

Winkler Tipi Elastik Zemine Oturan Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Kirişlerin Statik Analizi

Timuçin Alp ASLAN*¹ ORCID 0000-0002-7558-3568
Ahmad Reshad NOORI² ORCID 0000-0001-6232-6303
Burkay SİVRİ¹ ORCID 0000-0002-1350-9493
Beytullah TEMEL¹ ORCID 0000-0002-1673-280X

¹Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana
²İstanbul Gelişim Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

Geliş tarihi: 30.10.2023 Kabul tarihi: 25.12.2023

Atıf şekli/ How to cite: ASLAN, T.A., NOORI, A.R., SİVRİ, B., TEMEL, B., (2023). Winkler Tipi Elastik Zemine Oturan Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Kirişlerin Statik Analizi. Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Dergisi, 38(4), 955-965.

Öz

Bu çalışmada, Winkler tipi elastik zemine oturan ve kalınlık boyunca fonksiyonel derecelenmiş (FD) malzemeli kirişlerin eğilme davranışı üzerine bir inceleme yapılmıştır. Farklı mesnet koşullarının, malzeme değişim katsayılarının ve Winkler zemin katsayısının FD kirişlerin statik davranışı üzerine etkileri parametrik olarak incelenmiştir. Ele alınan problemin davranışını idare eden denklemler Euler-Bernoulli kiriş teorisine (EBKT) dayanan minimum toplam potansiyel enerji ilkesinin yardımıyla ilk defa bu çalışmada elde edilmiştir. Elde edilen bu kanonik denklem takımının sayısal çözümünde Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile Runge-Kutta 5 (RK5) algoritması kullanılmıştır. Önerilen yöntemin doğruluğu ve uygulanabilirliği, literatürde verilen mevcut çalışmaların değerleri ile bu yöntemin sonuçlarının karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Malzeme değişim katsayısı, Winkler zemin katsayısı ve sınır koşulları ele alınan probleme önemli ölçüde etki etmektedir.

Anahtar Kelimeler: Statik analiz, Winkler tipi elastik zemin, Fonksiyonel derecelenmiş malzeme, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

Static Analysis of Functionally Graded Material Beams Resting on Winkler Type Elastic Foundation

Abstract

In this paper, the bending response of the Functionally Graded Material (FGM) beams resting on the Winkler foundation is examined. The effects of boundary conditions, material gradient indexes, and Winkler spring constants on the static behavior of FGM beams are studied parametrically. The governing equations of the considered problem are obtained with the aid of the minimum total potential energy

*Sorumlu yazar (Corresponding Author): Timuçin Alp ASLAN, taslan@cu.edu.tr

principle based on the Euler-Bernoulli Beam Theory (EBT). Complementary Functions Method (CFM) and the fifth order Runge- Kutta have been used in the numerical solution of these canonical equations. The accuracy and applicability of the proposed method are demonstrated by comparing the method results with those of existing literature. The material gradient index, Winkler constants, and boundary conditions have an important influence on the problem in the hand.

Keywords: Static analysis, Winkler type elastic foundation, Functionally graded materials, Complementary functions method.

1. GİRİŞ

Elastik zemine oturan kiriş probleminin statik ve dinamik analizi inşaat mühendisliği ve makine mühendisliği gibi temel mühendislik alanlarında yaygın olarak araştırılmaktadır. Bu kapsamda yapılan bazı güncel çalışmalar şöyle özetlenebilir;

Aköz ve Kadioğlu, elastik zemine oturan eğri eksenli kirişlerin statik analizini karışık sonlu elemanlar kullanarak araştırmışlardır [1]. Wang ve arkadaşları, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı modellenen kirişlerin eğilme, titreşim ve burkulma davranışını araştırmışlardır. Farklı tiplerde elastik zeminlere oturan kirişlerin kesin çözümlerini Green fonksiyonlarını kullanarak elde etmişlerdir [2]. Chen ve arkadaşları elastik zemine oturan kirişlerin serbest titreşiminin analizi için durum uzay yöntemi ve diferansiyel quadrature yöntemlerini birleştiren karma bir yöntem önermişlerdir [3]. Ying ve arkadaşları, Winkler-Pasternak tipi elastik zemine oturan FD kirişlerin eğilme ve serbest titreşimini analitik olarak araştırmışlardır. Durum uzay metodunu kullanarak elde ettikleri sonuçları literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırmışlardır [4]. Civalek ve Demir, Winkler tipi elastik zemine oturmuş kirişlerin statik, serbest titreşim ve burkulma davranışını araştırmışlardır. Ayrık tekil konvolüsyon ve Harmonik Diferansiyel Quadrature yöntemlerini kullanarak elastik zemine oturan iki ucu ankastre mesnetlenmiş kirişin deplasman ve eğilme değerlerini sayısal olarak elde etmişlerdir [5]. Şimşek, düzgün yaylı yüklü basit mesnetli FD kirişlerin statik analizini araştırmıştır. Kalınlık yönünde fonksiyonel derecelendirilmiş kirişleri Timoshenko ve yüksek mertebeli kayma deformasyon teorilerine dayalı modellemiştir [6]. Fouad ve arkadaşları, elastik zemin üzerindeki FD sandviç kirişin sonlu elemanlar yöntemini

kullanarak analiz etmişlerdir[7]. Akbaş, Winkler tipi zemin üzerine oturan kalınlık yönünde FD kirişlerin serbest titreşim ve eğilme analizini incelemiştir. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine dayalı modellenen basit mesnetli kirişlerin analizinde Navier çözüm yöntemini kullanmıştır [8]. Akgöz ve Civalek, Winkler zemine oturan FD mikro kirişlerin eğilme analizini araştırmışlardır. Farklı kiriş teorilerine dayalı modellenen ve minimum potansiyel enerji ilkesi yardımıyla elde edilen yönetici diferansiyel denklemler, Navier yöntemiyle çözülmüştür [9]. Yanık ve Yaylı, elastik zemine oturmuş klasik ve rijit olmayan sınır koşullarına sahip kirişlerin eksenel titreşim analizini incelemiştir [10]. Lohar ve arkadaşları, elastik zemine oturan eksenel yönde FD kirişin serbest titreşim davranışını farklı zemin rijitleri için karşılaştırmışlardır [11]. Akgöz ve arkadaşları, elastik zemin üzerindeki kirişlerin statik analizi için ayrık tekil konvolüsyon yöntemini kullanmışlardır [12]. Avcar ve Mohammed, kalınlık yönünde FD kirişlerin serbest titreşimini incelemiştir. Winkler zemine oturan FDM kirişlerin serbest titreşimini Newton-Raphson yöntemi kullanarak elde etmişlerdir [13]. Cunedioğlu, elastik ortama oturan farklı sıcaklık ve eksenel yük altındaki kompozit konsol kirişin burkulma ve serbest titreşimini araştırmıştır. Euler-Bernoulli teorisine dayalı modellenen kirişlerin analizini sonlu elemanlar metodu ile gerçekleştirmiştir [14]. Phuong ve arkadaşları, Timoshenko kiriş teorisine dayalı kalınlık yönünde FD kirişlerin eğilme davranışını araştırmışlardır. Kalınlık yönünde simetrik olmayan malzeme değişimine sahip kirişlerin analitik çözümünü elde edebilmek amacıyla nötr yüzeyi konsepti önermişlerdir [15]. Akbaş, Winkler-Pasternak tipi elastik zemine oturan Lifle güçlendirilmiş kompozit kirişlerin statik analizini Ritz yöntemi ile araştırmıştır [16]. Chami ve arkadaşları, Winkler-Pasternak Elastik

zemin üzerine oturan kompozit kirişlerin eğilme analizini analitik modellenme kullanarak incelemiştir [17]. Chen ve arkadaşları, hareketli yüke maruz kalan çift gözenekli FD kiriş sisteminin dinamik tepkisini incelemiştir [18]. Zghal ve arkadaşları, kalınlık yönünde FD boşluklu kirişlerin statik eğilme davranışını karışık sonlu elemanlar yöntemi ile araştırmıştır [19]. Literatürde çeşitli mühendislik mekaniği problemleri TFY kullanarak araştırılmıştır [20-26].

Literatür incelendiğinde birçok çalışma olmasına rağmen, elastik zemine oturan FD kirişlerin statik davranışını TFY ile araştıran herhangi bir çalışma bulunamamıştır. Bu çalışmanın temel amacı, tek parametrelili Winkler tipi elastik zemine oturan ve kalınlık boyunca FD kirişlerin eğilme davranışını idare eden diferansiyel denklemleri TFY ile çözmek için RK5 algoritmasından yararlanılmıştır. Bu etkin yöntem, ilk defa elastik zemine oturan ve kalınlığı boyunca FD kirişlerin eğilme davranışına uygulanmıştır.

2. MATERYAL VE METOT

Şekil 1’de Winkler tipi elastik zemine oturan kirişe ait FD malzemenin değişim fonksiyonu Eşitlik (1) ile verilmektedir.

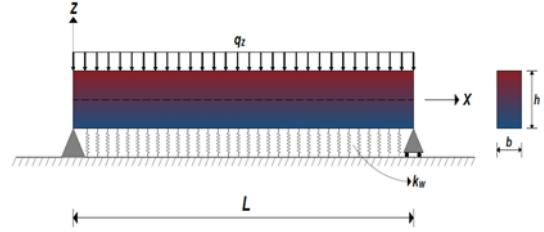
$$E(z) = E_b + (E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{nz} \quad (1)$$

Burada, E_t ve E_b sırasıyla kiriş kesitinin üst ve alt yüzeyi için elastisite modüllerini göstermektedir. nz ise malzeme değişim katsayısını temsil etmektedir. Bu çalışmada, ele alınan FD kirişin malzeme özellikleri kalınlık boyunca heterojen olarak kabul edilmiştir.

Winkler tipi elastik zemine oturan FD kirişin eğilme davranışını idare eden kanonik denklemler, ince çubuk teorisine göre elde edilmiştir. Elastik zemine oturan FD kirişin yer değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılabilir [4].

$$U_x = u(x) + z \theta(x) \quad (2)$$

$$U_z = w(x) \quad (3)$$



Şekil 1. Winkler tipi elastik zemine oturan FD basit mesnetli kiriş

Burada, $w(x)$ düşey deplasmanı, $u(x)$ aksel yer değiştirmeyi ve $\theta(x)$ ise dönmeyi göstermektedir. FD kiriş için şekil değiştirmeler Eşitlik (4-5)'de olduğu gibi ifade edilmektedir [4].

$$\varepsilon_x = \frac{dU_x}{dx} = \frac{du}{dx} + z \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

$$\gamma_{xz} = \theta + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Elastik zemine oturan FD kirişlere ait gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişkiler Eşitlik (6-7)'de verilmektedir [4].

$$\sigma_x = E(z) \varepsilon_x \quad (6)$$

$$\tau_{xz} = G(z) \gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \gamma_{xz} = 0 \quad (7)$$

Minimum toplam potansiyel enerji ifadesi Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı olarak Eşitlik (8)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Pi_t = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \\ & - \int_0^L \int_A (q_z w) dA dx \\ & - \int_0^L \int_A (q_x u) dA dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\bar{k}_w w^2) dA dx \end{aligned} \quad (8)$$

Bu çalışma, ince kiriş teorisine dayalı olduğundan $\gamma_{xz} = 0$ olarak alınacaktır.

Eşitlik (6) ve (7), Eşitlik (8)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \Pi_t = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right. \\ \left. + A_{22} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \\ + A_{33} \left[\theta^2 + 2\theta \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ - \int_0^L \int_A (q_y w) dAdx \\ - \int_0^L \int_A (q_x u) dAdx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \bar{k}_w w^2 dAdx \end{aligned} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir. Burada \bar{k}_w Winkler zemin katsayısıdır. Eşitlik (9)'da görülen A_{11} , A_{12} , A_{22} ve A_{33} kesit rijitlik sabitleridir. Bu sabitler aşağıda sunulan integraller yardımı ile elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \{A_{11}, A_{12}, A_{22}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E(z) \{1, z, z^2\} dz \\ A_{33} = k_s b \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz \end{aligned} \quad (10)$$

Gerekli büyüklüklerin türevleri ve impulsif bileşenleri elde edilerek, Winkler tipi elastik zemine oturan FD ince çubukların eğilme davranışını idare eden 6 adet adi kanonik diferansiyel denklemler bu çalışmada elde edilmiş ve Eşitlik (11-16)'ta verilmiştir.

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{A_{12}M_y - A_{22}N_x}{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}} \quad (11)$$

$$w' = \frac{dw}{dx} = -\theta \quad (12)$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{A_{12}N_x - A_{11}M_y}{A_{12}^2 - A_{11}A_{22}} \quad (13)$$

$$N' = \frac{dN}{dx} = -q_x \quad (14)$$

$$Q'_z = \frac{dQ_z}{dx} = -q_y + \bar{k}_w w \quad (15)$$

$$M'_y = \frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (16)$$

Bu denklemlerde N, Q_z ve M_y sırasıyla aksenal kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momentini göstermektedir. Elde edilen (11-16) eşitlikleri matris formunda yazılabilir.

$$\frac{d\{\Psi(x)\}}{dx} = [A(x)]\{\Psi(x)\} + \{\Phi(x)\} \quad (17)$$

Burada x , bağımsız değişkeni temsil etmektedir. Eşitlik (17)'de verilen iki noktalı sınır değer problemi TFY ile çözülmektedir. İki noktalı sınır değer problemi, TFY yardımıyla başlangıç değer problemine indirgenebilmektedir. Eşitlik (17) için genel çözüm ise,

$$\{\Psi(x)\} = \sum_{m=1}^6 C_m [\mathbf{U}^{(m)}(x)] + \{\mathbf{V}(x)\} \quad (18)$$

olarak elde edilmektedir. Burada $\{\mathbf{V}(x)\}$ diferansiyel denklemin özel çözümünü ve $[\mathbf{U}^{(m)}(x)]$ ise olayı idare eden diferansiyel denklemin homojen çözümünü göstermektedir. $[\mathbf{U}^{(m)}(x)]$ terimini elde etmek için m 'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilmektedir. Özel çözümünün elde edilebilmesi için başlangıç şartları sıfır alınmaktadır. İntegrasyon sabitleri (C_m), kirişin sınır şartlarından elde edilir. Problemin sınır şartları, [23]'de detaylı bir şekilde verilmektedir.

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, tek parametrelili Winkler tipi elastik zemine oturan, kalınlık boyunca FD malzemeli kirişlerin eğilme davranışı incelenmiştir. Farklı Winkler zemin katsayılarının, mesnet koşullarının

ve malzeme değişim katsayılarının eğilme davranışı üzerindeki etkileri parametrik olarak incelenmiştir. Uygulamalarda kullanılan malzemelere ait mekanik özellikler Çizelge 1’de sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar Çizelge ve grafik formunda sunularak değerlendirilmiştir.

Çizelge 1. Malzemelerin mekanik özellikleri

Malzeme	E (Gpa)	ν
Kirişin en üst liflerinde kullanılan malzeme özellikleri	70	0.3
Kirişin en alt liflerinde kullanılan malzeme özellikleri	380	0.3

Winkler zemin katsayısının boyutsuzlaştırılmasında Eşitlik (19) kullanılmıştır [27].

$$k_w = \frac{\bar{k}_w L^4}{E I} \quad (19)$$

Bu denklemde k_w boyutsuz Winkler zemin katsayısını, \bar{k}_w zemin türüne bağlı Winkler zemin katsayısını, E kirişin en üst liflerinde kullanılan malzemenin elastisite modülünü, I ise kesitin atalet momentini göstermektedir. $k_w = 0$ alındığında elastik zemin etkisi ihmal edilmektedir.

Elde edilen çökme değerlerinin boyutsuzlaştırılması ise Eşitlik (20) yardımıyla yapılmıştır.

$$\bar{w} = \frac{w E I}{q L^4} \quad (20)$$

Bu eşitlikte w çökme değerini ve q düzgün yayılı yükün şiddetini göstermekte olup $q = 100$ N/m alınmıştır.

Bu çalışmada k_w için 0, 10 ve 100 değerleri kullanılmıştır. Tüm örneklerde kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 1’de sunulmuştur. Ele alınan tüm FD kirişlerde $b = 0.1$ m olarak alınmıştır.

Öncelikle önerilen yöntem mevcut literatür ile karşılaştırılarak doğruluğu gösterilmiştir. Bu amaç ile ankastre-ankastre (A-A) ve serbest-serbest (S-S)

mesnetli kirişler için maksimum çökme değerleri elde edilerek Çizelge 2’de [27] ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 2. Boyutsuz düşey deplasmanların ($\bar{w} \times 10^{-2}$) literatür ile karşılaştırılması

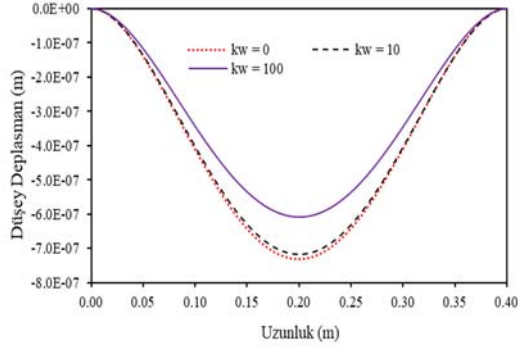
	k_w	Doeva [27]	Bu çalışma
A-A	0	0.2604	0.2604
	10	0.2553	0.2552
	100	0.2165	0.2165
S-S	0	1.3028	1.3020
	10	1.1804	1.1803
	100	0.6400	0.6401

Çizelge 2’den de görüldüğü gibi, karşılaştırılan tüm durumlar için TFY sonuçları mevcut literatür sonuçları ile uyumludur.

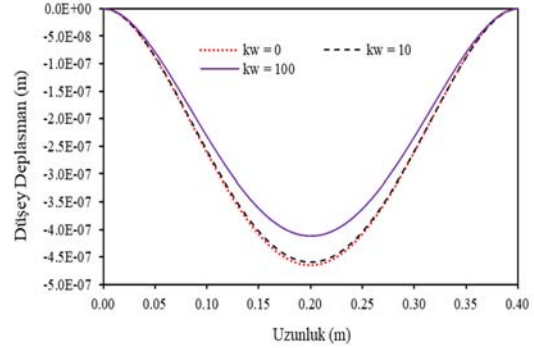
Düşey deplasman değerleri birçok farklı durum için elde edilerek parametrik çalışmalar yapılmıştır. Malzeme değişim katsayısının ve Winkler zemin katsayısının kiriş davranışı üzerindeki etkisinin daha iyi yorumlanabilmesi için hesaplanan sonuçlar hem liste (Çizelge 3) hem de Şekil 2-12’de grafik formunda sunulmuştur.

Çizelge 3. A-A ve S-S sınır koşulları için boyutsuz düşey deplasman ($\bar{w} \times 10^{-2}$) değerleri

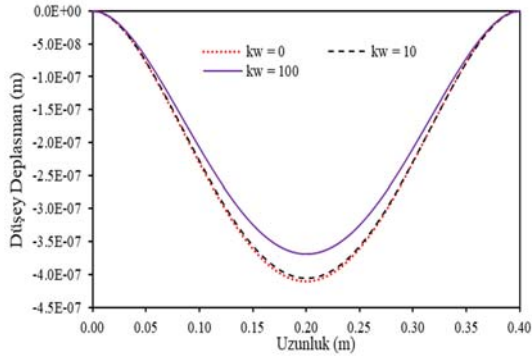
nz	k_w	A-A	S-S
Alüminyum (0)	0	0.2604	1.3020
	10	0.2552	1.1803
	100	0.2165	0.6400
0.5	0	0.1653	0.8711
	10	0.1632	0.8149
	100	0.1465	0.5150
1	0	0.1463	0.7769
	10	0.1447	0.7318
	100	0.1314	0.4806
2	0	0.1311	0.6875
	10	0.1298	0.6520
	100	0.119	0.4448
5	0	0.1148	0.5852
	10	0.1138	0.5593
	100	0.1054	0.3997
Zirkonya (seramik)	0	0.0911	0.4557
	10	0.0905	0.4398
	100	0.0851	0.3348



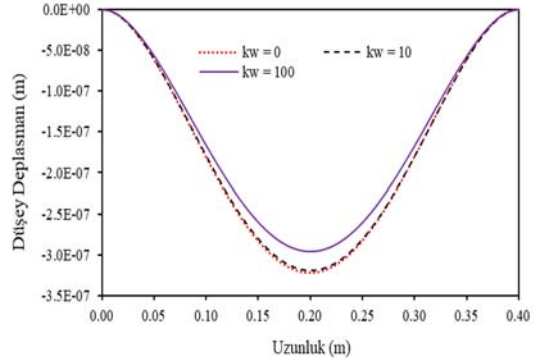
Şekil 2. Değişim katsayısı $nz=0$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



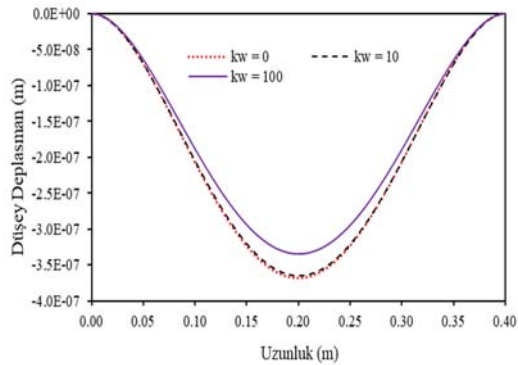
Şekil 5. Değişim katsayısı $nz=0.5$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



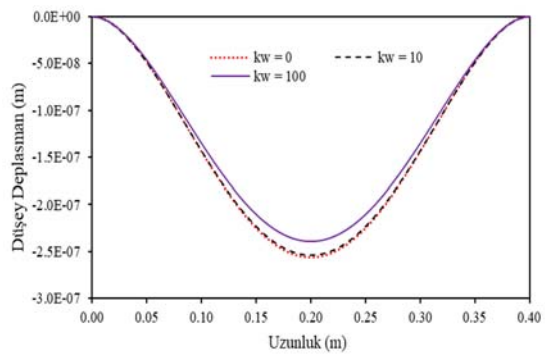
Şekil 3. Değişim katsayısı $nz=1$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



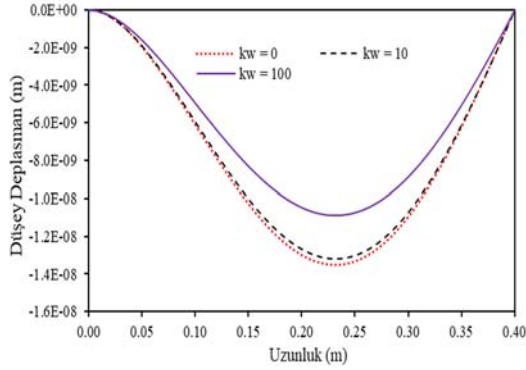
Şekil 6. Değişim katsayısı $nz=5$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



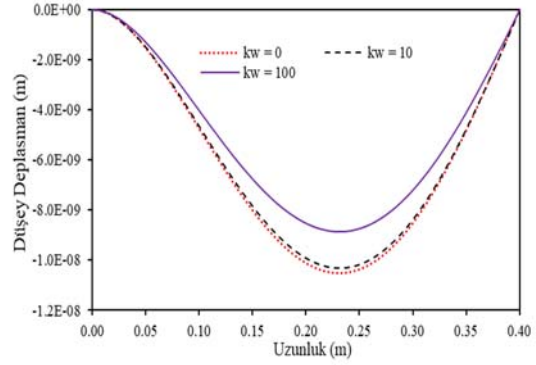
Şekil 4. Değişim katsayısı $nz=2$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



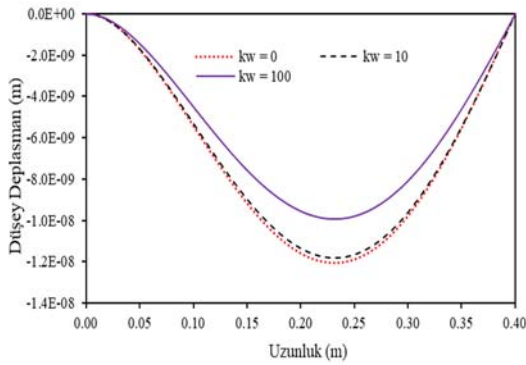
Şekil 7. Değişim katsayısı $nz=10$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



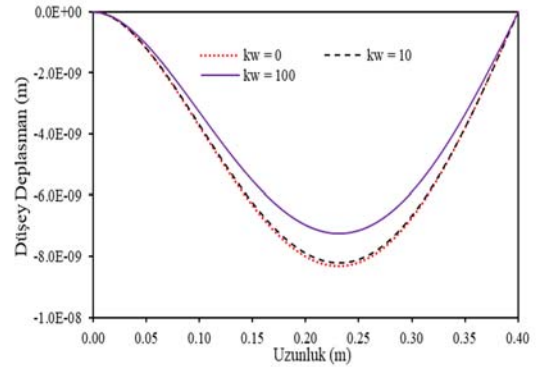
Şekil 8. Değişim katsayısı $nz=1$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=4$)



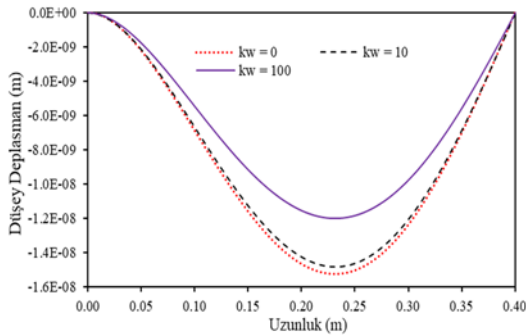
Şekil 11. Değişim katsayısı $nz=5$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=4$)



Şekil 9. Değişim katsayısı $nz=2$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=4$)



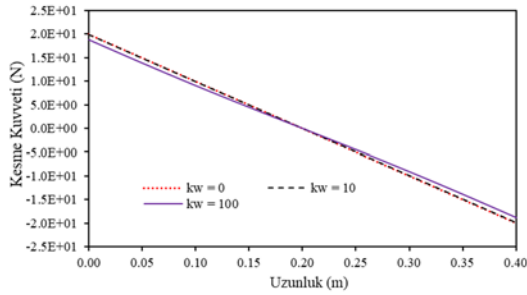
Şekil 12. Değişim katsayısı $nz=10$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=4$)



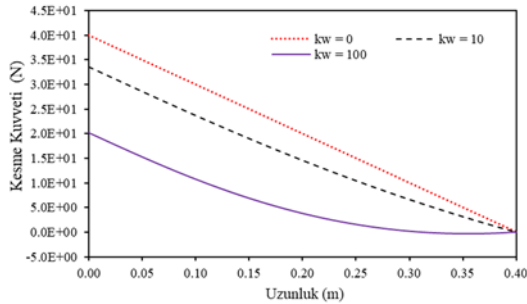
Şekil 10. Değişim katsayısı $nz=0.5$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen çökme değerleri ($L/h=4$)

Çalışmanın bu aşamasında Winkler zemin katsayısının FD kirişlerinde oluşan kesme kuvveti üzerindeki etkisini araştırmak için parametrik çalışmalar yapılmış ve sonuçlar Şekil 13-16'da çizilmiştir.

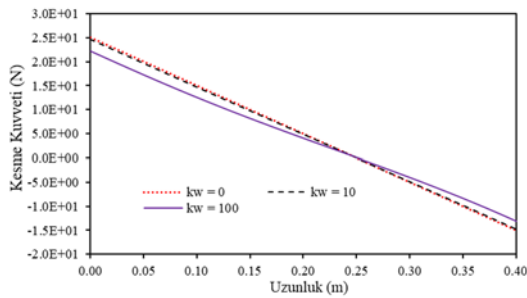
Şekil 13-16 incelendiğinde, Winkler zemin katsayısı k_w azaldıkça kesme kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir. Düşey deplasman değerlerinde olduğu gibi $k_w=0$ ve $k_w=10$ için elde edilen sonuçlar yakındır. Winkler tipi elastik zemine ait katsayısının konsol kirişlerin kesme kuvvetine etkisi diğer mesnet koşullarına göre daha belirgindir.



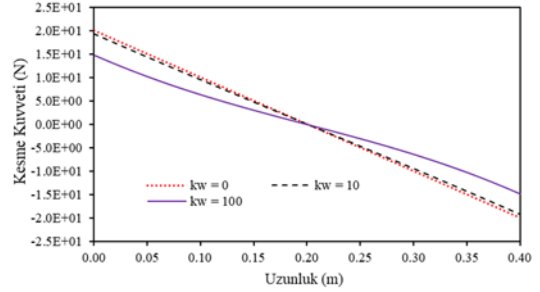
Şekil 13. Değişim katsayısı $nz=5$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen kesme kuvveti ($L/h=16$)



Şekil 14. Değişim katsayısı $nz=5$ ve konsol kiriş için elde edilen kesme kuvveti ($L/h=16$)

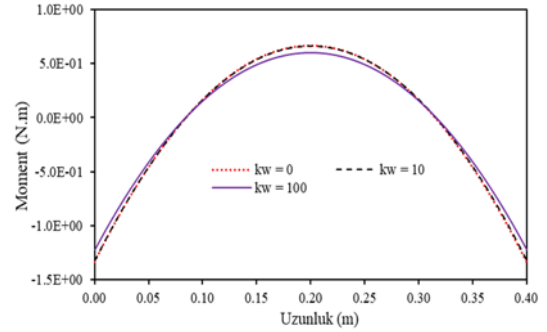


Şekil 15. Değişim katsayısı $nz=5$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen kesme kuvveti ($L/h=16$)

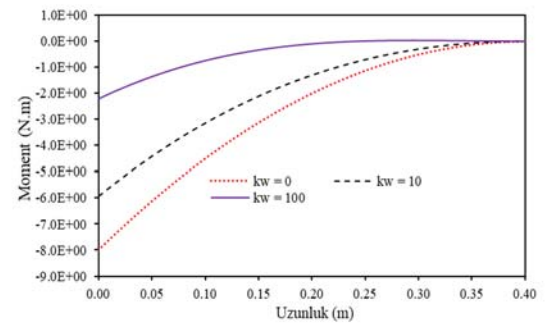


Şekil 16. Değişim katsayısı $nz=5$ ve S-S mesnetli kiriş için elde edilen kesme kuvveti ($L/h=16$)

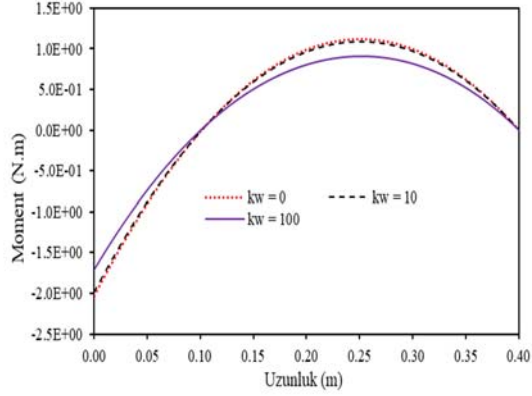
Kesme kuvveti değerleri karşılaştırıldıktan sonra Winkler zemin katsayısının eğilme momenti üzerindeki etkileri incelenmiş ve sonuçlar Şekil 17-20'de verilmiştir.



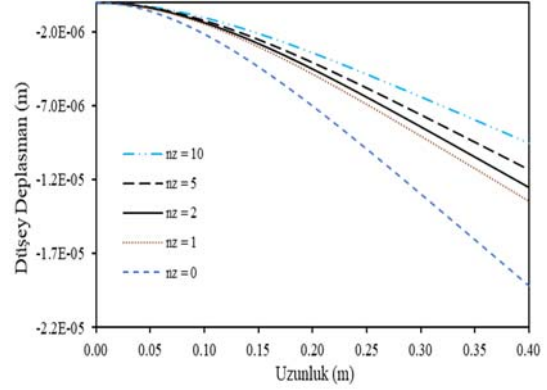
Şekil 17. Değişim katsayısı $nz=2$ ve A-A mesnetli kiriş için elde edilen eğilme momenti ($L/h=16$)



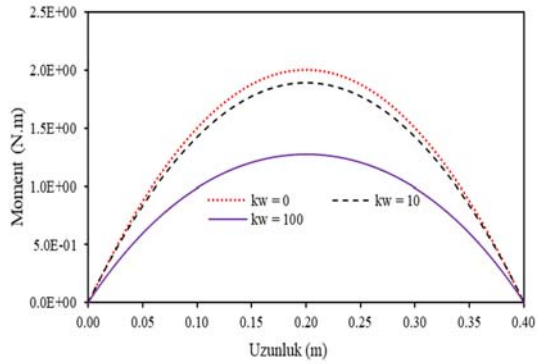
Şekil 18. Değişim katsayısı $nz=2$ ve konsol kiriş için elde edilen eğilme momenti ($L/h=16$)



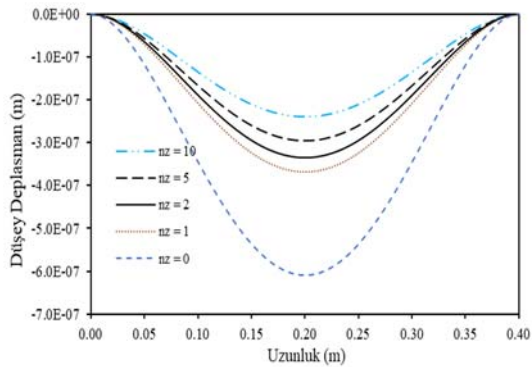
Şekil 19. Değişim katsayısı $n_z=2$ ve A-S mesnetli kiriş için elde edilen eğilme momenti ($L/h=16$)



Şekil 22. $kw=10$ zemin katsayısı için ve A-S sınır koşulu için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)



Şekil 20. Değişim katsayısı $n_z=2$ ve S-S mesnetli kiriş için elde edilen eğilme momenti ($L/h=16$)



Şekil 21. $kw=100$ ve A-A sınır koşulu için elde edilen çökme değerleri ($L/h=16$)

Şekil 17-20'den de görüldüğü gibi, kw değeri küçüldükçe eğilme momentleri büyümektedir. Mesnet koşulları açısından bakıldığında; Winkler zemin katsayısının en çok etkilediği durum A-S (konsol kiriş durumu) en az etkilediği mesnet koşulu ise A-A durumudur. Momenti sıfır olduğu ve momentin maksimum olduğu noktaların konumlarına Winkler zemin katsayısının etki etmediği görülmüştür.

Son olarak, malzeme değişim katsayısının Winkler tipi elastik zemine oturan FD kirişlerin eğilme davranışına etkisi araştırılmıştır. Bu amaç ile $kw=100$ alınarak A-A mesnetli ve konsol kirişlerinin farklı malzeme değişim değerleri için çökme değerleri elde edilerek Şekil 21-22'de çizilmiştir. Şekil 21-22'ye bakıldığında, n_z değerlerinin artmasıyla çökme değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü kullanılan FD malzeme fonksiyonunda malzeme değişim katsayısının artması eğilme rijitliğini artırmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, tek parametrelili Winkler tipi elastik zemine oturan ve kalınlık boyunca FD malzemeli kirişlerin eğilme davranışı araştırılmıştır. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla elde edilen kanonik denklemlerin sayısal çözümünde TFY kullanılmıştır. Çalışmada Winkler zemin

katsayılarının, malzeme değişim katsayılarının ve mesnet koşullarının FD kirişlerin statik davranışına etkileri incelenmiştir.

Tüm mesnet koşulları için k_w değeri arttıkça düşey deplasmanların azaldığı görülmüştür. Malzeme değişim katsayısının artmasıyla Winkler zemin katsayısının düşey deplasmanlar üzerindeki etkisinin azaldığı anlaşılmaktadır. Ayrıca momentin sıfır olduğu ve momentin maksimum olduğu noktalarda kirişin Winkler zemin katsayısından etkilenmediği görülmüştür. Diğer yandan Winkler zemin katsayısının en çok A-S, en az ise iki ucu ankastre mesnetlenmiş (A-A) sınır koşulu için kirişi etkilediği görülmüştür.

Son olarak bu çalışmada önerilen metodun Winkler tipi elastik zemine oturan FD kirişlerin statik analizi için oldukça etkin ve kolayca uygulanabilir olduğu gösterilmiştir.

5. KAYNAKLAR

1. Aköz, A.Y., Kadioğlu, F., 1996. The Mixed Finite Element Solution of Circular Beam on Elastic Foundation. *Computers & Structures*, 60(4), 643-651.
2. Wang, C.M., Lam, K.Y., He, X.Q., 1998. Exact Solutions for Timoshenko Beams on Elastic Foundations Using Green's Functions. *Journal of Structural Mechanics*, 26(1), 101-113.
3. Chen, W.Q., Lü, C.F., Bian, Z.G., 2004. A Mixed Method for Bending and Free Vibration of Beams Resting on A Pasternak Elastic Foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 28(10), 877-890.
4. Ying, J., Lü, C.F., Chen, W.Q., 2008. Two-Dimensional Elasticity Solutions for Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundations. *Composite Structures*, 84(3), 209-219.
5. Civalek, Ö., Demir, Ç., 2009. Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Ayrık Tekil Konvolüsyon ve Harmonik Diferansiyel Quadrature Yöntemleriyle Analizi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 11(1), 56-71.
6. Şimşek, M., 2009. Static Analysis of a Functionally Graded Beam Under a Uniformly Distributed Load by Ritz Method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1(3), 1-11.
7. Boukhelf, F., Bouiadjra, M.B., 2017. Static Analysis of P-FGM Beams Resting on the Winkler Elastic Foundations. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. 4(1), 18-22.
8. Akbaş, Ş.D., 2015. Free Vibration and Bending of Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundation. *Research on Engineering Structures and Materials*, 1(1), 25-37.
9. Akgöz, B., Civalek, Ö., 2015. Bending Analysis Of FG Microbeams Resting on Winkler Elastic Foundation via Strain Gradient Elasticity. *Composite Structures*, 134, 294-301.
10. Yanık, F., Yaylı, M.Ö., 2015. Rijit Olmayan Sınır Koşullarında Elastik Zemine Oturan Bir Çubuğun Eksenel Titreşim Analizi. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1), 35-44.
11. Lohar, H., Mitra, A., Sahoo, S., 2016. Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Linearly Taper Beam on Elastic Foundation. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 149, 012130.
12. Akgöz, B., Mercan K., Demir, Ç., Civalek, Ö., 2016. Static Analysis of Beams on Elastic Foundation by the Method of Discrete Singular Convolution. *International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)* 8(3), 67-73.
13. Avcar, M., Mohammed, W.K.M., 2017. Winkler Zemin ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme Özelliklerinin Kirişin Frekans Parametrelerine Etkilerinin İncelenmesi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5(3), 573-580.
14. Cunedioğlu, Y., 2017. Elastik Ortama Oturan Kompozit Kirişlerin Farklı Sıcaklık ve Eksenel Yük Altında Burkulma ve Serbest Titreşimi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 6(1), 180-190.
15. Phuong, N.T.B., Tu, T.M., Phuong, H.T., Van Long, N., 2019. Bending Analysis of Functionally Graded Beam with Porosities Resting on Elastic Foundation Based on Neutral

- Surface Position. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-HUCE*, 13(1), 33-45.
16. Akbaş, Ş.D., 2020. Static Analysis of a Fiber Reinforced Composite Beam Resting on Winkler-Pasternak Foundation. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(3), 88-98.
 17. Chami, K., Messafer, T., Hadji, L., 2020. Analytical Modeling of Bending and Free Vibration of Thick Advanced Composite Beams Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundation. *Earthq. Struct.*, 19(2), 91-101.
 18. Chen, S., Zhang, Q., Liu, H., 2021. Dynamic Response of Double-FG Porous Beam System Subjected to Moving Load. *Engineering with Computers*, 38(3), 20.
 19. Zghal, S., Ataoui, D., Dammak, F., 2022. Static Bending Analysis of Beams Made of Functionally Graded Porous Materials. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(3), 1012-1029.
 20. Temel, B., Yildirim, S., Tutuncu, N., 2014. Elastic and Viscoelastic Response of Heterogeneous Annular Structures Under Arbitrary Transient Pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 78-83.
 21. Yildirim, S., Tutuncu, N., 2018. Radial Vibration Analysis of Heterogeneous and Non-Uniform Disks via Complementary Functions Method. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 53(5), 332-337.
 22. Celebi, K., Yarimpabuc, D., Tutuncu, N., 2018. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams Using Complementary Functions Method. *Archive of Applied Mechanics*, 88, 729-739.
 23. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2021. Dynamic Analysis of Functionally Graded Porous Beams Using Complementary Functions Method in the Laplace Domain. *Composite Structures*, 256, 113094.
 24. Yildirim, S., 2020. Free Vibration Analysis of Sandwich Beams with Functionally-Graded-Cores by Complementary Functions Method. *AIAA Journal*, 58(12), 5431-5439.
 25. Sivri, B., Temel, B., 2022. Euler Bernoulli ve Timoshenko Kiriş Teorilerine Dayalı Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolonların Burkulma Analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi*, 37(2), 319-328.
 26. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2020. Static Analysis of FG Beams via Complementary Functions Method. *European Mechanical Science*, 4(1), 1-6.
 27. Doeva, O., Masjedi, P.K., Weaver P.M., 2021. Closed Form Solutions for an Anisotropic Composite Beam on a Two-Parameter Elastic Foundation. *European Journal of Mechanics /A Solids* 88, 104245.

