GENELLEŞTİRİLMİŞ FRACTİONAL İNTEGRALLER İÇİN FENG Qİ TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Abdullah AKKURT[1], Hüseyin YILDIRIM[1]

[1]Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, K.Maraş, Türkiye
e-posta: abdullahmat@gmail.com

ÖZET

Bu çalışmada, klasik Riemann-Liouville Fractional integrallerin bir genelleştirmesi tanımlandıktan sonra bu Fractional integral için Feng Qi tipli integral eşitsizlikleri elde edildi.

Anahtar kelimeler: Qi eşitsizlikleri, İntegral eşitsizlikleri, Fractional integral, Riemann-Liouville Fractional integraller.

ON FENG Qİ TYPE İNTEGRAL INEQUALİTİES FOR GENERALİZED FRACTİONAL İNTEGRALS

ABSTRACT

In this study, after defining a generalization of the classical Riemann-Liouville Fractional integrals, its Feng Qi type integral inequalities are obtained.

Keywords: Qi inequalities, İntegral inequalities, Fractional integral, Riemann-Liouville Fractional integrals.

1. Giriş

Tamsayı mertebeli Türevler ve İntegraller açık bir fiziksel ve geometrik yoruma sahiptir. Bu da Türev ve İntegralin çeşitli bilim dallarında birçok uygulamalı problemlerin çözümlerinin yapılmasında önemli derece kolaylıklar sağlar. Fakat gerçek dünya problemleri için hem teorik hem de uygulama alanlarında hızlı bir büyümeyi (değişimi) temsil eden Kesir Dereceli integral ve türevlerde durum böyle değildir. Çünkü keyfi mertebeli (Tamsayı mertebeli olmak zorunda değil) türev ve integral fikri, yaklaşık 300 yıldan fazla fiziksel ve geometrik yorumlamalar açısından oldukça zayıftır. Bunun yanı sıra çeşitli yazarlar kesirli türevin ve kesirli integralin tam olarak bir fiziksel ve geometrik yorumunu yapamamakla birlikte çeşitli yaklaşımlar ve özel fonksiyonlar için uygulamalar vermişlerdir. Yapılan uygulamalar kesirli türev ve kesirli integral modellemesine uygun fonksiyonlar ve yapılardır. Son yıllarda kesirli türevler, kesirli integraller ve kesirli diferansiyel denklemler için çeşitli problemler ortaya atılmış ve bunların çözümleri çalışılmıştır. Klasik integral ve Kesirli integrallerle ilgili olarak, S.G. Samko(1993), G.A. Anastassiou(2009), Z. Dahmani(2010,2011), S. Belarbi(2011), F. Qi(2000,2003), Q.A. Ngô(2006) ve L. Bougoffa(2007) gibi yazarlar çalışmalar yapmışlardır. Bu yazarlardan Feng Qi klasik integraller için bazı integral eşitsizliklerini ifade ve ispat etmesinin yanı sıra, integral eşitsizlikleri için birçok açık problem yazmıştır. Daha sonra bu problemler çözülerek Qi eşitsizlikleri olarak adlandırılmıştır(Boukerrıoua K. 2007, Liu W.J 2007). (Liu, Cheng ve Li, 2008) ve (Ngô, Thang, Dat ve Tuan, 2006) çalışmalarında aşağıdaki ilginç integral eşitsizlikleri verilmiş ve ispatlanmıştır.

2. Materyal ve Metot

Çalışmamızda kullanacağımız bazı Tanım, Teorem ve Lemmaları verelim.

Teorem 1.1. $f(x) \geq 0,\ [0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \int_x^1 t dt, \forall x \in [0,1] \tag{1}$$

şartı altında

$$\int_0^1 f^{\alpha+1}(t)dt \geq \int_0^1 t^{\alpha} f(t)dt, \tag{2}$$

ve

$$\int_0^1 f^{\alpha+1}(t)dt \geq \int_0^1 tf^{\alpha}(t)dt, \tag{3}$$

eşitsizlikleri vardır. Burada $\alpha > 0$ ve $\alpha \in$ (Ngô, Thang, Dat ve Tuan, 2006).

Teorem 1.2. $f(x) \geq 0,\ [a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_x^b f^{min\{1,\beta\}}(t)dt \geq \int_x^b (t-a)^{min\{1,\beta\}} dt, \forall x \in [a,b] \tag{4}$$

şartı altında, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ her reel sayısı için,

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(t)dt \geq \int_a^b (t-a)^{\alpha} f^{\beta}(t)dt, \tag{5}$$

dir (Liu, Cheng ve Li, 2008).

Tanım1.3 : $f \in L_1(a,b)$ olmak üzere

$$\left(J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{a}}^{x}(x-\tau)^{\alpha\text{-}1} f\left(\tau\right)d\tau\ ,\ \ x>a,\ \alpha>0, \tag{6}$$

ve

$$\left(J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(\tau-x)^{\alpha\text{-}1} f\left(\tau\right)d\tau\ ,\ x<b,\alpha>0, \tag{7}$$

şeklindeki integrallere Riemann-Liouville Fractional integraller denir(Samko S.G., Kilbas A.A. ve Marichev O.I., 1993). Katugampola, $f \in L_1(a,b)$ olmak üzere (6) ve (7) ifadelerini

$$\left(J_{\rho}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x^{\rho+1}\text{ - }\tau^{\rho+1})^{\alpha\text{-}1}\tau^{\rho} f\left(\tau\right)d\tau, x>a,\ \alpha>0,\ \rho>-1, \tag{8}$$

ve

$$\left(J_{\rho}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(\tau^{\rho+1}\text{ - }x^{\rho+1})^{\alpha\text{-}1}\tau^{\rho} f\left(\tau\right)d\tau, x<b,\ \alpha>0,\ \rho>-1, \tag{9}$$

şeklinde yeniden tanımlayarak bu ifadelere α. mertebeden sırasıyla sağ ve sol taraflı genelleştirilmiş Riemann-Liouville Fractional integraller demiştir(Katugampola U.N., 2011). Burada x pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x\text{-}1}e^{\text{-}t}dt \tag{10}$$

ifadesi Gamma Fonksiyonudur.

(8) ifadesindeki sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral için,

$$J_{\rho}^{\alpha} J_{\rho}^{\beta} f(x) = J_{\rho}^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0 \tag{11}$$

yarı grup özelliği ve

$$J_{\rho}^{\alpha} J_{\rho}^{\beta} f(x) = J_{\rho}^{\beta} J_{\rho}^{\alpha} f(x) \tag{12}$$

şeklindeki değişme özelliği vardır (Katugampola U.N., 2011). Klasik Riemann-Liouville Fractional Türevlerin bir genelleştirmesini, Katugampola aşağıdaki eşitliklerle vermiştir (Katugampola U.N., 2011).

$$\left({}^{\rho} D_{a^+}^{\alpha} f \right)(x) = \frac{(\rho+1)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{n-\alpha-1} t^{\rho} f(t) dt, n = [\alpha] + 1 \tag{13}$$

ve

$$\left({}^{\rho} D_{b^-}^{\alpha} f \right)(x) = (-1)^n \frac{(\rho+1)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t^{\rho+1} - x^{\rho+1})^{n-\alpha-1} t^{\rho} f(t) dt, n = [\alpha] + 1 . \tag{14}$$

Lemma 1.4. [Genelleştirilmiş Cauchy Eşitsizliği].$\alpha + \beta = 1$ şartı altında, α ve β pozitif reel sayıları ve tüm pozitif x ve y reel sayıları için,

$$\alpha x + \beta y \geq x^{\alpha} y^{\beta}$$

şeklindedir.

3. Ana Sonuçlar ve İspatlar

Burada Feng Qi nin bazı eşitsizliklerini daha genel olarak aşağıdaki iki teoremle birleştirip, elde edilen eşitsizliklerde $a, b, \alpha, ve\ \beta$ ya özel değerler vererek Feng Qi nin bazı eşitsizliklerini elde edeceğiz.

Teorem 1.5. $f(x) \geq 0,$ $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$\int_a^b f^{min\{1,\beta\}}(x) x^{\rho} dx \geq \int_a^b (x^{\rho+1} - a^{\rho+1})^{min\{1,\beta\}} x^{\rho} dx, \forall x \in [a,b] \tag{15}$$

şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her pozitif $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ reel sayıları için,

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x) x^{\rho} dx \geq \int_a^b (x^{\rho+1} - a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x) x^{\rho} dx, \tag{16}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teoremin ispatı için Lemma 1.4. göz önüne alındığında,

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} f^{\alpha+\beta}(x) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} (x^{\rho+1} - a^{\rho+1})^{\alpha+\beta} \geq (x^{\rho+1} - a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki yanının a dan b ye kadar integrali alınırsa,

$$\beta\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x)x^\rho dx+\alpha\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta}x^\rho dx\geq(\alpha+\beta)\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx \qquad (17)$$

veya

$$\beta\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x)x^\rho dx+\alpha\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}\geq(\alpha+\beta)\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx$$

eşitsizlikleri yazılır. Ayrıca bu eşitsizliklerin sağ tarafındaki ifade için,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx &=\alpha\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx+\beta\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx\\ &\geq\alpha\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}+\beta\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx\end{aligned}$$

yazılacağından (17) eşitsizliği,

$$\beta\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x)x^\rho dx+\alpha\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}\geq\alpha\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}+\beta\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx$$

olarak yazılacaktır. Buradan da

$$\int_a^b f^{\alpha+\beta}(x)x^\rho dx\geq\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx, \qquad (18)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

Teorem 1.6. $f(x)\geq 0,$ $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx\geq\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)},\alpha>0,\beta>0 \qquad (19)$$

dir.

İspat. Teoremin ispatını iki aşamada yapalım. İlk olarak $0<\beta\leq 1$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha-1}\left(\int_x^b f^\beta(t)t^\rho dt\right)x^\rho dx &=\frac{1}{\alpha(\rho+1)}\int_a^b\left(\int_x^b f^\beta(t)t^\rho dt\right)d(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}\\ &=\frac{1}{\alpha(\rho+1)}\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}f^\beta(x)x^\rho dx \qquad (20)\end{aligned}$$

yazılır. (20) eşitliğinin sol tarafında (15) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha-1}\left(\int_x^b f^{\beta}(t)t^{\rho}dt\right)x^{\rho}dx \\
&\quad \geq \int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha-1}\left(\int_x^b (t^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\beta}t^{\rho}dt\right)x^{\rho}dx \\
&\quad = \int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha-1}\left(\frac{\left(b^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\beta+1}-\left(x^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\beta+1}}{(\rho+1)(\beta+1)}\right)x^{\rho}dx \\
&\quad = \frac{1}{(\rho+1)(\beta+1)}\left[\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha-1}\left(b^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\beta+1}x^{\rho}dx-\int_a^b\left(x^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\alpha+\beta}x^{\rho}dx\right] \\
&\quad = \frac{\left(b^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\alpha+\beta+1}}{\alpha(\rho+1)^2(\beta+1)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Elde edilen bu son ifade (20) de yerine yazılırsa,

$$
\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x)x^{\rho}dx \geq \frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)},
$$

yazılır.

İkinci olarak $\beta>1$ olsun. Bu durumda Lemma 1.4. yardımıyla,

$$
\frac{1}{\beta}f^{\beta}(x)+\frac{\beta-1}{\beta}(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\beta} \geq f(x)(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\beta-1} \tag{21}
$$

yazılır. Bu (21) ifadesinin her iki yanı $(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}x^{\rho}$ ile çarpılarak a dan b ye kadar integrali alınırsa,

$$
\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x)x^{\rho}dx+(\beta-1)\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta}x^{\rho}dx \geq \beta\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta-1}f(x)x^{\rho}dx, \tag{22}
$$

olduğu kolayca görülür. (22) ifadesinde $f(x)\geq\left(x^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)$ oluşu kullanılırsa,

$$
\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x)x^{\rho}dx+(\beta-1)\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)} \geq \beta\frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}
$$

yani

$$
\int_a^b (x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha} f^{\beta}(x)x^{\rho}dx \geq \frac{(b^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha+\beta+1}}{(\rho+1)(\alpha+\beta+1)}, \tag{23}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradaki (23) ifadesinde $a, b, \alpha, ve\ \beta$ ya özel değerler verildiğinde, kaynaklarda elde edilen eşitsizliklerin bir çoğuna kolayca ulaşacağımızı gösterelim.

Eğer özel olarak $a=0,\ b=1,\ \rho=0,\ \alpha=1\ ve\ \beta=1$ seçilirse

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$$

eşitsizliği, $a=0,\ b=1,\ \rho=1,\ \alpha=1\ ve\ \beta=1$ seçilirse

$$\int_0^1 x^3 f(x)dx \geq \frac{1}{6}$$

eşitsizliği, $a=0,\ b=1,\ \rho=0,\ \alpha=n+1$ ve $\beta=1$ seçilirse

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx \geq \frac{1}{n+3}$$

eşitsizliği, $a=0,\ b=1,\ \rho=0$ ve $\alpha=n+1$ seçilirse

$$\int_0^1 x^{n+1} f^{\beta}(x)dx \geq \frac{1}{n+\beta+2}$$

eşitsizliği, $\rho=0$ seçilirse

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha} f^{\beta}(x)dx \geq \frac{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}$$

eşitsizliği, $\alpha=1$ seçilirse,

$$\int_a^b \left(x^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right) f^{\beta}(x)x^{\rho}dx \geq \frac{\left(b^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{\beta+2}}{(\rho+1)(\beta+2)}$$

eşitsizliği, $\alpha=n+1$ seçilirse,

$$\int_a^b \left(x^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{n+1} f^{\beta}(x)x^{\rho}dx \geq \frac{\left(b^{\rho+1}-a^{\rho+1}\right)^{n+\beta+2}}{(\rho+1)(n+\beta+2)}$$

eşitsizliği hemen görülür.

Diğer yandan (18) ifadesinde, ilk olarak $a=0,\ b=1,\ \rho=0,\ \alpha=n$ ve $\beta=1$ seçilirse her n∈ℕ için,

$$\int_0^1 f^{n+1}(x)dx \geq \int_0^1 x^n f(x)dx$$

olacaktır. İkinci olarak ta $a=0,\ b=1,\ \rho=0,\ \alpha=1$ ve $\beta=n$ seçelim. Bu durumda her n∈ℕ için (18) ifadesi

$$\int_0^1 f^{n+1}(x)dx \geq \int_0^1 xf^n(x)dx$$

şekline indirgenir.

Kaynaklar

Anastassiou G.A .(2009). Fractional Differentiation İnequalities, Springer.

Bougoffa L. (2007). Note on an open problem, J. Inequal. Pure Appl. Math., 8(2), Art. 58.

Bougoffa L. (2007). Corrigendum of the paper entitled: Note on an open problem, J. Inequal. PureAppl. Math., 8(4), Art. 121.

Boukerrıoua K. and Guezane-Lakoud A. (2007). On an open question regarding an integral inequality, J. Inequal. Pure Appl. Math., 8(3), Art. 77.

Dahmani Z. (2011). New inequalities of Qi type, Journal of Math. and system science 1, 7-11

Dahmani Z. and Belarbi S. (2011). Some inequalities of Qi type using fractional integration, I.J.N.S

Dahmani Z. and Tabharit L. (2010) Certain inequalities involig fractional integrals, Journal of Advanced Research in Scientific Computing, 2, 55- 60.

Katugampola U.N. (2011). New Approach to a generalized fractional integral, Appl. Math. Comput. 218(3), 860-865.

Kilbas A. A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands,

Liu W.J., Cheng G.S. and Li C.C. (2008). Further development of an open problem concerning an integral inequality,J. Inequal. Pure Appl. Math., 9(1), Art. 14. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/]

Liu W.J., Li C.C. and Dong J.W. (2007). On an open problem concerning an integral inequality,J. Inequal. Pure Appl. Math., 8(3), Art. 74.

Mazouzi S. and Qi F. (2003). On an open problem regarding an integral inequalities, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 4, Art. 31.

Ngô Q.A., Thang D.D., DAT T.T. and Tuan D.A. (2006). Note on an integral inequality, J. Inequal.Pure Appl. Math., 7(4), Art. 120.

Qi F. (2000). Several integral inequalities, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 1, Art. 19.

Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon et alibi.