

Eksik Tahrikli Döner Ters Sarkaç Sisteminin Yukarı Yükseltmesi için Enerji Tabanlı Doğrusal Olmayan Kontrol Algoritması ve Deneysel Doğrulaması

Fatih ADIGÜZEL^{1*}

¹Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye

*1 fadiguzel@yildiz.edu.tr

(Geliş/Received: 08/01/2024;

Kabul/Accepted: 12/06/2024)

Öz: Bu çalışmada, döner ters sarkaç sistemi hareketli koluyla sınırlı bir bölge içinde, salınımı kontrol edilerek ve sarkaç enerjisi artırılarak, kararlı denge noktasından kararsız denge noktasına çıkarılması hedeflenmektedir. Döner ters sarkaç sisteminin doğrusal olmayan modeli ve denge noktalarındaki doğrusal modelleri verildikten sonra sarkaç yukarı yükseltme algoritması tanıtılmaktadır. Yukarı yükseltme algoritması, sarkaç salınırken belli noktalarda kol yardımıyla sarkaca enerji yüklemesine dayanmaktadır. Burada kol ivmelendirilmesi sabit bir ivme ile hareket ettirilmektedir. Yukarı yükseltme işlemindeki algoritma, sarkacın hızının en fazla olduğu yere yani kararlı denge noktasına ilerlerken ve periyodunu tamamlarken devreye girmektedir. Bu analizler hesaplanmış sınırlar dikkate alınarak yapılmaktadır. Sarkacın yukarı yükselmesi gerçekleştiğinde doğrusal model üzerinden elde edilmiş temel bir tam durum geri beslemeli kontrolcü devreye girmektedir ve sarkacı kararsız denge noktasında tutmaktadır. Böylece, anahtarlamalı bir kontrol yapısı elde edilmektedir. Önerilen kontrol algoritmasının doğrulaması için önerilen algoritma bir döner sarkacı üzerinde gerçek zamanlı olarak test edilmiştir. Farklı kol ivmelendirme değerleri ile elde edilen karşılaştırmalı sonuçlar sunulmuştur. Kol ivmesi $\pm 32 \text{ rad/s}^2$ 'den $\pm 64 \text{ rad/s}^2$ 'ye çıkarıldığında sarkacın yukarı yükseltme süresi yaklaşık 9 s'den 5 s'ye düşmektedir. Bu sonuçlar, önerilen algoritmanın deneysel başarısını göstermektedir.

Anahtar kelimeler: Döner sarkaç, enerji tabanlı yukarı yükseltme, kol ivmelendirme, doğrusal olmayan kontrol algoritması, LQR.

Energy-Based Nonlinear Control Algorithm for Swing-Up of Underactuated Rotary Inverted Pendulum System and Its Experimental Verification

Abstract: This study aims to control the oscillation and increase the pendulum energy with the movable arm of the rotary inverted pendulum, swinging the pendulum up from a stable equilibrium point to an unstable equilibrium point in a restricted zone. After the nonlinear model of the rotary inverted pendulum system and the linear models at the equilibrium points are given, the pendulum swing-up algorithm is introduced. The swing-up algorithm is based on increasing energy into the pendulum with the help of an arm at certain points while the pendulum is swinging. At this point, the arm acceleration is moved by a constant acceleration. The algorithm of the swinging-up is activated when the pendulum completes its period and moves to the point of maximum speed where the stable equilibrium point. These analyses are made by taking calculated limits in these operations into account. When the pendulum swing-up is achieved, a classical full-state feedback controller obtained from the linear model comes into play and keeps the pendulum at the unstable equilibrium point. Thus, a switching control structure is obtained. To verify the proposed control algorithm, the proposed algorithm is carried out in real-time on a rotary inverted pendulum. The comparative results obtained with the different arm acceleration values are presented. When the arm acceleration is increased from $\pm 32 \text{ rad/s}^2$ to $\pm 64 \text{ rad/s}^2$, the pendulum swing up time decreases from approximately 9 sec to 5 sec. These results demonstrate the experimental success of the proposed algorithm.

Key words: Rotary Pendulum, energy-based swing-up, arm acceleration, nonlinear control algorithm, LQR.

1. Giriş

Döner ters sarkaç sistemi eksik tahrikli çalıştırılan doğrusal olmayan bir mekanik sistemdir. Eksik tahrikli döner ters sarkaç sistemi, farklı yaklaşımlara sahip kontrol tekniklerinin ve algoritmalarının etkinliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için deneysel bir düzenek olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Döner sarkacın kontrolü, kontrol teorisinde ortak bir örnektir ve ortak bir problem olarak tanımlanmaktadır [1, 2].

Döner ters sarkaç motor ucuna sistematik olarak eklenmiş açısız hareket eden bir çubuk ile buna tutturulmuş 360 derece dönebilen ikinci bir çubuktan oluşmaktadır. Döner ters sarkaç ilk olarak 1991 yılında Tokyo Teknoloji Enstitüsü'nde Katsuhisa Furuta tarafından icat edilmiştir. Günümüze kadar geliştirilmiş ve kontrol edilmiş farklı tiplerde ters sarkaç sistemleri vardır. Tek sarkaca sahip araba sarkaç sistemleri [3, 4], çift çubuklu arabalı ters sarkaç sistemleri [5], tek ve çift çubuklu döner ters sarkaç sistemleri [6, 7], sarkaç ucuna bağlı olan bir tekerin

* Sorumlu yazar: fadiguzel@yildiz.edu.tr. Yazarların ORCID Numarası: ¹ 0000-0002-2161-690X

dönmesi sonucu kuvvetin uygulandığı sarkaç sistemleri, tek kollu ve çiftli paralel çubuklu arabalı ters sarkaç sistemleri, gezgin ters sarkaç sistemleri, seri robotlarla kontrol edilen ters sarkaç sistemleri literatürde ön plana çıkan sistemlerdir.

Eksik tahrikli mekanik sistemlerin kontrolü yıllardır mühendislik camiasının ilgisini çekmektedir. Bu sistemler, serbestlik dereceleri yönünden daha az kontrol girişli (eksik tahrikli) olan mekanik sistemlerdir. Girişlerin bu eksikliği, onları kontrol etmedeki temel zorluktur. Ayrıca, eksik tahrikli mekanik sistemlerin kontrolü; robotik, uzay ve deniz araçlarındaki geniş uygulamaları nedeniyle halen aktif bir araştırma alanıdır. Bazı örnekleri; esnek bağlantılı robotlar, mobil robotlar, yürüyen robotlar, mobil platformlardaki robotlar, arabalar, lokomotif sistemleri, yılan-tipi ve yüzen robotlar, akrobatik robotlar, uçaklar, uzay aracı, helikopterler, uydular, yüzey tekneleri ve sualtı araçlarıdır [2, 7].

Döner ters sarkaç sisteminin iki denge noktası vardır. Biri kararlı denge noktası, diğeri ise kararsız denge noktasıdır. Sistemin kararlı denge noktası sarkacın aşağı halde durduğu durumu göstermektedir. Herhangi bir kontrol kuvveti yokluğunda sistem, doğal olarak bu duruma geri dönmektedir. Sistemin kararsız denge noktası ise 90 derecelik açıyla sahip olduğu yukarı haldeki pozisyonudur. Buradaki problem kararsız denge noktasında sistemin sabit tutulma isteği için sistemin modellenmesi, kontrol sisteminin oluşturulmasıdır. Literatürde, döner ters sarkaç sisteminin ana kontrol hedefleri arasında yukarı yükseltme ve kararsız denge noktasının kararlı kılacak kontrol tasarımları en çok öne çıkan problemlerdir [8, 9]. Antonio-Cruz vd. [10] tarafından yukarı yükseltme probleminde statik sürtünme yerine dinamik sürtünme problemi ele alınmıştır. Bir diğer çalışmada Docekal vd. [11] ters sarkaç sisteminin enerji tabanlı yukarı yükseltmesi ve kararsız denge noktasında kararlı kılınması için ileri bir LQR yöntemi önermişlerdir. Yang vd. [12] ise enerji tabanlı yukarı yükseltme çözümü için Bang-Bang kontrol yöntemine karşı yörünge planlamalı sarkaç yukarı yükseltmesi yapmıştır. Yukarı yükseltme kısmını ele almayıp sadece kararsız denge noktasının kontrolü üzerine kesirli dereceli PID kontrol yapısı Dwivedi vd. [13] tarafından önerilmektedir. Kararlı kılma problemi için doğrusal olmayan bir kontrol yapısı Türker vd. [14] önermektedir. Ayrıca, doğrusal ve doğrusal olmayan kontrol yapılarının birlikte kullanılması ile elde edilen anahtarlamalı kontrol yapıları üzerine literatürde çalışmalar mevcuttur [15, 16]. Abdullah vd. [17] döner ters sarkaç için sundukları anahtarlamalı bir kontrol yapısını enerji algoritması, LQR ve bulanık mantık kontrol yapılarının bileşiminden elde etmişlerdir. Bunların yanında, ters sarkaç sistemlerinde yörünge takibi ile denge kontrolü farklı kontrol yapıları ile ele alınmıştır: kayan kipli kontrol [18], yapay sinir ağı temelli model referans kontrol [19], uyarlamalı bulanık tabanlı kayan kipli kontrol [20]. Bahsedilen çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada kolun farklı ivmelendirme seviyeleri ile sarkaç yukarı yükseltme zamanının düşürülmesi ele alınmaktadır ve kol limitleri göz önünde bulundurulmaktadır.

Döner ters sarkaç sisteminin yukarı yükseltmesi için literatürde genel olarak tercih edilen enerji tabanlı algoritmaların farklı performans kriterlerini ön planda tutan geliştirilmiş versiyonları mevcuttur. Åström vd. [21] minimum zaman anlayışı ve minimum zaman çözümlerinin dayanıklılığı ile ters sarkaç sisteminde yukarı yükseltme problemini çözmüşlerdir. Başka bir çalışmada Freidovich vd. [22] kısmi enerji şekillendirmeli kontrol ile Furuta sarkacının kararlı kılınması ele almışlardır. Gordillo vd. [23] hız-düşüm algoritmasını bahsedilen problemin çözümü için önermişlerdir. Mevcut enerji tabanlı kontrol çözümünden farklı olarak, Tanaka vd. [24] öncelikle kontrol yasasında tekil noktalardan kaçınmak için gerek ve yeter koşullarından bahsetmişlerdir ve sarkacın küresel hareket analizini gerçekleştirmişlerdir.

Döner sarkaç sistemi ikinci derecen doğrusal olmayan eksik tahrikli bir sistem olduğu için çeşitli derleme çalışmalarında yer almıştır [25, 26]. Ayrıca özel olarak da döner ters sarkaç sistemi için derleme çalışması mevcuttur [27]. Bu çalışmaların ifade ettiği güncel çalışmaların yanında, yukarı yükseltme işleminin kararsız denge noktasının belli bir komşuluğuna kadar yapılmasından sonra hızlı oturma zamanının elde edilmesi için çeşitli doğrusal olmayan yöntemler önerilmiştir. Nguyen vd. [28] tarafından değiştirilmiş kayan kipli kontrol ve Nguyen vd. [29] tarafından bulanık mantık tabanlı kayan kipli kontrol geliştirilmiştir. Eksik tahrikli yapılarından dolayı doğrudan geri adımlamalı kontrol yapısının uygulanmadığı döner sarkaç sistemi için modelden bağımsız geri adımlamalı kontrol [30] ve geri adımlamalı kayan kipli kontrol [31] yapıları kararlı kılma problemi için önerilmiştir. Bu çalışmada ise döner ters sarkaç sistemi için önceden belirlenmiş kol sınırları içerisinde sarkacın yukarı yükseltmesi hedeflenmektedir ve kararlı kılma problemi ise geleneksel bir yaklaşım olan tam durum geri beslemeli kontrol yapısı ile ele alınmaktadır.

Bu çalışmada, döner ters sarkaç sisteminde sarkacın yukarı yükseltmesi için doğrusal olmayan durum beslemeli kontrolcü sonrasında sarkacın enerjisinin şekillendirilmesine dayalı bir kontrol algoritması sunulmaktadır. Bahsedilen algoritmada, sarkaç salınımlarında belli noktalarda kol yardımıyla sarkaca enerji yüklemesi gerçekleştirilmektedir. Ters sarkaç sisteminin kol ivmelendirilmesi sabit bir ivme ile hareket ettirilmektedir ve bu şekilde enerji yüklemesi yapılmaktadır. Burada üzerine durulması gerekli bir diğer nokta sabit kol ivmelendirmesinin değişimi ile sarkacın yukarı çıkma süresinin değişmesidir. Sabit kol ivmesinin artırılması sarkacın yukarı yükseltme süresini azaltmaktadır. Yukarı yükseltme işlemindeki algoritma, sarkacın hızının en fazla olduğu yere yani kararlı denge noktasına ilerlerken ve sarkaç periyodunu tamamlarken devreye alınmaktadır.

Bahsedilen kritik analizler hesaplanmış sınırlar dikkate alınarak yapılmaktadır. Sarkaç yukarı yükseltme problemini farklı kol ivme değerleri ile üstesinden gelen algoritma önerisi sonrasında, sarkaç kararsız denge noktasının belli komşuluğunda, MATLAB/LQR yazılımı ile kontrolcü kazançları elde edilmiş tam durum geri beslemeli kontrol devreye girmektedir. Böylece bu çalışmada, kararlı kılma problemi ile anahtarlamalı bir kontrol yapısı önerilmektedir. Son olarak, sunulan kontrol algoritmasının doğrulaması için, önerilen algoritma bir döner sarkacı üzerinde gerçek zamanlı olarak çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Deneysel çalışmaların sonuçları önerilen algoritmanın başarısını göstermektedir.

2. Döner Ters Sarkaç Sistemin Modellenmesi ve Doğrusallaştırılması

Bu bölümde, döner ters sarkaç sisteminin hem doğrusal olmayan hem de denge noktalarında doğrusal modelleri verilmektedir. İki farklı modelin elde edilmesinin temel sebebi, sarkacın enerjisini yükseltecek kontrol algoritması sistemin doğrusal olmayan modeli üzerinden gerçekleştirilmesidir. Dahası, sarkaç kararsız denge noktasına yükseltilmesinden sonra doğrusal model üzerinden tam durum geri beslemeli kontrol devreye girmektedir. Başka bir ifade ile anahtarlamalı bir kontrol yapısının inşa edilmektedir.

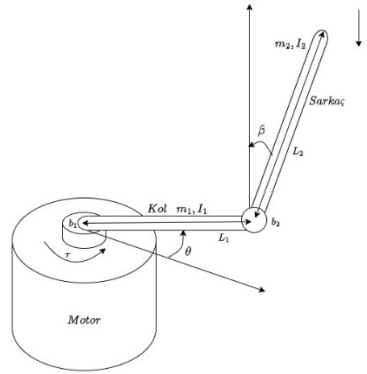
2.1. Döner Ters Sarkaç Sisteminin Modellenmesi

Döner ters sarkaç sisteminin modellenmesi iki değişken üzerinden yapılmaktadır. Bu parametrelerden birincisi döner kolun yatay eksenindeki açısı, diğeri ise sarkacın dik eksenindeki açısıdır. Döner ters sarkaç sisteminin genel gösterimi Şekil 1’de sunulmaktadır. Tablo 1’de döner sarkaç sisteminin parametre değişken isimleri, değerleri ve birimleri verilmektedir.

Döner ters sarkaç sistemi gibi mekanik sistemlerin Newton yasası ile modelinin çıkarılması oldukça zordur. Bunun en temel sebebi, Newton mekaniğindeki kuvvetler ve kısıtlamalar yerine Euler-Lagrange mekaniğinde enerjilerin ve genelleştirilmiş koordinatların kullanılmasıdır. Birçok çalışmada genelleştirilmiş koordinat sistemi ile enerjinin şekillendirildiği sistemlerde denklem (1)’deki Euler-Lagrange formülasyonu kullanılmaktadır. Euler-Lagrange eşitliği,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

şeklindedir. Bu denklemde \mathcal{L} Lagrange sembolünü, q_i sistemin genelleştirilmiş koordinatları, Q_i sistemdeki dış kuvvetleri temsil etmektedir. Euler-Lagrange eşitliği her iki koordinat değişkeni için de ilerleyen aşamada yazılmaktadır. Euler-Lagrange eşitliği sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisi arasındaki fark ile hesaplanmaktadır. q_1 sarkaç açısını ve q_2 kol açısını ifade etmek üzere bu açılar denklem (2)’de belirtilmektedir.



Şekil 1. Döner ters sarkaç sisteminin şematik diyagramı.

Tablo 1. Döner sarkaç sisteminin parametre listesi.

Tanım	Sembol	Değer	Birim
Yerçekimi ivmesi	g	9,81	$m.s^{-2}$
Kolun kütlesi	m_1	0,125	kg
Sarkacın kütlesi	m_2	0,01	kg
Kol uzunluğu	L_1	0,515	m
Sarkaç uzunluğu	L_2	0,215	m
Kolun kütle merkezinin dönme noktasına uzaklığı	l_1	0,2575	m
Sarkacın kütle merkezinin dönme noktasına uzaklığı	l_2	0,1075	m
Kolun ataleti	I_1	0,0014	$kg.m^2$
Sarkacın ataleti	I_2	$1,9260 \times 10^{-5}$	$kg.m^2$
Sarkaç ile kol arasındaki sürtünme katsayısı	b_1	420×10^{-6}	$N.m.rad^{-1}$
Kol ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı	b_2	380×10^{-5}	$N.m.rad^{-1}$

$$(q_1, q_2) = (\beta, \theta). \quad (2)$$

Sarkaç kolunun kinetik enerjisi denklem (3)'te verilmektedir ve sarkaç koluna ait kinetik enerji düzenlenirse denklem (4) elde edilmektedir.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2. \quad (3)$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2. \quad (4)$$

Sarkacın kinetik enerjisi denklem (5)'te yazılmaktadır. Sarkaca ait kinetik enerji düzenlenirse denklem (6) elde edilmektedir.

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2. \quad (5)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[(L_1\dot{\theta} + l_2 \cos \beta \dot{\beta})^2 + (l_2 \sin \beta \dot{\beta})^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2. \quad (6)$$

Sistemin toplam kinetik enerjisi (7)'deki denklem ile yazılabilmektedir.

$$T = T_1 + T_2. \quad (7)$$

T_1 ve T_2 ifadelerini düzenlenir ve denklem (7)'de yerlerine yazılırsa, sisteme ait kinetik enerji bulunabilmektedir. T toplam kinetik enerji ifadesi denklem (8)'de ve denklem (9)'da hesaplanmaktadır.

$$T = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[(L_1\dot{\theta} + l_2 \cos \beta \dot{\beta})^2 + (l_2 \sin \beta \dot{\beta})^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2. \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[(I_2 + m_2l_2^2)\dot{\beta}^2 + 2m_2l_2L_1 \cos \beta \dot{\beta} \dot{\theta} + (I_1 + m_1L_1^2 + m_2L_1^2 + m_2l_2^2 \sin^2 \beta)\dot{\theta}^2 \right]. \quad (9)$$

Döner kol yalnızca yatay ekseninde hareket ettiği için sistemin potansiyel enerjisini yalnızca sarkaç belirlemektedir. Denklem (10)'da sistemin potansiyel enerjisi verilmektedir.

$$V = m_2l_2g \cos \beta. \quad (10)$$

Sistemin Lagrange fonksiyonu (9) ve (10) denklemleri kullanarak denklem (11)'de verilmektedir.

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (11)$$

Böylece, sisteme ait Lagrange fonksiyonu (12) denklemi ile elde edilmektedir.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(I_2 + m_2 l_2^2) \dot{\beta}^2 + 2m_2 l_2 L_1 \cos \beta \dot{\beta} \dot{\theta} + (I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta) \dot{\theta}^2] - m_2 l_2 g \cos \beta. \quad (12)$$

Sarkaç açısı β için hareket denklemi, denklem (13)'de verilmektedir ve denklem (14)'te bu denklemin düzenlenmiş hali verilmektedir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = Q_\beta. \quad (13)$$

$$H_1 \ddot{\beta} + H_2 \cos \beta \ddot{\theta} - H_3 \sin \beta \cos \beta \dot{\theta}^2 - H_4 g \sin \beta = -b_1 \dot{\beta}. \quad (14)$$

Kol açısı θ için hareket denklemi, denklem (15)'te ve denklem (16)'da sunulmaktadır.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta. \quad (15)$$

$$H_2 \cos \beta \ddot{\beta} + (H_5 + H_3 \sin^2 \beta) \ddot{\theta} - H_2 \sin \beta \dot{\beta}^2 + 2H_3 \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} \dot{\theta} = \tau - b_2 \dot{\theta}. \quad (16)$$

Buradaki τ kontrol sinyalini göstermektedir. Bu gösterimde H_1, H_2, H_3, H_4 ve H_5 ifadelerinin açılımları denklem (17)'deki denklemlerle gösterilmektedir.

$$H_1 = I_2 + m_2 l_2^2, \quad H_2 = m_2 l_2 L_1, \quad H_3 = m_2 l_2^2, \quad H_4 = m_2 l_2, \quad H_5 = I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2. \quad (17)$$

Mekanik sistemlerin hareket denklemlerini genel olarak yazarsak [33]; $M(q)$ atalet matrisini, $C(q, \dot{q})$ merkezkaç ve Coriolis kuvvetlerinin etkisini, $G(q)$ ise yerçekimi kuvvetlerini ifade etmek üzere, döner ters sarkacının konfigürasyon alanı denklem (18)'deki biçimde tanımlanmıştır:

$$q = [\theta, \beta]^T \in S^1 \times S^1, \quad S^1 = [0, 2\pi). \quad (18)$$

U kontrol giriş vektörü olmak üzere, sistem hareketinin Euler-Lagrange ile elde edilmiş hareket dinamiği denklem (19)'da ve denklem (20)'de yazılabilmektedir [14, 33]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = U. \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \cos(\beta) \\ H_2 \cos(\beta) & H_5 + H_3 \sin^2(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -H_3 \sin(\beta) \cos(\beta) \dot{\theta} \\ -H_2 \sin(\beta) \dot{\beta} + H_3 \sin(\beta) \cos(\beta) \dot{\theta} & H_3 \sin(\beta) \cos(\beta) \dot{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_4 g \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \dot{\beta} \\ \tau - b_2 \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Ayrıca $M(q)$ atalet matrisi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

- 1) $M(q)$ pozitif ve simetrik bir matristir ($M > 0, M = M^T$).
- 2) $\left(\frac{1}{2}\dot{M} + C\right)$ ifadesi ters simetrik bir matristir.

2.2. Döner Ters Sarkaç Sisteminin Durum-Uzay Modeli

Döner ters sarkaç sistem modeli toplam dört tane birinci dereceden diferansiyel denklem olarak yazılabilmektedir. Bu denklemlerdeki durum değişkenleri denklem (21)'de gösterilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

buradaki x_1 sarkaç açısı, x_2 sarkaç açısal hızı, x_3 kolun açısı ve x_4 kolun açısal hızını ifade etmektedir.

Sistem durumlarından x_1 ve x_3 'ün eşitleri bilinmektedir. Sistemde doğrusal olmayan etkileri barındıran x_2 ve x_4 durumlarının bulunması için, yazdığımız tüm model denklemi M matrisinin tersi ile çarpılırsa bu iki durum elde edilmiş olmaktadır. M matrisinin tersi denklem (22)'de ve sistemin M^{-1} ile çarpımı denklem (23)'de verilmektedir.

$$M^{-1} = \frac{1}{H_1 H_5 - H_2^2 \cos^2(x_1) + H_1 H_3 \sin^2(x_1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_5 + H_3 \sin^2(x_1) & 0 & -H_2 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -H_2 \cos(x_1) & 0 & H_1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = M^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & H_2 \sin(x_1) x_2 - H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) x_4 & 0 & -H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H_4 g \sin(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 x_2 \\ 0 \\ \tau - b_2 x_4 \end{bmatrix} \right). \quad (23)$$

Sonuç olarak, sistemin durum-uzay modeli denklem (24)'te elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{H_1 H_5 - H_2^2 \cos^2(x_1) + H_1 H_3 \sin^2(x_1)} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \right). \quad (24)$$

Burada (24) denklemindeki parametrik değişkenler (25)-(32) denklemlerinde verilmektedir.

$$a = -H_2 \cos(x_1) (H_2 \sin(x_1) x_2 - H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) x_4). \quad (25)$$

$$b = H_2 H_3 x_2 \cos^2(x_1) \sin(x_1) + H_3 x_4 \cos(x_1) \sin(x_1) (H_5 + H_3 \sin^2(x_1)). \quad (26)$$

$$c = H_1 (H_2 x_2 \sin(x_1) - H_3 x_4 \cos(x_1) \sin(x_1)). \quad (27)$$

$$d = -H_1 H_3 x_2 \cos(x_1) \sin(x_1) - H_2 H_3 x_4 \cos^2(x_1) \sin(x_1). \quad (28)$$

$$e = gH_4 \sin(x_1) (H_5 + H_3 \sin^2(x_1)). \quad (29)$$

$$f = -gH_2H_4 \cos(x_1) \sin(x_1). \quad (30)$$

$$h = -H_2(\tau - b_2x_4) \cos(x_1) + b_1x_2(H_5 + H_3 \sin^2(x_1)). \quad (31)$$

$$i = H_1(\tau - b_2x_4) - b_1H_2x_2 \cos(x_1). \quad (32)$$

2.3. Döner Ters Sarkaç Sisteminin Doğrusal Modeli

U giriş vektörü olmak üzere, döner ters sarkaç sisteminin doğrusal modeli $\dot{X} = f(X, U)$ şeklinde bir modeldir. Bu modelin doğrusallaştırılmasındaki yöntem, $\dot{X} = f(X, U)$, $f, X \in \mathbb{R}^n$; $U \in \mathbb{R}^m$ için referans noktası (X_0, U_0) etrafında doğrusallaştırıldığında; $\dot{X} = AX + BU$ için A ve B matrisleri (33) ve (34) denklemlerinde sırasıyla verilmektedir.

$$A_{n \times n} = \left[\frac{\partial f}{\partial X} \right]_{(X_0, U_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(X_0, U_0)}. \quad (33)$$

$$B_{n \times m} = \left[\frac{\partial f}{\partial U} \right]_{(X_0, U_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(X_0, U_0)}. \quad (34)$$

Döner ters sarkaç sisteminin kararlı denge noktasındaki doğrusallaştırılmış modeli, sarkacı yukarı kaldırma probleminde, kolun sabit ivme hareketi için ivme hesabında kullanılacaktır. İvme hesabındaki bu sınırlama, sarkacın kararlı denge noktasındaki salınım periyodu içerisinde kolun bir sınır noktasından diğerine hareket etmesine bağlıdır.

Kararlı denge noktası $(x_1, x_3) = (\pi, 0)$ etrafında doğrusal hale getirildiğinde; sistem A ve B matrisleri (35) ve (36) denklemlerinde sırasıyla elde edilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{gH_4H_5}{-H_2^2 + H_1H_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{gH_2H_4}{-H_2^2 + H_1H_5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{H_2}{H_2^2 - H_1H_5} \\ 0 \\ \frac{H_1}{-H_2^2 + H_1H_5} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Döner ters sarkaç sisteminin enerjisi artırılarak sarkaç adım adım kararlı denge noktasından kararsız denge noktasına doğru hareket ettirilmesi hedeflenmektedir. Bu hareket çalışmaları sonucunda sistem istenilen noktaya yani kararsız denge noktasına getirildiğinde sistem kolu doğrusallaştırılmış model üzerinden çeşitli kontrol yöntemleri kullanılarak bu noktada dengede tutulmaya çalışılmaktadır.

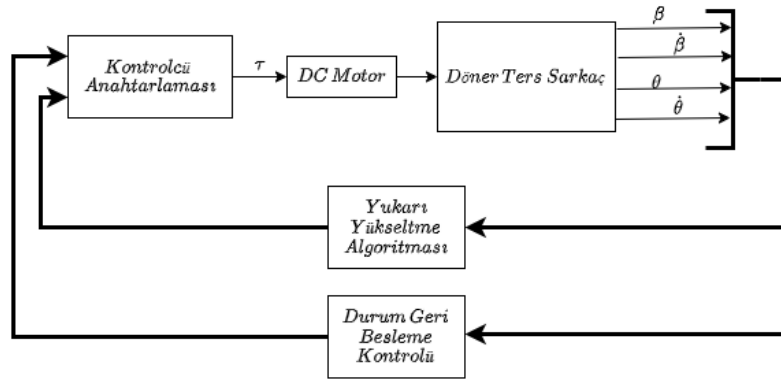
Kararsız denge noktası $(x_1, x_3) = (0, 0)$ etrafında doğrusallaştırıldığında; sistem A ve B matrisleri (37) ve (38) denklemlerinde sırasıyla elde edilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{gH_4H_5}{-H_2^2+H_1H_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{gH_2H_4}{-H_2^2+H_1H_5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{H_2}{H_2^2-H_1H_5} \\ 0 \\ \frac{H_1}{-H_2^2+H_1H_5} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

3. Kontrol Algoritması

Bu bölümde sarkacın enerjisini artırmak için kolun hareketine bağlı oluşturulan algoritma verilmektedir. Bir önceki bölümde açıklandığı üzere, sarkacın enerjisini değiştirmek ve kolun belirlenen sınırlar arasında kalmasını sağlamak için, kol belli zaman ve konum aralıklarında ivmelendirilmektedir. Önerilen kontrol yapısının diyagramı Şekil 2’de resmedilmektedir.



Şekil 2. Kontrol yapısının şematik diyagramı.

3.1 Doğrusal Olmayan Terimlerin Sadeleştirilmesi

Döner ters sarkaç sistem modelini gösteren denklem (14) ve denklem (16) göz önüne alınarak, sistem kontrol girişi olarak değerlendirdiğimiz τ ifadesini (39) denklemine aşağıdaki şekilde tasarlanabilir:

$$\tau = \frac{H_2H_3}{H_1} \sin(x_1) \cos^2(x_1) \dot{x}_3^2 + \frac{H_2H_4g}{H_1} \sin(x_1) \cos(x_1) + 2H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) \dot{x}_1 \dot{x}_3 - H_2 \sin(x_1) \dot{x}_1^2 + \left(H_5 + H_3 \sin^2(x_1) - \frac{H_2^2}{H_1} \cos^2(x_1) \right) u. \quad (39)$$

Böylece kontrol girişi olarak (39) denklemine verilen kontrol girişinin sisteme uygulanması ile doğrusal olmayan modelde doğrusal olmayan terimlerin sadeleştirilmesi gerçekleştirilmektedir. Buradaki u yeni kontrol girişi olarak kabul edilmektedir.

Sisteme doğrusal olmayan terimlerin sadeleştirilmesi yöntemi uygulandığında sistemin kendi dinamikleri kullanılarak, uygulanan kontrol girişi üzerinden sistem içerisindeki doğrusal olmayan kısımlar sadeleştirilmektedir. Yani sistem dinamikleri üzerinden kolun hızına doğrudan etki edebilir hale gelmektedir. Sistemin kısmi doğrusallaştırılmış model dinamiği (40) ve (41) denklemlerinde verilmektedir.

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{H_1} (-H_2 \cos(x_1) \ddot{x}_3 + H_3 \sin(x_1) \cos(x_1) \dot{x}_3^2 + H_4 g \sin(x_1)). \quad (40)$$

$$\ddot{x}_3 = u. \quad (41)$$

Burada önerilen ön kontrol yapısı, Nguyen vd. [28] tarafından gerçekleştirilmiş geri besleme ile doğrusallaştırma kontrolcüsünün bir versiyonudur.

3.2 Enerji Tabanlı Algoritmanın Tasarımı

Döner ters sarkaç farklı bir isimle Furuta sarkaç için minimum enerjili olarak sarkaç yukarı yükseltme problemi detayları ile Fantoni vd. [32] tarafından ele alınmaktadır. Döner sarkaç sistemin enerjisinin artmasını hedeflediğimiz bu çalışmada enerji fonksiyonunun türevinin belli koşullar altında her zaman sıfırdan büyük olduğunu gösterecek ve kol limitlerini dikkate alacak bir algoritma bulunması hedeflenmektedir. Böylece, ters sarkacın yukarı yükseltme problemi başarıyla çözülecektir. Sarkaca ait enerji fonksiyonu [21] denklem (42)'de

$$E_{pen} = \frac{1}{2} H_1 \dot{x}_1^2 + H_4 g \cos(x_1) \quad (42)$$

biçiminde elde edilmektedir. Ayrıca denklem (40) kullanılarak, sarkacın enerji fonksiyonunun türevi denklem (43)'de hesaplanmaktadır.

$$\dot{E}_{pen} = H_2 \cos(x_1) \dot{x}_1 \left(-u + \frac{H_3}{H_2} \sin(x_1) \dot{x}_3^2 \right). \quad (43)$$

Bu noktada $\frac{H_3}{H_2} \sin(x_1) \dot{x}_3^2$ ifadesi, sarkacın denge noktaları civarında sıfıra yakın değerler alacağı düşünülerek ihmal edilip, yeni kontrol sinyali denklem (44)'te

$$u = -\frac{k \operatorname{sign}(\cos(x_1) \dot{x}_1)}{H_2} \quad (44)$$

seçimi ile denklem (43) denklem (45) halini almaktadır.

$$\dot{E}_{pen} = k |\cos(x_1) \dot{x}_1|. \quad (45)$$

Tasarım parametresi olan k değerinin seçimi ile sarkaç enerjisi istenilen şiddete ve yönde değiştirilebilmektedir. Dikkat edilmesi gereken nokta eğer $k > 0$ ise enerjinin artacağı, aksi durumda $k < 0$ ise enerjinin azalacağı söz konusudur. Sarkaç enerjisinin değiştirilmesi için k sabit seçilmesine gerek yoktur, ancak bu çalışmada sabit seçilmektedir. Böylece sabit bir k seçimi ile yapılacak analizler oldukça kolaylaşmaktadır. Ayrıca denklem (45)'teki $\cos(x_1) \dot{x}_1$ teriminin en büyük değerinin sarkaç kararlı denge noktasından geçerken alacağı anlaşılmaktadır. Yani sarkaç kararlı denge noktasından geçerken enerji en yüksek verimlilikle ayarlanabilmektedir. Bu sebepten dolayı sarkaç bu nokta civarında iken kol hareket ettirilmeye başlanacaktır. Böylece $\frac{H_3}{H_2} \sin(x_1) \dot{x}_3^2$ ifadesinin ihmal edilmesinin analize etkisi de azaltılmış olmaktadır.

Sarkacın salınım hareketine bakıldığında, sarkaca en büyük enerji aktarımı önceki bölümlerde de belirtildiği üzere sarkaç kararlı denge noktasından geçerken gerçekleşmektedir ($\cos(x_1) = 1$). Bu durumda $|\dot{x}_1|$ maksimum değerini alacaktır. Sarkaç kararlı denge noktasından geçerken enerji en yüksek değerine ulaşacağı için, kol bu noktada sabit bir ivme ile hareketlendirilecektir. Böylece enerjinin artırılması sağlanmış olacaktır. Fakat sarkacın enerji değişimi esnasında kol ivmesinin yön değiştirmemesi gerekmektedir. Fakat bu durumda da kol açısı belirlenen sınır değerlerin dışına çıkabilmektedir. Bunun önüne geçmek üzere, sarkacın enerji artırımı en verimli nokta olan kararlı denge noktası civarında başlatılacaktır. Kolun olası en büyük sabit ivme değerini yaklaşık olarak elde etmek üzere, sarkacın çeyrek periyot hareketi hesaplanarak, kolun bu kadar sürede hareketinin yarısını tamamlaması için hesaplamalar gerçekleştirilecektir. O halde, bu sabit ivme hareketinin süresi için sarkacın kararlı denge noktasındaki doğrusal modeli üzerinden salınım periyodu hesaplanmalıdır. Bu hesaplama sarkaç denklemlerinin kararlı denge noktasında doğrusallaştırılması ile yapılacaktır. Sistem modeli denklem (14)'te ve denklem (16)'da doğrusal olmayan denklemlerdir. Bu denklemlerin kararlı denge noktasındaki $(x_1, x_3) = (\pi, 0)$ doğrusal modelinden (46) ve (47) denklemleri elde edilmektedir.

$$\ddot{x}_1 = \frac{g H_4 H_5}{H_2^2 - H_1 H_5} x_1 - \frac{H_2}{H_2^2 - H_1 H_5} \tau. \quad (46)$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{gH_2H_4}{H_2^2 - H_1H_5} x_1 - \frac{H_1}{H_2^2 - H_1H_5} \tau. \quad (47)$$

Bu denklemler sarkaç dinamiği kontrol girişinin sıfır olması durumu ile düşünüldüğünde, sarkacın doğrusal modeli Tablo 1'deki değerlere göre sayısal olarak (48) denkleminde hesaplanmaktadır.

$$\ddot{x}_1 = -200,8691 x_1. \quad (48)$$

Kararlı denge noktasındaki doğrusallaştırılmış model üzerinden sarkacın izleyeceği yol (49) denkleminde verilmektedir.

$$x_1 = \alpha \cos(\omega t + \phi). \quad (49)$$

Denklem (49)'u denklem (48)'e eşit hale getirmek için denklem (49)'un türevi alınır (50) ve (51) denklemleri elde edilmektedir.

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 \alpha \cos(\omega t + \phi). \quad (50)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1. \quad (51)$$

(48) ve (51) denklemlerinden salınım açısal frekansı (52) denkleminde elde edilmektedir.

$$\omega = 14,1728. \quad (52)$$

Buradan sistemin salınım periyodu (53) denkleminde hesaplanabilmektedir

$$T_{py} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (53)$$

Hesaplanan periyot, sarkaç salınıminin yarı periyodudur. Buradan yarı periyot $T_{py} = 0,4432$ s, periyot $T_p = 0,8864$ s olarak bulunmaktadır. Böylece, doğrusal model üzerinden salınım periyodu elde edilmiş olmaktadır. Deneysel olarak elde edilen periyot ise $T_p = 0,888$ s hesaplanmıştır.

Doğrusal model üzerinden hesaplanan periyot, doğrusal olmayan modelin periyodu düşünüldüğünde her zaman daha az veya eşit bir değer olacaktır, çünkü gerçekte kullanılan model doğrusal değildir ve sarkacın periyodu doğrusal model periyodundan fazladır. Hatta sarkaç, salınım yaparken enerjisi arttıkça bu süre de artacaktır. Bu nedenle, doğrusal model üzerinden hesaplanan salınım süresi doğrusal olmayan modelin salınım süresinin bir alt sınırı olarak düşünülebilmektedir. Bu alt sınır periyodu süresinde kol en fazla sınır değerleri arasında kalacak şekilde hareket etmelidir. Bu hareketin yapılması için sınırlanan bölge ve sarkacın fiziksel değerlerine bağlı olan salınım periyodu için ivme sınır değerini bize vermektedir.

Kol, sarkaç alt denge noktasından geçerken sabit ivme ile hızlandırılmaktadır. Bu hızlandırma işlemi sarkacın açısal hızının yönü aynı iken yere paralel duruma gelmesi veya açısal hızının yönünün değişmesi, sarkacın enerji değişim yönünün değişimine sebep olmaktadır. Bu aşamada kol ivmesi tersi yönde uygulanırsa enerji değişimi istenilen yönde devam ettirilmektedir.

Sabit ivme hareketi için zamana bağlı kol hareket denklemi (54) denkleminde elde edilmektedir.

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \dot{x}_3(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2. \quad (54)$$

Burada, a kol için uygulanan sabit ivmedir. Sırasıyla kol açısı ve kol açısal hızının başlangıç değerleri $x_3(t_0) = 0$ ve $\dot{x}_3(t_0) = 0$ kabul edilirse ve kol için hareket sınırı $-x_{3lim} < x_3 < x_{3lim}$, $x_{3lim} > 0$ olmak üzere tanımlanırsa (55) denklemi ile verilen denklem elde edilmektedir.

$$\frac{1}{2} a(t - t_0)^2 = 2x_{3lim}. \quad (55)$$

(55) denklemi sağlandığında kol sınırlar arasında kalacaktır. Denklem (55) ile geçen süre yani $(t - t_0) = \frac{T_p}{4}$ olduğunda, sarkaç salınım ivmesi için (56) denklemi yazılabilmektedir.

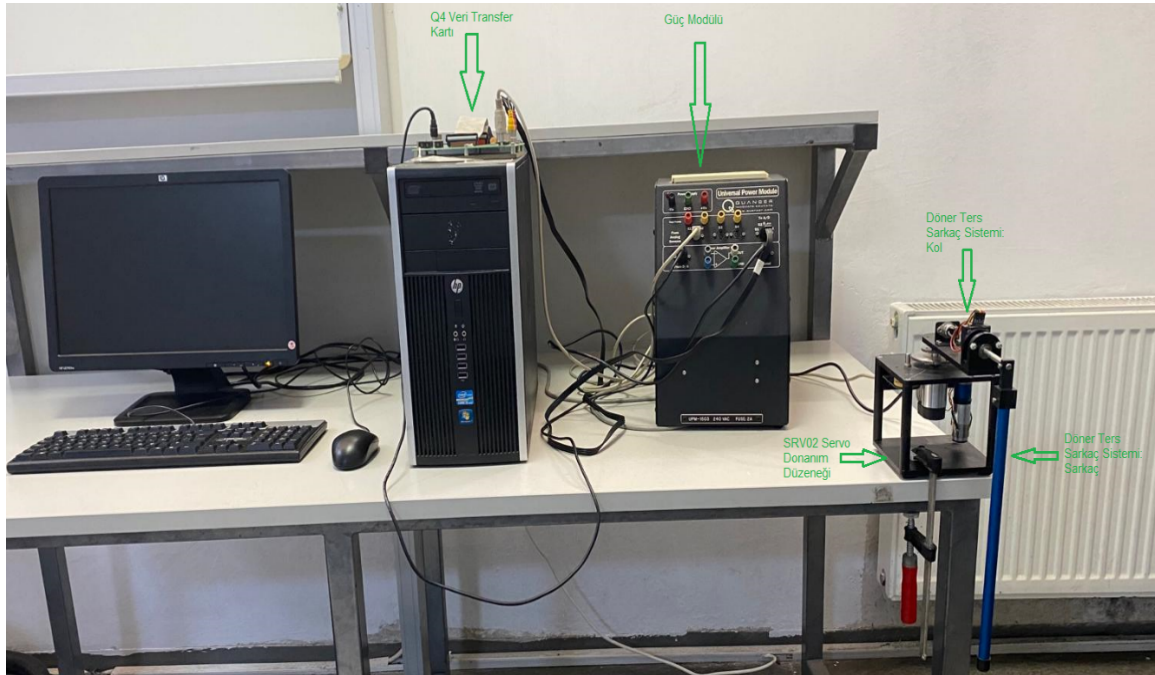
$$a = \frac{64}{T_p^2} x_{3lim}. \quad (56)$$

(56) denklemi sağlanırsa, sarkaç doğrusal bölgede olsa dahi hareket yönü değişmeden kolun konumu x_{3lim} değerine ulaşamayacaktır. Bu koşul, kol için sınır değerinin geçilmeyeceğini garanti etmektedir. Böylece kol sınır değerini aşmadan sarkaç enerjisinin yükseltme işlemi yapılmaktadır.

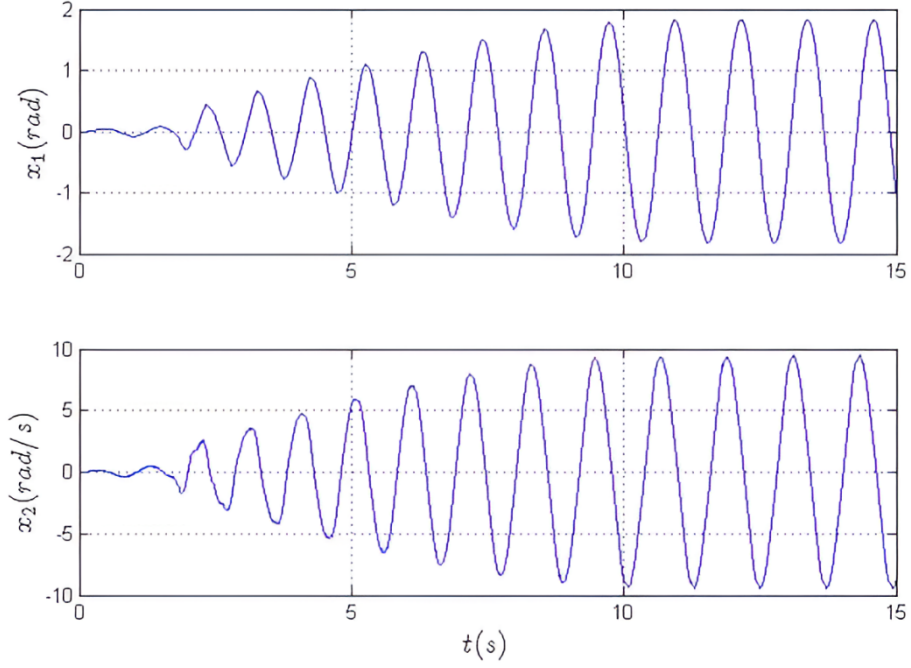
Bu koşullar neticesinde, sarkaç alt yarı düzlemdeyken ($\cos(x_1) > 0$) ve sarkaç kararlı denge noktasını geçtiğinde yani $\sin(x_1)$ işaret değiştirdiğinde kol sabit ivmelendirilip, $\cos(x_1)$ veya \dot{x}_1 işaret değiştirdiğinde kol ters yönde ivmelendirilirse, kolun harekete başladığı andaki sarkaç enerjisi, kolun durduğu andaki enerjisinden az olacaktır.

4. Deneysel Sonuçları

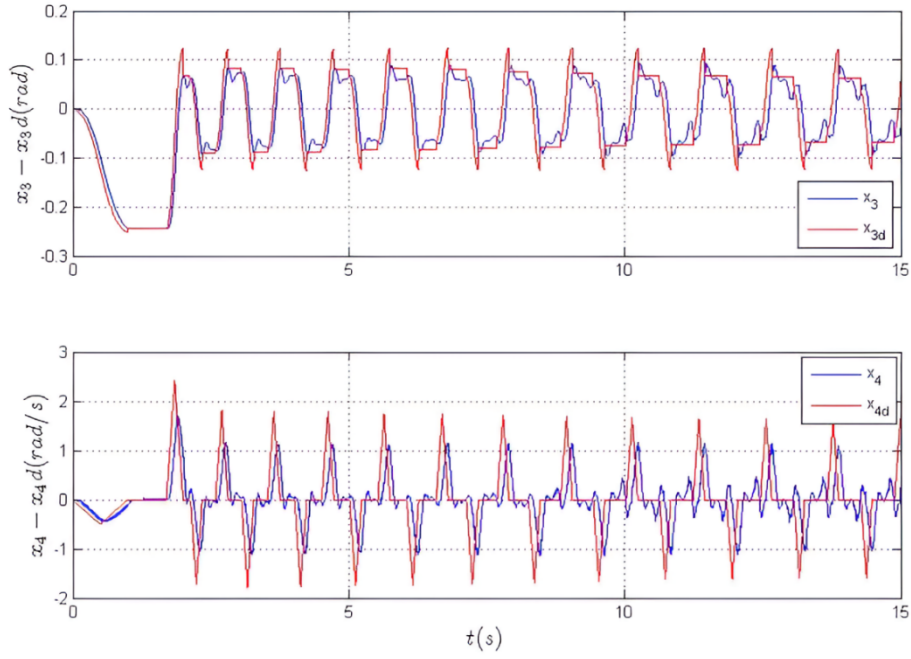
Bu bölümde döner ters sarkaç için doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol ile önerilen enerji tabanlı havaya yükseltme işleminin başarısının test edilmesi için çeşitli deneysel çalışmalar Quanser ROTPEN (SRV02 Servo Base Unit with ROTPEN) üzerinde gerçekleştirilmiştir. Quanser ROTPEN laboratuvar düzeneyi, dişli bir yapı ile DC Servo motordan oluşan döner servo ana ünitesi, Q4 DAQ veri transfer kartı, güç modülünden oluşmaktadır. Döner servo ana ünitesi, sert alüminyum iskelet üzerine tutturulmuş yüksek kalitede DC Servo motor ve harici dişlileri 14:1 oranında bir dişli kutusu yardımıyla sürmektedir. Ünite, bir optik enkoder ile çıkış mili pozisyonunu ve çıkış açısını ölçmede bir potansiyometre ve motorun hızını ölçmek için bir takometre ile donatılmıştır. Motor şaftı 1024 sayımlı bir dörtleyici enkoder ile çıkış miline bağlı dişli de bir potansiyometre ile birleştirilmiştir. Motor maksimum sürekli akımı ve maksimum hızı sırasıyla 1 A ve 6000 rpm şeklindedir. Q4 DAQ veri transfer kartı, 14 bit analog girişi, 12 bit D/A gerilim çıkışı, dört adet enkoder girişi, programlanabilir dijital giriş ve çıkışları olan bir donanım kartıdır. Güç Modülü regüleli çift ± 12 VDC çıkışlı güç kaynağı ve lineer güç operasyonel kuvvetlendiricisinden oluşmaktadır. Güç kaynağının ± 12 VDC için 1 A çıkışı vardır. Maksimum güç çıkışı 45 W, maksimum akım çıkışı 3 A, maksimum gerilim çıkışı 15 V'tur. Şekil 3 bu çalışmada önerilen algoritmanın deneysel testleri için kullanılan döner ters sarkaç sistemini ve diğer bahsedilen donanımları göstermektedir. Tüm deney çalışmalarında denklem (44)'teki kazanç $k = 1$ olarak atanmıştır.



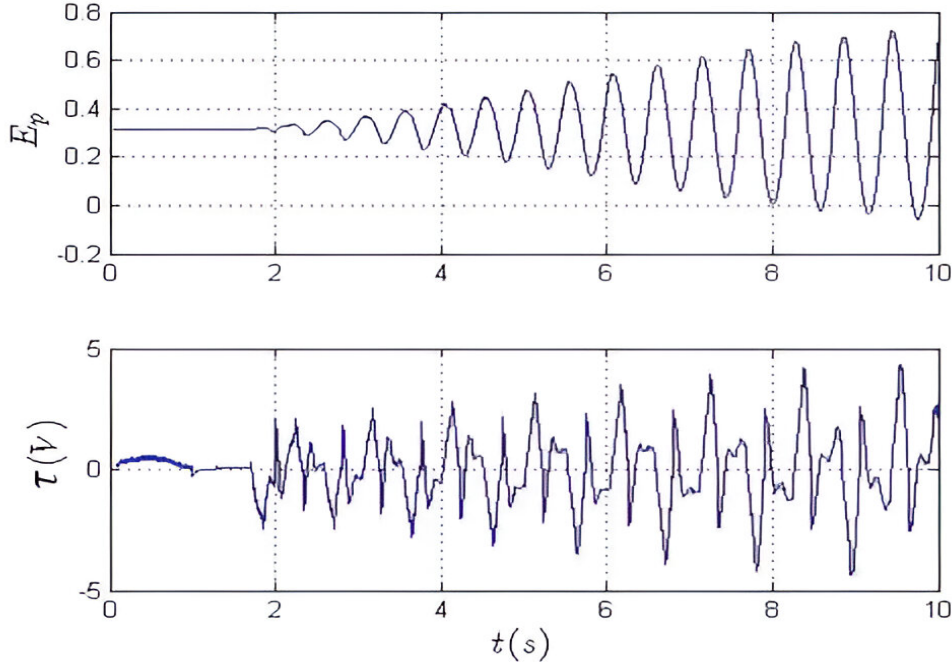
Şekil 3. Deneysel testlerde kullanılan döner ters sarkaç sistemi ve diğer donanımlar.



Şekil 4. Sarkaç açısının ve hızının değişimi. ($a = \pm 16 \text{ rad/s}^2$).



Şekil 5. Kol açısının gerçek ve istenilen değerinin değişimi ve kol hızının gerçek ve istenilen değerinin değişimi. ($a = \pm 16 \text{ rad/s}^2$).

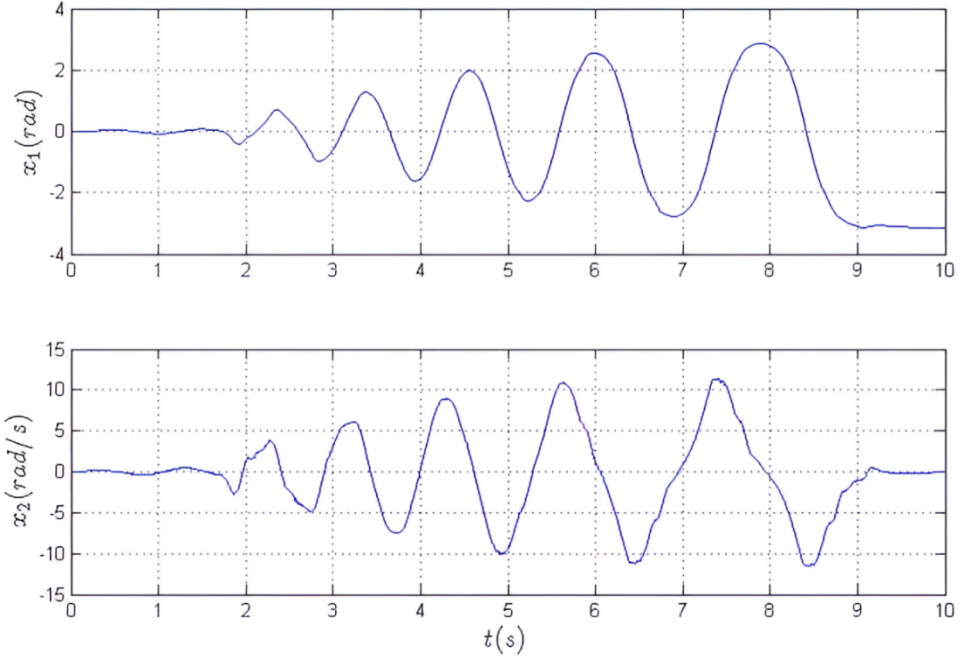


Şekil 6. Sarkaca ait enerji seviyesinin her salınımdaki değişimi ve kontrol sinyali ($a = \pm 16 \text{ rad/s}^2$).

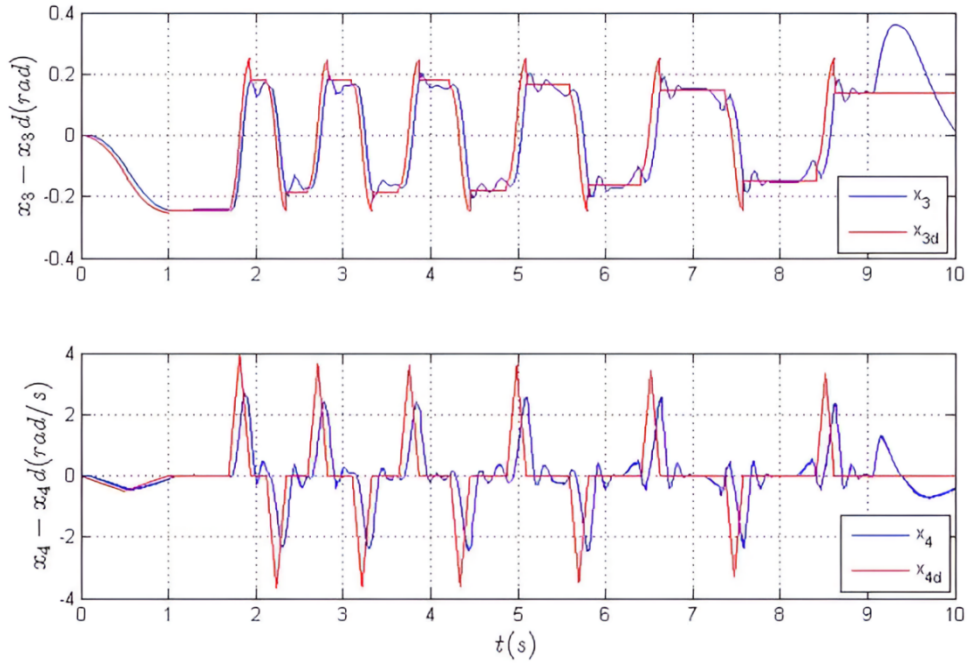
Deney sonuçları bölümünde denklem (56)'ya göre sabit ivme değerleri sırasıyla $a = \pm 16 \text{ rad/s}^2$, $a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$ ve $a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$ değerleri için deneyler gerçekleştirilmiştir. Bu deneylerde kararlı denge noktası sıfır, kararsız denge noktası ise π açısal değeridir. Ayrıca, motor kol kontrolü denklem (39)'daki gibi bir kontrol yapısı ve üzerine basit bir PD kontrolcü ile sağlanmaktadır. Burada oransal kazanç 2500 ve türev kazancı 30 olarak atanmıştır. Ayrıca döner sarkaç sistemi kol limit değeri ± 30 derece ($\pm 0,523 \text{ rad}$) olarak ayarlanmıştır.

Döner ters sarkacı Şekil 4'te sabit ivme $a = \pm 16 \text{ rad/s}^2$ değeri için sarkaç kararlı denge noktası sıfır açısal değerinden başlatılmıştır. Sarkaç salınımı ile sarkacın kararsız denge noktası π (3,14) açısal değerinden geçmesi beklenmektedir. Şekil 5'te de sarkaç kol açısının gerçek ve istenilen değerinin değişimi ve kol hızının gerçek ve istenilen değeri gösterilmektedir. Bu sonuçlardan istenilen sabit hızın elde edilmediği görülmektedir. Aynı zamanda sarkacın ivme değerinin küçük kalması ile sarkacın enerjisinin yeteri kadar artmadığı Şekil 6'da görülmektedir. Daha fazla enerji yüklemesinin olamaması nedeniyle döner ters sarkacın belli bir sinüzoidal sinyale oturduğu Şekil 4'te görülmektedir. Sarkaç kararsız denge noktasına enerjinin artırılması ile çıkarıldığı anda, tam durum geri besleme (full state feedback) kontrol yöntemi devreye girmektedir. Tam durum geri besleme kontrolcü kazancı MATLAB/LQR kodu ile hesaplanan tam durum geri beslemeli kontrol sarkaç yükseltmesi yapılamadığı için devreye girmemiştir.

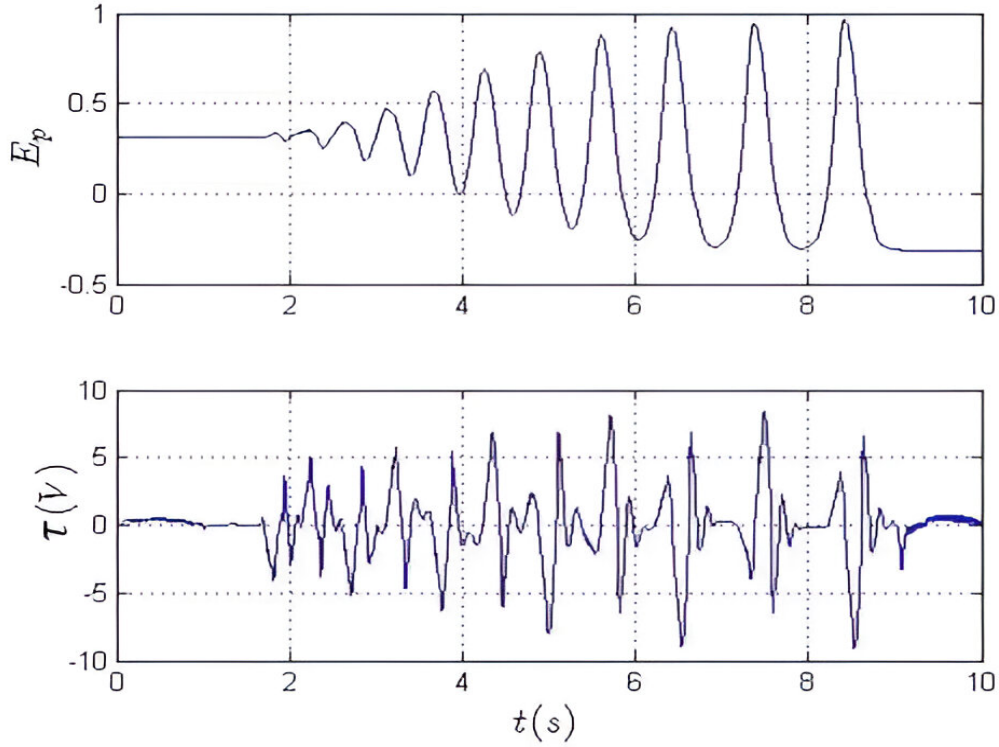
Döner ters sarkacı Şekil 7'de sabit ivme $a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$ değeri için sarkaç kararlı denge noktası sıfır açısal değerinden başlatılmaktadır. Ters sarkacın salınımı ile sarkacın kararsız denge noktası π (3,14) açısal değerine ulaşması hedeflenmektedir. Bu salınım boyunca enerji Şekil 9'da görüldüğü üzere düzenli olarak artmıştır. Sarkaç, kararsız denge noktasına kabul edilen pozitif yönde değil, negatif yönden gelmesi nedeniyle $-\pi$ (-3,14) açısal değerinde dengede tutulmuştur. Yaklaşık 9 saniyeden sonra sarkaç kararsız denge noktasından geçecek enerjiye sahip olmaktadır. Kararsız denge noktasında tam durum geri besleme kontrol yapısının devreye girmesiyle Şekil 8'de görüldüğü üzere x_3 kol konumu ve x_4 kol hızı, istenilen x_{3d} kol konumunu ve istenilen x_{4d} kol hızını takip etmeyi bırakmıştır. Sarkacın kararsız denge noktasında artık tam durum geri besleme kontrolcüsü tarafından kontrol edilmekte olması bunun sebebidir. Sarkacın kararsız denge noktasından geçilmesi algoritmanın başarılı olduğu anlamına gelmektedir. Bunun yanında kontrol girişi maksimum 8V değerine kadar çıkmaktadır. Hesaplanan kontrol sinyali doğrudan sistem uygulanabilmektedir, kontrolcü doygunluk durumu yoktur.



Şekil 7. Sarkaç açısının ve hızının değişimi. ($a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$).



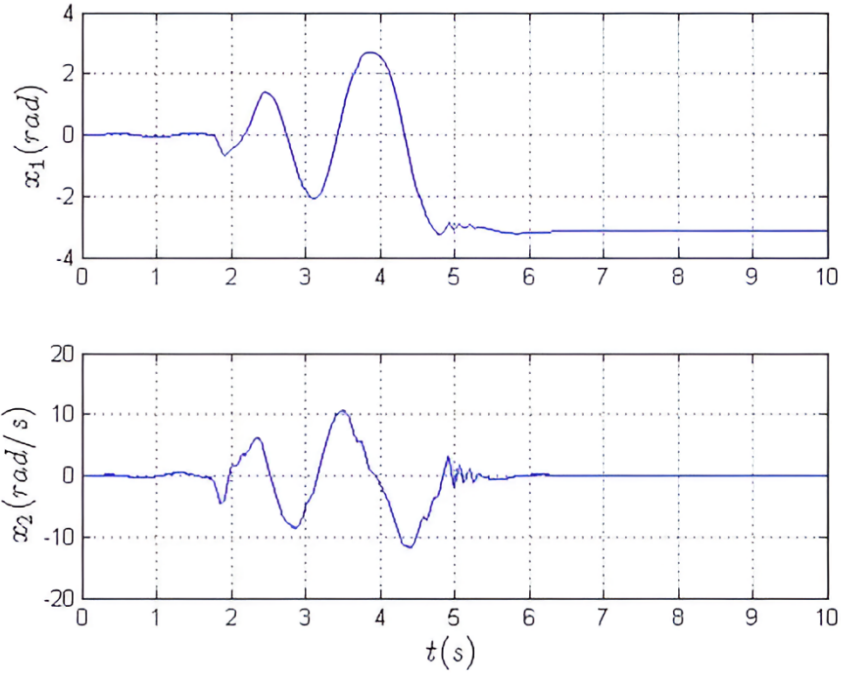
Şekil 8. Kol açısının gerçek ve istenilen değerinin değişimi ve kol hızının gerçek ve istenilen değerinin değişimi. ($a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$).



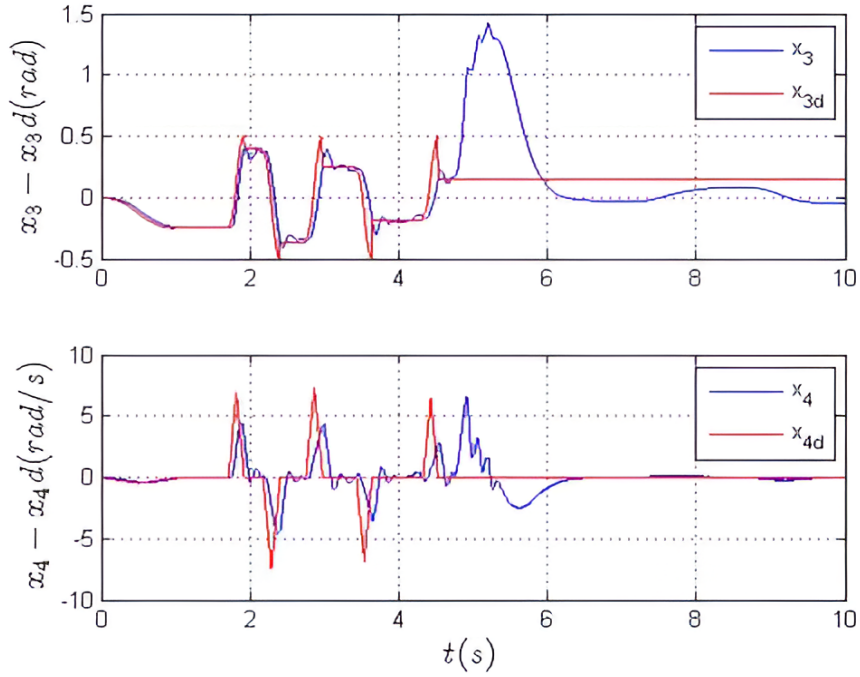
Şekil 9. Sarkaca ait enerji seviyesinin her salınımdaki değişimi ve kontrol sinyali ($a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$).

Son deneysel çalışmada, döner ters sarkaç Şekil 10'da gösterildiği üzere sabit ivme $a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$ değeri için sarkaç kararlı denge noktası sıfır açısal değerinden başlatılmaktadır. Sarkaç salınımı ile sarkacın kararsız denge noktası π (3,14) açısal değerinden geçmesi önerilen algoritmanın başarısını daha yüksek bir ivme değeri için gösterecektir. Sarkaç salınım boyunca enerji Şekil 12'de görüldüğü üzere düzenli olarak artmaktadır. Bir önceki deney çalışmasında olduğu gibi sarkaç, kararsız denge noktasına negatif yönden gelmesi sebebiyle $-\pi$ (-3,14) açısal değerinde dengede kalmaktadır. Tam durum geri beslemeli kontrol yapısının devreye girmesine kadar olan sürede tüm durumlar için referans yörüngeler başarı ile takip edilmektedir. Kararsız denge noktasında tam durum geri besleme kontrol yönteminin devreye alınmasıyla Şekil 11'de görüldüğü üzere x_3 kol konumu ve x_4 kol hızı, istenilen x_{3d} kol konumunu ve istenilen x_{4d} kol hızını takip etmemektedir. Böylece, sabit ivme $a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$ değeri için önerilen yukarı yükseltme problemi çözülmektedir. Ayrıca, yüksek kol ivmesi nedeniyle kontrol sinyalinde sisteme yüklenmeyecek seviyelerde kontrol sinyalleri üretilmektedir (Şekil 12'de 4-6 saniyeler arası bakınız.) Sisteme 15V maksimum kontrol sinyali uygulanabildiğinden burada sisteme uygulanan kontrol sinyali doygunluğa uğramaktadır. Kontrol tarafından üretilen işaret çizdirildiği için bunu Şekil 12'de görememekteyiz. Ancak, bu aralıkta enerjinin anlık hızlı değişmemesinden kontrol işaretinin doygunluğa uğradığını anlamaktayız.

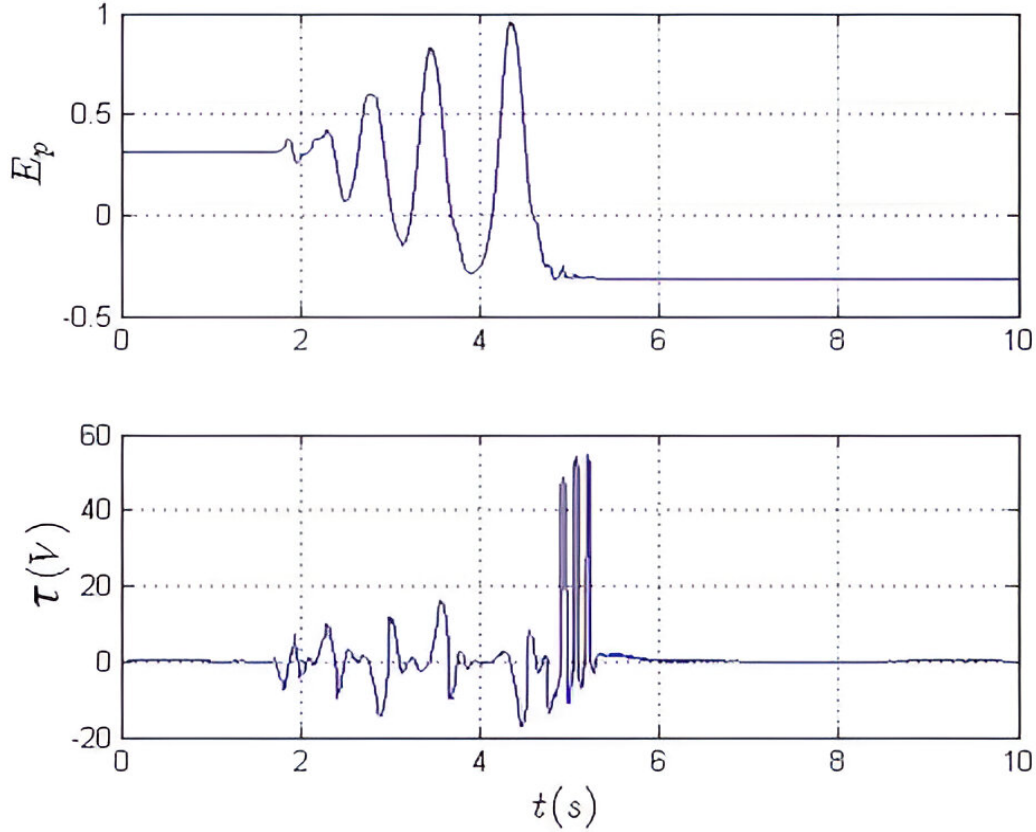
Önerilen kontrol yapısında kol açısı üzerine bir kısıt konulmuştur ve bu kısıt üzerinden tasarımlar gerçekleştirilmiştir. Şekil 5'ten, Şekil 8'den ve Şekil 11'den görüleceği üzere sistem kolu limit değerini aşmamaktadır. Ayrıca, sarkaç ivmelenmesi $a = \pm 32 \text{ rad/s}^2$ değerinden $a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$ değerine çıkartılması, döner ters sarkacın kararlı denge noktasından kararsız denge noktasına çıkma süresini doğrudan etkilemektedir ve hedef ulaşma zamanının yaklaşık olarak 9 s'den 5 s'ye düştüğü gözlenmektedir. Bu sonuçlar neticesinde önerilen yukarı yükseltme algoritması deneysel olarak test edilmiştir ve teorik analizler ışığında başarılı sonuçlar vermektedir.



Şekil 10. Sarkaç açısının ve hızının değişimi. ($a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$).



Şekil 11. Kol açısının gerçek ve istenilen değerinin değişimi ve kol hızının gerçek ve istenilen değerinin değişimi. ($a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$).



Şekil 12. Sarkaca ait enerji seviyesinin her salınımdaki değişimi ve kontrol sinyali ($a = \pm 64 \text{ rad/s}^2$).

Tablo 2. Deneysel sonuçların karşılaştırılması.

	İvme Değeri	Hedef Başarısı ve Süresi	Maksimum Ulaşılan Kol Limit Değeri	Kontrol Sinyalinin Doğunluk Süresi
Deney #1	$\pm 16 \text{ rad/s}^2$	---	0,24 rad	---
Deney #2	$\pm 32 \text{ rad/s}^2$	Var, 9 s	0,2 rad	---
Deney #3	$\pm 64 \text{ rad/s}^2$	Var, 5 s	0,5 rad	0,3 s

Deneysel sonuçların bir özeti olarak Tablo 2’de deneylerde test edilen ivme değerleri, sarkacın yükselmesinin başarısı ve başarı süresi, maksimum ulaşılan kol limiti ve varsa kontrol sinyalinin doğunluk süresi tablo olarak verilmektedir. Tablo 2’deki değerler yaklaşık olarak belirlenmiştir. Burada tekrar belirtmek gereklidir ki ilk deney sarkacın yükselmesi için yetersiz kalmıştır. İkinci deney başarı ile sarkacın yükselmesini sağlamış ve kontrol sinyalinin doğunluğu görülmemiştir. Son deneyde ise başarılı sonuçların yanında sarkaç yükselme süresi azalmış ancak kontrol sinyali kısa bir süre için doğunluğa uğramıştır. Ayrıca belirtmek gereklidir ki kolun gidebildiği maksimum değer tasarımlarda atanan değerden (0,523 rad) aşağıda kalmıştır ve bu sonuç teorik tasarımları ve analizleri desteklemektedir.

5. Sonuç

Eksik tahrikli döner ters sarkaç sisteminin enerji tabanlı yükseltmesi konulu bu çalışmada, sarkacı kararlı denge noktasından kararsız denge noktasına çıkaran bir algoritma sunulmaktadır. Algoritmanın testi, gerçek zamanlı sistem üzerinde deneysel uygulamalar ile gerçekleştirilmiştir. Kontrol algoritması gerçek sistem üzerinde uygulanmıştır ve deney çalışmaları önerilen algoritmanın sistem hedeflerine uygunluğu gösteren sonuçlar ile desteklenmiştir. İkinci deneysel çalışmada düşünülen kol ivmesi, üçüncü deneysel çalışmada iki katına çıkarılmıştır ve sarkaç yükselme zamanında %55 oranında bir düşüş gözlemlenmiştir. Ayrıca, kol açısı 0,2 rad değerinden 0,5 rad değerine kadar çıkmıştır. Ancak önceden belirlenen kol kısıt değerini yani 0,523 rad değerini aşmayacak şekilde kol ivmelenmiştir ve algoritma hedefine ulaşmıştır. Başarılı bir şekilde sarkacın yukarı yükselmesi sonrasında tam durum geri beslemeli kontrol yapısı sayesinde sarkaç kararsız denge noktasında her iki deneysel çalışmada da kararlı kılınmıştır. Bu çalışmanın üstün yönü, istenilen tasarım kısıtlarına göre ters sarkacın yukarı yükseltme probleminin, sistemin doğrusal olmayan dinamiği göz önünde bulundurularak çözülmesidir. Bu çalışmada ayrıca mekanik sistemlerin nasıl modelleneceği, analizi ve tasarımı ile alakalı teorik bilgiler de mevcuttur. Dahası bu çalışma, kararsız denge noktasında döner ters sarkaç sisteminin denge kontrolü için farklı kontrol yapılarının test edilmesine araştırmacıları teşvik etmektedir.

Kaynaklar

- [1] Shah I, Rehman FU. Smooth second order sliding mode control of a class of underactuated mechanical systems. IEEE Access, 2018; 6: 7759-7771.
- [2] Krafes S, Chalh Z, Saka A. A review on the control of second order underactuated mechanical systems. Complexity 2018, 1-17.
- [3] Adıgüzel F, Yalçın Y. Discrete-time backstepping control with nonlinear adaptive disturbance attenuation for the inverted-pendulum system. Trans Inst Meas Control 2021; 43(5): 1068-1076.
- [4] Adıgüzel F, Yalçın Y. Backstepping control for a class of underactuated nonlinear mechanical systems with a novel coordinate transformation in the discrete-time setting. Proc Inst Mech Eng, Part I: J Syst Control Eng 2022; 236(6): 1211-1223.
- [5] Zhong W, Rock H. Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart. In: Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01); 07 September 2001; Mexico City, Mexico. New York, NY, USA: IEEE. pp. 896-901.
- [6] Krishen J, Becerra VM. Efficient Fuzzy Control of a Rotary Inverted Pendulum Based on LQR Mapping, In: IEEE International Symposium on Intelligent Control; 04-06 October 2006; Munich, Germany. New York, NY, USA: IEEE. pp. 2701-2706.
- [7] Craig K, Awatar S. Inverted Pendulum Systems: Rotary And Arm-Driven A Mechatronic System Design Case Study, Mechatronics 2001; 12: 357-370.
- [8] Acosta JA. Furuta's Pendulum: A conservative nonlinear model for theory and practise. Math Probl Eng 2010; 742894.
- [9] Jain A, Sharma A, Jatelly V, Azzopardi B, Choudhury S. Real-time swing-up control of non-linear inverted pendulum using Lyapunov based optimized fuzzy logic control. IEEE Access 2021; 9: 50715-50726.
- [10] Antonio-Cruz M, Hernandez-Guzman VM, Merlo-Zapata CA, Marquez-Sanchez C. Nonlinear control with friction compensation to swing-up a Furuta pendulum. ISA Trans 2023; 139: 713-723.
- [11] Docekal T, Ozana S, Pal Singh A, Kawala-Sterniuk A. Closed-loop swing-up and stabilization of inverted pendulum by finite-horizon LQR applied in 2-DOF concept. Control and Cybern 2020; 49: 109-122.
- [12] Yang X, Zheng X. Swing-up and stabilization control design for an underactuated rotary inverted pendulum system: Theory and experiments. IEEE Trans Ind Electron 2018; 65(9): 7229-7238.
- [13] Dwivedi P, Pandey S, Junghare AS. Stabilization of unstable equilibrium point of rotary inverted pendulum using fractional controller. J Franklin Inst 2017; 354(17): 7732-7766.
- [14] Türker T, Görgün H, Cansever G. Lyapunov's direct method for stabilization of the Furuta pendulum. Turk J Electr Eng. Comput Sci 2012; 20(1): 99-110.
- [15] Solis MA, Olivares M, Allende H. A switched control strategy for swing-up and state regulation for the rotary inverted pendulum. Stud Inform Control 2019; 28(1): 45-54.
- [16] Melba MP, Marimuthu NS. Minimum time swing up and stabilization of rotary inverted pendulum using pulse step control. Iran J Fuzzy Syst 2009; 6(3): 1-15.
- [17] Abdullah M, Amin AA, Iqbal S, Mahmood-ul-Hasan K. Swing up and stabilization control of rotary inverted pendulum based on energy balance, fuzzy logic, and LQR controllers. Meas Control 2021; 54(9-10): 1356-1370.
- [18] Gupta N, Dewan L. Trajectory tracking and balancing control of rotary inverted pendulum system using quasi-sliding mode control. Mechatron Syst Control 2022; 50(1): 201-231.
- [19] de Carvalho Junior A, Angelico BA, Justo JF, de Oliveira AM, da Silva Filho JI. Model reference control by recurrent neural network built with paraconsistent neurons for trajectory tracking of a rotary inverted pendulum. Appl Soft Comput 2023; 133: 109927.
- [20] Zeghlache S, Ghellab MZ, Djerioui A, Bouderah B, Benkhoris MF. Adaptive fuzzy fast terminal sliding mode control for inverted pendulum-cart system with actuator faults. Math Comput Simul 2023; 210: 207-234.

- [21] Åström KJ, Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* 2000; 36(2): 287-295.
- [22] Freidovich L, Shiriaev A, Gordillo F, Gómez-Estern F, Aracil J. Partial-energy-shaping control for orbital stabilization of high frequency oscillations of the Furuta pendulum. In: 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control; 12-14 December 2007; New Orleans, LA, USA. New York, NY, USA: IEEE. pp. 4637-4642.
- [23] Gordillo F, Acosta JA, Aracil J. A new swing-up law for the Furuta pendulum, *Int J Control* 2003; 76: 836-844.
- [24] Tanaka S, Xin X, Yamasaki T. New results of energy-based swing-up control for rotational pendulum. *IFAC Proceedings Volumes* 2011; 44(1): 10673-10678.
- [25] Zhang Z, Suh CS. Underactuated Mechanical Systems- A Review of Control Design. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics* 2022; 6(01): 21-51.
- [26] Hazem ZB, Bingül Z. Comprehensive review of different pendulum structures in engineering applications. *IEEE Access* 2023; 11: 42862-42880.
- [27] Hamza MF, Yap HJ, Choudhury IA, Isa AI, Zimit AY, Kumbasar T. Current development on using Rotary Inverted Pendulum as a benchmark for testing linear and nonlinear control algorithms. *Mech Syst Signal Process* 2019; 116: 347-369.
- [28] Nguyen NP, Oh H, Kim Y, Moon J. A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum. *Nonlinear Dyn* 2021; 104: 1117-1137.
- [29] Nguyen NP, Oh H, Kim Y, Moon J, Yang J, Chen WH. Fuzzy-based super-twisting sliding mode stabilization control for under-actuated rotary inverted pendulum systems. *IEEE Access* 2020; 8: 185079-185092.
- [30] Huang J, Zhang T, Fan Y, Sun JQ. Control of rotary inverted pendulum using model-free backstepping technique. *IEEE Access* 2019; 7: 96965-96973.
- [31] Mofid O, Alattas KA, Mobayen S, Vu MT, Bouteraa Y. Adaptive finite-time command-filtered backstepping sliding mode control for stabilization of a disturbed rotary-inverted-pendulum with experimental validation. *J Vib Control* 2023; 29(5-6): 1431-1446.
- [32] Fantoni I, Lozano R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. 1st ed. London, UK: Springer Science & Business Media, 2002.
- [33] Moreno-Valenzuela J, Aguilar-Avelar C. *Motion control of underactuated mechanical systems*. 1st ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.