {}_N\sum_k m_N E_k$$

eşitliği sağlanır (Demir, 2019).

3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, ilk olarak sayılabilir çoklukta ν −ölçülebilir kümenin kesişiminin ve bazı koşullar altında birleşiminin de ν −ölçülebilir olduğu gösterilecektir. Bunun yanında Newtonyen olmayan ${}^{\nu}G_\delta$ ve ${}^{\nu}F_\sigma$ küme tanımları verilecek ve ilgili teoremler elde edilecektir. Ayrıca

Newtonyen olmayan anlamda Cantor mükemmel küme tanımı verilecek, ölçü teorisinde önemli örneklerden olan sayılamaz fakat ölçüsü sıfır olan Cantor kümesi Newtonyen olmayan anlamda verilecektir.

Teorem 2. Sayılabilir sayıda $\nu -$ölçülebilir kümenin kesişimi $\nu -$ölçülebilirdir.

İspat. E_k kümeleri $\nu -$ölçülebilir kümeler olmak üzere, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. E_k kümeleri $\nu -$ölçülebilir olduğundan $\nu^{-1}(E_k)$ kümeleri ölçülebilirdir. Dolayısıyla $\bigcap_{k=1}^{\infty} \nu^{-1}(E_k)$ kümesi de ölçülebilirdir. Ayrıca

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \nu^{-1}(E_k) = \nu^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \nu^{-1}(E)$$

yazılabileceğinden $\nu^{-1}(E)$ ölçülebilirdir. Dolayısıyla E kümesi $\nu -$ölçülebilir bir kümedir.

Teorem 3. $E_1, E_2, E_3, \ldots$ kümeleri $\nu -$ölçülebilir olsun.

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$$

ise ve

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

kümesi $\nu -$sınırlı bir küme ise

$$m_N E = {}^{\nu}\lim_{n\to\infty}[m_N E_n].$$

İspat. $E_1, E_2, E_3, \ldots$ kümeleri $\nu -$ölçülebilir olduğundan, $\nu^{-1}(E_1), \nu^{-1}(E_2), \nu^{-1}(E_3), \ldots$ kümeleri ölçülebilir kümelerdir. Yine

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$$

olduğundan,

$$\nu^{-1}(E_1) \subset \nu^{-1}(E_2) \subset (E_3) \subset \cdots$$

yazılır. Ayrıca

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

olduğundan

$$\nu^{-1}(E) = \nu^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \nu^{-1}(E_k)$$

olur. E $\nu -$sınırlı olduğundan $\nu^{-1}(E)$ sınırlı olup

$$\begin{aligned} m\nu^{-1}(E) &= \lim_{n\to\infty}[m\nu^{-1}(E_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\nu^{-1}\left(\nu\big(m\nu^{-1}(E_n)\big)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}[\nu^{-1}(m_N E_n)] \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\nu\left(m\nu^{-1}(E)\right) = \nu\left(\lim_{n\to\infty}[\nu^{-1}(m_N E_n)]\right)$$

ve buradan

$$m_N E = {}^{\nu}\lim_{n\to\infty}[m_N E_n]$$

olduğu elde edilir.

Teorem 4. $E_1, E_2, E_3, \dots$ kümeleri ν −ölçülebilir ve $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. Eğer

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

kapsaması sağlanırsa

$$m_N E = {}^{\nu}\lim_{n\to\infty}[m_N E_n]$$

olur.

İspat. $E_1, E_2, E_3, \dots$ kümeleri ν −ölçülebilir olduğundan, $\nu^{-1}(E_1), \nu^{-1}(E_2), \nu^{-1}(E_3), \dots$ kümeleri ölçülebilir kümelerdir. $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ olduğundan

$$\nu^{-1}(E) = \nu^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \nu^{-1}(E_k)$$

yazılır. Ayrıca

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

olduğundan,

$$\nu^{-1}(E_1) \supset \nu^{-1}(E_2) \supset (E_3) \supset \cdots$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} m\nu^{-1}(E) &= \lim_{n\to\infty}[m\nu^{-1}(E_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\nu^{-1}\left(\nu\left(m\nu^{-1}(E_n)\right)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}[\nu^{-1}(m_N E_n)] \end{aligned}$$

ve böylece

$$\nu\left(m\nu^{-1}(E)\right) = \nu\left(\lim_{n\to\infty}[\nu^{-1}(m_N E_n)]\right)$$

yani

$$m_N E = {}^{\nu}\lim_{n\to\infty}[m_N E_n]$$

elde edilir.

Örnek 1 (ν −Cantor ${}^{\nu}G_0$ Kümesi). $S = [\dot{0}, \dot{1}]_N$ olacak şekilde ν −kapalı aralığı alınsın. ν −Cantor ${}^{\nu}G_0$ kümesinin yapımı bir dizi adımda oluşturulsun. $[\dot{0}, \dot{1}]_N$ aralığından; ilk adımda $\frac{\dot{1}}{3}$ uzunluğundaki $\left(\frac{\dot{1}}{3}, \frac{\dot{2}}{3}\right)_N$ aralığı seçilsin, ikinci adımda buna $\frac{\dot{1}}{9}$ uzunluğunda $\left(\frac{\dot{1}}{9}, \frac{\dot{2}}{9}\right)_N$ ve $\left(\frac{\dot{7}}{9}, \frac{\dot{8}}{9}\right)_N$ olmak üzere iki aralık eklensin, üçüncü adımda her birinin uzunluğu $\frac{\dot{1}}{27}$ olan dört aralık daha eklensin. Benzer şekilde devam edilirse

$${}^{\nu}G_0 = \left(\frac{\dot{1}}{3}, \frac{\dot{2}}{3}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{1}}{9}, \frac{\dot{2}}{9}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{7}}{9}, \frac{\dot{8}}{9}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{1}}{27}, \frac{\dot{2}}{27}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{7}}{27}, \frac{\dot{8}}{27}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{19}}{27}, \frac{\dot{20}}{27}\right)_N \cup \left(\frac{\dot{25}}{27}, \frac{\dot{26}}{27}\right)_N \cup \ldots$$

Kümesi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} m_N\left({}^{\nu}G_0\right) &= \frac{\dot{1}}{3} + \frac{\dot{2}}{9} + \frac{\dot{4}}{27} + \cdots \\ &= \nu\left(\nu^{-1}\left(\frac{\dot{1}}{3}\right) + \nu^{-1}\left(\frac{\dot{2}}{9}\right) + \nu^{-1}\left(\frac{\dot{4}}{27}\right) + \cdots\right) \\ &= \nu\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$m_N\left({}^{\nu}G_0\right) = \nu\{1\} = \dot{1}$$

olduğunu gösterir.

ν −Cantor Mükemmel ${}^{\nu}P_0$ Kümesi. $S = [\dot{0}, \dot{1}]_N$, ν −kapalı aralığı ${}^{\nu}G_0$ ν −açık aralıklar kümesi çıkarılarak elde edilen ν −kapalı kümesi $F = {}^{\nu}P_0$ ile gösterilsin. ${}^{\nu}G_0 = C_S^F$;

$$\begin{aligned} m_N\left({}^{\nu}p_0\right) &= \dot{1}\dot{-}\dot{0}\dot{-}m_N C_S^F \\ &= \dot{1}\dot{-}\dot{1} = \dot{0} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ν −Cantor mükemmel ${}^{\nu}P_0$ kümesi ν −sıfır ölçüsüne sahiptir. ν üreteci bire bir örten olduğundan ν −Cantor mükemmel ${}^{\nu}P_0$ kümesi ile Cantor mükemmel kümesinin gücü aynıdır. Cantor mükemmel kümesi sayılamaz olduğundan ν −Cantor mükemmel ${}^{\nu}P_0$ kümesi de sayılamazdır.

Teorem 5. ν −sınırlı her sayılabilir küme ν −ölçülebilirdir ve ν −sıfır ölçüsüne sahiptir.

İspat. ν −sınırlı E kümesi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

noktalarından oluşsun. x_k noktasından oluşan tek elemanlı küme E_k olsun. Açıkça, E_k ν −ölçülebilirdir ve bir ν −sıfır ölçü kümedir ve

$$E = \bigcup_{k=1} E_k$$

olur. Teorem 1'den

$$m_N E = {}_N \sum_k m_N E_k$$

yazılır. Böylece E kümesinin ν −ölçüsü ν −sıfır olur. ν −Cantor mükemmel kümesi ${}^{\nu}P_0$'in gösterdiği gibi teoremin tersi yanlıştır.

Tanım 7. E kümesi, sayılabilir sayıdaki ν −kapalı kümelerin birleşimi olarak temsil edilebilirse, yani

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

ise E 'nin bir ${}^{\nu}F_{\sigma}$ tipi bir küme olduğu söylenir.

Tanım 8. E kümesi, sayılabilir sayıdaki ν −açık kümelerin kesişimi olarak temsil edilebilirse, yani

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

ise E 'nin bir ${}^{\nu}G_{\delta}$ tipi bir küme olduğu söylenir.

Teorem 7. ${}^{\nu}F_{\sigma}$ tipi ve ${}^{\nu}G_{\delta}$ tipi her ν −sınırlı küme ν −ölçülebilirdir.

İspat. ${}^{\nu}F_{\sigma}$ tipi kümeler için açıktır. Çünkü kümelerin birleşiminin ν −sınırlılığı, birleşenlerin ν −sınırlılığını ima eder ve ν −kapalı kümeler ν −ölçülebilir olduğundan

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

ν −ölçülebilirdir.

E, ${}^{\nu}G_{\delta}$ tipinden ν −sınırlı bir küme ise, o zaman E kümesini Δ ile içeren bir ν −açık aralık belirleyerek E'yi ν −sınırlı ν −açık kümelerin kesişimi olarak temsil edebiliriz,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\Delta G_k)$$

buradan, ν −sınırlı, ν −açık kümeler ν −ölçülebilir olduğundan sayılabilir sayıda kesişimleri de ν −ölçülebilirdir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan ${}^{\nu}G_{\delta}$ ve ${}^{\nu}F_{\sigma}$ küme tanımları verilmiş ve ilgili teoremler elde edilmiştir. Newtonyen olmayan analizde önemli yeri olan Cantor mükemmel küme tanımı verilmiş, ölçü teorisinde önemli örneklerden olan sayılamaz fakat ölçüsü sıfır olan Cantor kümesi Newtonyen olmayan anlamda genelleştirilmiştir. Bu çalışmada tanımlanan ${}^{\nu}G_{\delta}$ ve ${}^{\nu}F_{\sigma}$ kümeleri genel ölçü teorisine Newtonyen olmayan anlamda taşınabilir.

Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yazarlar, makalenin tüm süreçlerinde "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, karşılaşılabilecek etik ihlallerden Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi ve yayın kurulunun herhangi bir sorumluluğunun bulunmadığını, bu çalışmanın Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi dışında herhangi bir akademik yayın ortamında değerlendirilmediğini beyan ederler.

Kaynaklar

Çakmak, A. F., & Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*(228), 1-12.

Demir, S. (2019). Reel Sayılarda Newtonyen Olmayan Lebesgue Ölçüsünün Bazı Özellikleri. Giresun: Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Duyar, C., & Oğur, O. (2017). A Note On Topology Of Non-Newtonian Real Numbers. *Journal of Mathematics*(13), 11-14.

Duyar, C., & Sağır, B. (2017). Non-Newtonian Comment of Lebesgue Measure in Real Numbers. *Journal of Mathematics*, 1-4.

Grossman, M., & Robert, K. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. Pigeon Cove(Lowell Technological Institue).

Grossmann, M. (1979). *The first nonlinear system of differential and integral calculus*. Galileo Institute.

Grossmann, M. (1983). *Bigeometric Calculus: A System with a Scale-Free Deriative*. Archimedes Foundation, Rockport Massachussets.

Oğur, O., & Demir, S. (2019). Newtonyen Olmayan Lebesgue Ölçüsü. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 134-139.

Oğur, O., & Demir, S. (2019). On non-Newtonian measure for α−closed sets. *New Trends in Mathematical Sciences*, *7*(2), 202-207.