



A lagrange relaxation based algorithm for parallel injection machine scheduling problem

Oğuzhan Ahmet Arık*

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Erciyes University, 38039, Kayseri, Türkiye

Highlights:

- Lagrange relaxation based algorithm
- Parallel injection machine scheduling
- New and comprehensive mathematical model

Keywords:

- Plastic injection
- Parallel machine
- Job splitting
- Batch processing
- Energy cost

Article Info:

Research Article

Received: 24.01.2024

Accepted: 03.03.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1425180

Acknowledgement:

This study was conducted by researcher Assoc. Dr. While Oğuzhan Ahmet ARIK was working at Kayseri Nuh Naci Yazgan University, he received partial support within the scope of the scientific research project coded 2022-F-BP-2.

Correspondence:

Author: Oğuzhan Ahmet Arık
e-mail: oguzhanahmet@erciyes.edu.tr
phone: +90 352 207 6666 / 32477

Graphical/Tabular Abstract

This study was motivated by a parallel injection machine workshop manufacturing plastic healthcare products. It involves various complexities such as order allocation, batch processing, labor and penalty costs, machine speed differences, energy considerations, and compatibility issues. To address these challenges, we developed a mathematical model and applied Lagrange relaxation to create a practical tool for solving real-world scheduling problems efficiently (Table A).

Table A. The proposed solution algorithm

Lagrange Relaxation Based Solution Algorithm ($Imax, \varepsilon, UB, K, \theta_0$)

Input: $Imax$ **Input:** ε **Input:** UB **Input:** K **Input:** θ_0

Use the shadow prices of Constraint (17) and Constraint (18) obtained from the relaxed solution of the original model as initial values for φ_{kit} and ω_{kit}

$u^0 := \varphi \cup \omega$

$counter := 0$

for $j := 0$ **to** $Imax$

Solve $L(u^j)$ with u^j Lagrange multipliers

$\gamma^j := g(x^j)$

$t^j := \theta_j(UB - L(u^j)) / \|\gamma^j\|^2$

$u^{j+1} := \max \{0, u^j + t^j \gamma^j\}$

If $UB > f(L(u^j))$ **then**

$UB := f(L(u^j)), counter = 0$

else

$counter ++$

end if

if $\|u^{j+1} - u^j\| < \varepsilon$ **then**

Display: The best solution and **Stop**

end if

if $counter \geq K$ **then**

$\theta_{j+1} := \theta_j/2, counter = 0$

else

$\theta_{j+1} := \theta_j$

end if

Next j

Display: The best solution

Stop

Purpose: The focal point of this study is the scheduling of parallel injection machines, specifically in workshops dedicated to the production of plastic products for the healthcare industry. Unlike existing literature, this research addresses a unique set of challenges.

Theory and Methods: Key considerations involve connecting injection molds to machines, assessing mold-machine compatibility, and addressing sequence-dependent factors such as preparation or mold change time. Two solution approaches are proposed.

Results: The study finds that the Lagrange relaxation-based algorithm demonstrates superior convergence to the optimum solution.

Conclusion: The proposed linear mathematical model, accompanied by the Lagrange relaxation-based algorithm, provides a comprehensive solution to the problem at hand.



Paralel enjeksiyon makine çizelgeleme problemi için lagrange gevşetme temelli bir algoritma

Oğuzhan Ahmet Arık*^{ID}

Endüstri Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Erciyes Üniversitesi, 38039, Kayseri, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Lagrange gevşetme temelli algoritma
- Paralel enjeksiyon makinesi çizelgeleme
- Yeni ve kapsamlı matematiksel model

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 24.01.2024

Kabul: 03.03.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1425180

Anahtar Kelimeler:

Plastik enjeksiyon,
paralel makine,
iş bölüştürme,
yığın işleme,
enerji maliyeti,
çizelgeleme

ÖZ

Plastik enjeksiyon makineleri birçok sektör için gerekli olan yarı mamul ve mamulleri üretmektedir. Bu makinelerin bir araya gelerek paralel çalıştıkları atölyeler paralel enjeksiyon makine atölyesi olarak adlandırılmaktadır. Siparişlerin hangi sıra ile hangi makinede üretileceği ise paralel enjeksiyon makinesi çizelgeleme problemi. Siparişlerin üretilmesinde, enjeksiyon kalıplarının makinelere bağlanması ve bu kalıpların makineler için uygunluğunun belirlenmesi, literatürde sıklıkla/yaygın şekilde ele alınmaktadır. Bu çalışmada, sağlık sektörü için plastik ürünlerin üretiminin gerçekleştirildiği bir paralel enjeksiyon makinesi atölyesinden esinlenilmiştir. Ele alınan problem birçok yönü ile literatürdeki problemlerden dikkat çekici oranda farklıdır. Siparişin makinelere bölünmesi, farklı siparişlerin oluşturduğu yığın işlenmesi, üretim için gerekli işgücü maliyetleri, teslim zamanından sonra üretilen ürünlere ait olan ceza maliyetleri, farklı üretim hızlarına sahip enjeksiyon makinaları, enerji maliyetleri ve sipariş-kalıp-makine uygunluğunun göz önünde bulundurulması gibi farklılıkları içeren bir paralel enjeksiyon makine çizelgeleme problemi için matematiksel model önerilmiştir. Ayrıca önerilen modelin tüm kısıtları ve amaç fonksiyonu ile beraber doğrusal olması sağlanmıştır. Ele alınan problem için önerilen modelin Lagrange gevşetme tekniği ile çözümü sağlanarak gerçek hayat problemlerin çözülebilmesi için bir araç geliştirilmiştir. Önerilen modelin ve algoritmanın geçerliliklerini test etmek için farklı büyüklüklerde test problemleri oluşturulmuştur. Önerilen algoritmanın optimum çözüme daha iyi yakınsadığı gözlemlenmiş ve performansının matematiksel modelden daha iyi olduğu belirlenmiştir.

A lagrange relaxation based algorithm for parallel injection machine scheduling problem

H I G H L I G H T S

- Lagrange relaxation based algorithm
- Parallel injection machine scheduling
- New and comprehensive mathematical model

Article Info

Research Article

Received: 24.01.2024

Accepted: 03.03.2024

DOI:

10.17341/gazimmfd.1425180

Keywords:

Plastic injection,
parallel machine,
job splitting,
batch processing,
energy cost,
scheduling.

ABSTRACT

Injection molding machines produce semi-finished and finished products necessary for many industries. Shops with these machines in parallel are referred to as parallel injection machine shops. In the production of orders, the connection of injection molds to the machines and the determination of the suitability of these molds for the machines are frequently addressed in the literature. This study is inspired by a parallel injection machine shop producing healthcare plastic products. The problem addressed in this study is significantly different from problems in the literature. It involves dividing orders among machines, processing a stack of orders from different customers, labor costs for production, penalty costs for products produced after the delivery time, injection machines with different production speeds, energy costs, and considering the compatibility of orders-molds-machines. A mathematical model is proposed for the problem incorporating these differences, ensuring linearity with all constraints and the objective function. Furthermore, a tool is developed for solving real-life problems using Lagrange relaxation technique. Test problems of various sizes are created to validate the proposed model and algorithm. It is observed that the proposed algorithm converges better to the optimum solution and performs better than the model.

1. Giriş (Introduction)

Bu çalışma, sağlık sektörü için plastik ürün üreten bir plastik enjeksiyon üretim tesisinden esinlenerek yazılmıştır. Tesis, farklı hızlara, özelliklere ve ürün üretebilme kabiliyetlerine sahip enjeksiyon makinelerine sahiptir. Ele alınan problemin konu başlıkları aşağıdaki gibi sıralanır.

1. Paralel enjeksiyon makineleri,
2. Enerji tüketim maliyetinin en küçüklenmesi,
3. Siparişi ya da işi paylaşırma (order or job splitting),
4. Yiğın işleme,
5. Üretim için gereken iş gücü maliyetinin en küçüklenmesi,
6. Sipariş reddetme maliyetinin en küçüklenmesi,
7. Teslim zamanından sonra üretilen ürünlere ait ceza maliyetlerinin en küçüklenmesi,
8. Kalıpların makinelere uygunluk kısıdı,
9. Müşteri siparişlerinin kalıplara uygunluk kısıdı,
10. Farklı makine üretim hızları,
11. Sıra bağımlı kalıp değişim (hazırlık) süreleri.

Yukarıda listelenen konuların bir kısmı ya tek tek ya da birlikte literatürdeki bazı çalışmalarda ele alınmıştır. Yukarıda sıralandığı gibi 11 maddeyi de tek seferde ele alan bir çizelgeleme problemi literatürde incelenmemiştir. Ayrıca aynı kalıp tarafından farklı müşteri siparişlerinin bir kısmının üretilmesi konusu da literatürde hiçbir çalışma tarafından ele alınmamıştır. Problem hem yiğın işlemeyi hem de iş paylaşımını ele alması nedeni ile ilgi çekici ve gerçek hayata oldukça uygundur. Bu problemde, literatürdeki tipik çizelgeleme problemlerinden farklı olarak, işlerin makinelere atanmasıyla ilgili olarak tek kademeli bir uygunluk kısıtı yerine makine-kalıp-ış şeklinde daha karmaşık bir yapı söz konusudur. Diğer bir deyişle, her işin belirli bir makine ve kalıp kombinasyonuna atanması gerekmektedir. Bu durum, problemin karmaşıklığını artırır ve literatürde daha az örneği bulunan bir yapıya işaret eder. Geleneksel çizelgeleme problemlerinde, genellikle işlerin belirli makinelerde belirli bir sırayla işlenmesi gerekmektedir. Ancak burada, işlerin hangi makine ve kalıp kombinasyonunda işleneceği de göz önünde bulundurulmalıdır. Bu, problemi daha karmaşık hale getirir ve bu tür özel kısıtları ele alabilen az sayıda çalışma literatürde mevcuttur. Bu nedenle, bu problemin çözümü için daha özgün ve özelleştirilmiş çözümler gerekebilir. Aynı kalıbın farklı makinelerde hem farklı üretim hızlarına sahip olması hem de farklı iş gücü ihtiyaçlarına göre değişen maliyetlerle siparişleri işleyebilmesi, problemin ilgi çekici ve gerçekçi olduğunu ortaya koymaktadır. Birçok çizelgeleme probleminde teslim tarihinden sonra geçen sürenin önceden belirlenen birim süre ceza maliyeti çarpımının en küçüklenmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışma kapsamında ise teslim tarihinden sonra üretilen ürün miktarının sadece ceza konusu olduğu durum incelenmektedir. Farklı makine üretim hızları nedeni ile geçen süre aynı bile olsa üretilen ürün miktarının farklı olması nedeni ile geç üretilen sipariş miktarının da farklılaşması gerçekçi bir yaklaşımdır. Bu da ele alınan araştırma problemini literatürdeki benzerlerinden ayıran bir özelliktir. Tablo 1 ile önerilen çalışma konusunun literatürdeki benzer çalışmalar ile kıyaslanması gösterilmektedir. Paralel enjeksiyon makinelerinin farklı kısıtlar ve amaç fonksiyonları ile problem olarak ele alınması oldukça popülerdir. Tablo 1’de görüldüğü üzere literatürdeki birçok çalışma sıra bağımlı hazırlık zamanı / kalıp değişim zamanı gibi kısıtları dikkate almıştır. Tablo 1’de sunulan özetle, paralel enjeksiyon çizelgeleme problemlerinde kalıp-makine uygunluğu kısıtının nadiren göz önüne alındığı anlaşılmaktadır. Paralel enjeksiyon makinelerinde genellikle işgücü maliyeti haricindeki maliyet kalemlerine ya da performans kriterlerine odaklanıldığı Tablo 1’den anlaşılmaktadır. Çalışmaya konu olan diğer performans kriterleri de iş gücü maliyeti gibi para birimi cinsinden

ifade edilmektedir. Bu durum problemin tüm amaç fonksiyonlarının tek bir ölçüm birimi ile ifade edilmesine ve uygun çözüm arayışlarında gerçekçi çözümlere odaklanmasını sağlayacaktır. Farklı müşteri siparişlerini birleştirerek üretmek yiğın işleme olarak adlandırılabilir. Literatürde bu konuda paralel enjeksiyon makinelerinde yapılmış olan tek bir çalışmanın (Rios-Solis vd. [1]) olduğu görülmektedir. Siparişleri bölerek üretmek bu çalışma içerisinde öne çıkan yeniliklerden biridir. Yapılan literatür araştırması neticesinde bu konuda, çalışma konumuza benzer tek bir çalışma (Salimifard vd. [2]) olduğu görülmüştür. Çizelgeleme problemlerinde amacın enerji maliyetlerini en küçüklemek olmasına sık rastlanır. Ancak, paralel enjeksiyon makinelerinin çizelgelemesi konusunda beklenenden daha az sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışma ile farklı elektrik tüketimine sahip olan farklı çalışma hızlarındaki makinelerin hem çalışıyorlarken hem de kalıp bağlanması ya da hazırlık zamanı gibi boşta beklediği anlardaki toplam elektrik tüketim maliyetinin en küçüklenmesi amaçlanmaktadır. Tablo 1’den de görüleceği üzere 1, 2, 8, 9 ve 11. maddeler haricinde, bu çalışma kapsamında ele alınan birçok konu çizelgeleme literatürü için ya yenidir ya da oldukça az örnekleri vardır. Özellikle üretim için gerekli işgücü maliyetleri, teslim zamanından sonra üretilen ürünlere ait olan ceza maliyetleri ve farklı üretim hızlarına sahip enjeksiyon makinaları bu çalışma içerisinde ilk defa incelenecektir. Enjeksiyon makinesi çizelgeleme problemleri özelinde olmasa da, farklı makine hızlarıyla ilgili çizelgeleme problemleri literatürde oldukça yaygın olarak bulunmaktadır. Paralel enjeksiyon makineleri için farklı makine hızlarının olması, problemi ilginçleştirir. Aynı ürün imalatı için birisi hızlı diğeri yavaş çalışan iki makinede bağlı olan kalıpların ürettikleri miktarlar üretim hızları ile orantılı olacaktır. Yüksek elektrik tüketimine sahip ve daha hızlı olan bir makineden elde edilecek olan üretim miktarı teslim zamanından sonra üretilen ürünler için ödenecek ceza maliyetini azaltırken elektrik kullanımını nedeni ile olan maliyeti artıracaktır. Bu nedenle enerji ve geç teslim maliyetleri açısından ödünleştirme yapılması gerekebilir. Bu da ele alınan problemi gerçekçi ve ilgi çekici yapmaktadır. Enerji maliyeti en küçüklenmesi, yiğın işleme, sipariş reddetme gibi daha önce enjeksiyon makinelerinde birbirleri ile beraber incelenmemiş konular bu çalışmada birlikte incelenmektedir. Siparişin kabul edilmesi durumunda ceza maliyetinden kaçınılacaktır fakat bu durumda enerji maliyetini en küçükleyecek şekilde iş makine atama planlaması yapılması gerekmektedir. Siparişlerinin bölünebilmesi ve başka siparişlerle birleştirilerek yiğın olarak işlenebilmeleri de bir siparişin parçalanarak başka makinelere atanabilmesine olanak tanıyacaktır. Anlaşılabacağı üzere siparişin kabulü neticesinde verilmesi gereken ek kararlar ortaya çıkmaktadır. Bu durum problemin karmaşıklığını artırmaktadır.

Literatür araştırması sırasında enjeksiyon makinelerine odaklanılmıştır, ancak problemin yapısı kaynak kısıtlı paralel makine çizelgeleme problemlerine de benzerlik göstermektedir. Kalıp sayısının sınırlandırılması problemi bir açıdan kaynak kısıtlı paralel makine çizelgeleme problemi olarak sınıflandırmaya müsaade etmektedir. Bu açıdan bakıldığında enjeksiyon makinesi özelinde olmayan ve kaynak kısıtlarını dikkate alan çalışmalara rastlanabilmektedir. Bu tarz çalışmalara örnek olarak Akyol ve Sarac [3], Blazewicz vd. [4], Song vd. [5], Soares ve Carvalho [6], Avgerinos vd. [7], Geurtsen vd. [8], Şaştım ve Hasgöl [9] ve Jemmali ve Hmida [10] çalışmaları örnek gösterilebilir. Yine de bu çalışmalar hem enjeksiyon makineleri ile ilgili olmamaları hem de siparişleri paylaşarak yiğın işlemeyi dikkate almamaları nedeni ile bu çalışmadan farklıdır. Literatür araştırmamız esnasında karşımıza çıkan ve okuyucunun faydalanacağını düşündüğümüz bazı önemli çalışmalar Takan ve Saraç [11], Saraç ve Tutumlu [12], Saraç ve Özçelik [13], Arık ve Toksarı [14], Arık [15] ve Arık [16] tarafından yapılmıştır.

Tablo 1. Literatürdeki benzer çalışmalar ile kıyaslama (Comparison with similar studies in the literature)

Yazarlar	Çizelgeleme Problemi Bileşeni										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kayish ve Dy Cheng Beng [20]	X										
Terano vd. [21]	X										
Tanev vd. [22]	X										
Edis vd. [18]	X								X		
Huiyuan vd. [23]	X										
Gong vd. [24]		X									
Wong vd. [25]	X										
Wong vd. [26]	X										
Paolucci vd. [27]	X	X									X
Şafak vd. [28]	X										
Ishihara vd. [29]	X	X									
Wulung ve Wibowo [30]	X										X
Ríos-Solís vd. [1]	X			X					X		X
Ayad ve Fahim [31]	X										X
Cervantes-Sanmiguel vd. [32]	X									X	X
Aslaner vd. [33]	X							X	X		X
Andres vd. [34]	X										X
Ozcelik vd. [35]	X										X
Sadeghi vd. [36]	X										X
Ghaleb vd. [37]	X					X					X
Klement vd. [38]	X							X			X
Sarac vd. [39]	X							X			X
Salimifard vd. [2]	X		X					X			X
Mula vd. [40]	X										X
Bazargan-Lari vd. [41]	X							X			
Bu çalışma	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Literatürde örnekleri az olan ve bu çalışma içerisinde ilk defa incelenecek olan konular bir araya geldiğinde çalışma kapsamında ele alınan problem literatür için birçok ilki bir arada sunmaktadır. Tüm bu konuları tek seferde ele alan doğrusal bir matematiksel modelin oluşturulması amaçlanmıştır. Ele alınacak olan problemde siparişin kabul edilip edilmemesi, kabul edilen siparişin makinelerle atanması, siparişlerin bölünebilmeleri nedeni ile farklı makinelerde eş zamanlı olarak işlenebiliyor olmaları birçok karar değişkeni ve kısıdın modele dahil edilmesini gerektirmektedir. Bu durum eniyileme esnasında birbirleri ile çatışan birçok zor ve kompleks kısıdın olmasına neden olmaktadır. Kompleks kısıtlar nedeni ile problem hesaplama karmaşıklığına sahiptir. Lagrange gevşetme algoritması Fisher [17] tarafından esas problemi daha kolay çözülebilen alt küçük problemlere bazı zor kısıtları gevşeterek ayrıştırmak üzere önerilmiştir. Lagrange gevşetme genellikle üç ana kısımdan oluşur. Bunlar; kısıt gevşetmesi, Lagrange çarpan ayarlaması ve olurlu çözüm üretme kısımlarıdır. Bu çalışma kapsamında ele alınan problem birbiri ile etkileşim içerisinde olan sipariş reddetme, siparişi makinelerle atama ve siparişleri bölerek yığın olarak işleme gibi karar değişkenleri ve kısıtlar nedeni ile oluşan zor kısıtlar Lagrange gevşetme yöntemi ile gevşetilecektir. Ardından, çözüm prosedürü probleme uygulanacaktır. Literatürde Lagrange gevşetme yönteminin çizelgeleme problemlerine uygulanmasının oldukça fazla örneği vardır. Edis vd. [18] kaynak ve makine uygunluk kısıtlı paralel enjeksiyon makine çizelgeleme probleminde, toplam akış zamanını en küçükleme için önerdikleri tam sayılı modeli Lagrange gevşetme temelli bir algoritma vasıtası ile çözdürmüşlerdir. Çalışmalarında, işlere atanacak toplam operatör sayısının mevcut operatörlerden fazla olamayacağı ile ilgili kısıdı gevşetmişler ve ardından çözüm yöntemini uygulamışlardır. Emami vd. [19] sipariş kabulü ve çizelgelemesi ile alakalı ele aldıkları özdeş olmayan paralel makine çizelgeleme problemi için Lagrange gevşetme algoritmasından faydalanmışlardır. Lagrange çarpanlarının belirlenmesinde kesme düzlemi algoritmasından ve olurlu çözümler üretmede ise bir sezgiselden faydalanmışlardır. Çalışmalarında, işlerin geç kalma

zamanlarının hesabını yapan kısıt ile tamamlanma sürelerinin hesabı kısıdını gevşetmişler ve problemlerine çözüm prosedürünü uygulamışlardır.

2. Problem Tanımı ve Matematiksel Model (Problem Definition and the Mathematical Model)

Bu çalışma, sağlık sektörü için plastik ürün üretimi yapan bir plastik enjeksiyon üretim tesisinden esinlenmiştir. Üretim işletmesinde paralel şekilde çalışabilen farklı hızlara, özelliklere ve ürün üretebilme kabiliyetlerine sahip enjeksiyon makineleri vardır. İstenilen ürünlerin üretimi için enjeksiyon makinelerine kalıplar bağlanmakta ve ürünler sıcak plastik malzemenin kalıplara enjekte edilmesi neticesinde üretilmektedir. Bir üretim siparişi geldiğinde eğer müşterinin siparişini üretebilecek birden fazla kalıp varsa bu kalıplar farklı makinelerle bağlanabilmekte ve müşteri siparişini eş zamanlı olarak ya da farklı zamanlarda üretebilmektedir. Bu durumda, bir müşteriye ait olan siparişin istenilen üretim miktarına ulaşması için paylaşılması gerekmektedir. Aynı partide, makineye bağlı bir kalıp tarafından üretililecek birden fazla müşteri siparişi varsa, kalıp değişimi olmaksızın aynı partide üretim gerçekleştirilebilir. Bir kalıp bağlı olduğu makineden başka bir makineye bağlanabilir. Bir müşteri siparişinin gerekli maliyetlere katlanıp reddedilip edilmeyeceğine karar verilebilir. Bu durumda makinelerle kalıpların atanması, kalıplara farklı müşterilere ait üretim siparişlerinin paylaşılması, makinelerde kalıp sıralarının belirlenmesi, aynı kalıbın aynı anda birden fazla makinede olmasına müsaade edilmemesi (çakışma olmadan) kısıtlarının firmanın maliyetlerini en küçükleme üzere olan amaç fonksiyonuna göre modellenmesi gereği ortaya çıkmıştır. Amaç fonksiyonu para birimi ile ifade edilen 5 tane maliyet kaleminin birleşimini en küçükleme hedeflemektedir. Bu maliyet kalemleri sırasıyla; makinelerde çalışan işçilerin toplam maliyeti, müşteri siparişlerini reddetmenin maliyeti, makinelerde kalıplar bağlı şekilde üretim yapıyorken sarf edilen toplam elektrik maliyeti, kalıp değişimi esnasında makineler boşa beklerken sarf edilen toplam

elektrik maliyeti ve geç üretilen ürünlerin toplam ceza maliyeti olarak sıralanır. Amaç fonksiyonu kabul edilen siparişlerin üretim maliyetlerini ve kabul edilmeyen siparişlerin reddetme maliyetini en küçüklemektedir.

Raporlanmış literatüre göre, çalışmaya konu olan 11 çizelgeleme bileşeninin hepsinin ya da çoğunun literatürde birlikte incelendiği tek bir çalışma yoktur. Mevcut literatüre göre çalışma konusuna en benzer çalışmalar Rios-Solis vd. [1], Salimifard vd. [2], Ghaleb vd. [37], Sadeghi vd. [36], Klement vd. [38] ve Saraç vd. [39] tarafından yapılmıştır. Her ne kadar sıralanan bu çalışmalar ile çalışma konusu arasında kısmi benzerlikler olsa da çalışma konusu olan problem birçok açıdan özgün ve literatüre ilk defa kazandırılacak olan model kısıtları barındırmaktadır. İş atamaları genellikle makine-kalıp veya makine-sipariş şeklinde yapılır ve bu atamaları ifade eden karar değişkenleriyle matematiksel bir model kolayca doğrusal bir şekilde kurulabilir. Ancak, bu çalışmanın konusu olan iş atamaları, makine-kalıp-sipariş şeklinde olduğu için, siparişlerin farklı makine-kalıp kombinasyonlarına da dağıtılabilmesi ve benzer siparişlerin bir makine-kalıp atamasında birleştirilerek toplu olarak işlenmesi gibi özellikler, karar değişkenlerinin tasarımını ve kısıtların oluşturulmasını daha zor hale getirir. Matematiksel modelde, bir kalıp bir makineye takılı olduğunda gerekli işçi sayısının önceden bilindiği ve bu işçilerin sadece çalıştıkları makinedeki sipariş-kalıp atamasından sorumlu olduğu varsayılır. Önerilen matematiksel model aşağıdadır.

Kümeler ve İndisler:

- N : Atölyede bulunan toplam kalıp sayısı.
 M : Atölyede bulunan toplam paralel makine sayısı.
 NO : Toplam müşteri siparişi sayısı.
 I' : Kalıpları ifade eden küme. i ve l bu kümenin elemanlarını ifade eden indislerdir ($i \in \{0,1,2, \dots, N\}$). 0 ile ifade edilen kalıp matematiksel modelleme için kukla kalıptır.
 I : Kukla kalıp hariç kalıpları ifade eden küme. i ve l bu kümenin elemanlarını ifade eden indislerdir ($i \in \{1,2, \dots, N\}$).
 K : Paralel makineleri ifade eden küme. k ve t bu kümenin elemanlarını ifade eden indislerdir ($k \in \{1,2, \dots, M\}$).
 J : Müşteri siparişlerini ifade eden küme. j bu kümenin elemanlarını ifade eden indis ($j \in \{1,2, \dots, NO\}$).

Parametreler:

- π_j : j müşteri siparişi ürününe ait talep miktarı.
 \bar{w}_j : j müşteri siparişi ürünlerinden bir tanesinin geç teslim edilmesi sonucu ödenecek ceza maliyeti.
 D_j : j müşteri siparişinin teslim zamanı.
 L_j : j müşteri siparişinin reddedilmesi durumundaki ceza maliyeti (kayıp satış, müşteri kaybı, itibar kaybı).
 Q_k : k makinesinin çalışırken elektrik maliyeti/ birim zaman.
 B_k : k makinesinin boşta bekliyorken veya kalıp değişimi esnasındaki elektrik maliyeti/ birim zaman.
 V_{ki} : k makinesinin i kalıbı ile üretim hızı (adet/birim zaman).
 θ_{ki} : k makinesinin i kalıbı ile çalışması için gerekli işçi sayısı.
 γ : Ortalama işçilik ücreti / birim zaman.
 E_{ki} : k makinesi i kalıbı ile uyumlu ise 1, aksi halde 0.
 O_{ij} : j müşteri siparişi i kalıbı ile üretilebilir ise 1, aksi halde 0.
 MC_{kil} : i kalıbından sonra l kalıbı k makinesine bağlandığında kalıp değişim süresi.
 A : Keyfi ve yeterli büyüklükte bir sayı
 $A = \max(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{NO} V_{ki} \pi_j \forall k)$

Karar değişkenleri:

- C_{ki} : k makinesi i kalıbı ile üretim tamamlanma zamanı.
 P_{ki} : k makinesi i kalıbı ile üretim zamanı ve makine ayarlama zamanı (kalıp değişimi dahil).
 DE_j : j müşteri siparişi üretilmek üzere kabul edildi ise, $DE_j=1$; diğer türlü $DE_j=0$.
 T_{kj} : k makinesindeki üretim sonucu geç kalan j müşteri siparişi ürün adedi.
 X_{kil} : i kalıbı k makinesinde l kalıbından önce takıldı ve üretimini tamamladı ise, $X_{kil}=1$; diğer türlü $X_{kil}=0$.
 Y_{kti} : i kalıbı k makinesine t makinesinden önce takıldı ve üretimini tamamladı ise $Y_{kti}=1$; diğer türlü $Y_{kti}=0$.
 W_{kij} : k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin bir kısmı ya da tamamı üretildi ise, $W_{kij}=1$; diğer türlü $W_{kij}=0$.
 U_{kij} : k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin bir kısmı ya da tamamının üretim zamanı.
 r_{kij} : k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin oransal olarak üretilen miktarı.

Amaç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \gamma \theta_{ki} P_{ki} + \sum_{j \in J} L_j (1 - DE_j) \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} V_{ki} T_{kij} \pi_j Q_k \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{l \in I'} MC_{kli} X_{kli} B_k + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \bar{w}_j T_{kj} \end{aligned} \quad (1)$$

Amaç fonksiyonu (1) para birimi ile ifade edilen 5 tane maliyet kaleminin birleşimini en küçüklemeyi hedeflemektedir. Bu maliyet kalemleri sırasıyla; makinelerde çalışan işçilerin toplam maliyeti, müşteri siparişlerini reddetmenin maliyeti, makinelerde kalıplar bağlı şekilde üretim yapıyorken sarf edilen toplam elektrik maliyeti, kalıp değişimi esnasında makineler boşta beklerken sarf edilen toplam elektrik maliyeti ve geç üretilen sipariş birimlerinin maliyeti olarak sıralanır. Amaç fonksiyonu kabul edilen siparişlerin üretim maliyetlerini ve kabul edilmeyen siparişlerin reddetme maliyetini en küçüklemektedir.

Kısıtlar:

$$P_{ki} = \sum_{j \in J} V_{ki} r_{kij} \pi_j + \sum_{i \in I'} MC_{kli} X_{kli} \quad \forall k \in K, i \in I, E_{ki} = 1 \quad (2)$$

Kısıt (2) k makinasına i kalıbı takılması durumundaki işlem süresinin ve kalıp takma süresinin toplamını göstermektedir. k makinasında daha önce hangi kalıp var ise ardından makineye bağlanan i kalıbı için bir kalıp değişim süresi olacaktır. Ayrıca i kalıbı ile üretilecek olan müşteri siparişlerinin de işlem süresine bir etkisi olacaktır. Makinanın üretim hızı (V_{ki}) ve siparişin ne kadarının makine ile karşılanacağı ($r_{kij} \pi_j$) işlem süresi hesabında kullanılacaktır.

$$C_{ki} \geq P_{ki} \quad \forall k \in K, i \in I \quad (3)$$

Kısıt (3) k makinasına i kalıbı takılması durumundaki tamamlanma zamanının işlem zamanından büyük olduğunu veya eşit olduğunu göstermektedir.

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} r_{kij} = DE_j \quad \forall j \in J \quad (4)$$

Kısıt (4) eğer j müşteri siparişi reddedilmeyip de üretilecek olursa bu siparişe ait tüm ürünlerin uygun olan tüm makine ($E_{ki} = 1$) ve kalıpları ($O_{ij} = 1$) kullanarak üretileceğini göstermektedir.

$$\sum_{\substack{l \in I \\ l \neq i}} X_{kil} \geq r_{kij} \forall j \in J, i \in I, k \in K, O_{ij} = 1 \text{ ve } E_{ki} = 1 \quad (5)$$

Kısıt (5) eğer k makinasında i kalıbını kullanarak j müşteri siparişi üretiliyorsa bu makinaya muhakkak i kalıbının atanması gerektiğini göstermektedir.

$$\sum_{\substack{t \in K \\ t \neq k}} Y_{kti} \geq \sum_{\substack{l \in I \\ l \neq i}} X_{kil} \forall i \in I, k \in K, E_{ki} = 1 \quad (6)$$

Kısıt (6) i kalıbının kendisine uygun olan herhangi bir k makinesine takılması durumunda ikili karar değişkenlerinin alması gereken değerleri garanti altına alır.

$$X_{ki0} \leq 1 \forall i \in I, E_{ki} = 1 \quad (7)$$

$$X_{k0i} \leq 1 \forall i \in I, E_{ki} = 1 \quad (8)$$

Kısıtlar (7) ve (8) i kalıbı kendisine uygun olan herhangi bir k makinesine takılabilir. Makinelere kalıpların takılıp sökülmesi ile yapılan üretim kukla kalıp ile başlar ve biter.

$$\sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq l \\ E_{ki}=1}} X_{kil} - \sum_{\substack{i \in I' \\ i \neq l \\ E_{kl}=1}} X_{kli} = 0 \forall l \in I, k \in K \quad (9)$$

Kısıt (9) her kalıbın makineye bağlanma sırasından önce ve sonra sadece bir kalıbın makinede olduğu anlamına gelen akış dengesini garanti eder.

$$X_{kil} \leq E_{ki} \forall k \in K, i \in I, l \in I, i \neq l \quad (10)$$

Kısıt (10) i kalıbının k makinesine uyumlu olması durumunda makineye bağlanabilir olduğunu ifade eder.

$$Y_{kti} \leq E_{ki} \forall k \in K, i \in I, t \in K, k \neq t \quad (11)$$

Kısıt (11) i kalıbının k makinesine t makinesinden önce takılabilmesi için kalıbın makineye uyumlu olması gerektiğini göstermektedir.

$$Y_{kti} + Y_{kit} \leq 1 \forall k \in K, i \in I, t \in K, k \neq t \quad (12)$$

Kısıt (12) i kalıbının k makinesine t makinesinden ya önce ya sonra ya da hiç takılmayacağını ifade etmektedir.

$$r_{kij} \leq W_{kij} \forall k \in K, i \in I, j \in J, O_{ij} = 1 \text{ ve } E_{ki} = 1 \quad (13)$$

Kısıt (13) k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin oransal olarak üretilen miktarı (r_{kij}) k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin bir kısmı ya da tamamının üretilip üretilmediği karar değişkenine (W_{kij}) bağlı olduğunu göstermektedir.

$$U_{kij} \leq A \cdot W_{kij} \forall k \in K, i \in I, j \in J, O_{ij} = 1 \text{ ve } E_{ki} = 1 \quad (14)$$

$$C_{ki} - U_{kij} \leq A \cdot (1 - W_{kij}) \forall k \in K, i \in I, j \in J, O_{ij} = 1 \text{ ve } E_{ki} = 1 \quad (15)$$

Kısıtlar (14) ve (15) k makinesinde i kalıbı ile j müşteri siparişinin bir kısmı ya da tamamının üretim zamanını takip etmek için olan $U_{kij} = W_{kij}C_{ki} \forall k \in K, i \in I, j \in J$ kısıtının doğrusallaştırılmış halidir. $W_{kij}C_{ki}$ ifadesi probleme ait iki karar değişkeninin çarpımıdır ve doğrusal olmayan bir ifadedir. Probleme ait kısıtların tamamının doğrusal kalması için $U_{kij} = W_{kij}C_{ki} \forall k \in K, i \in I, j \in J$ kısıtı Kısıtlar (14) ve (15)'de görüldüğü gibi doğrusallaştırılır.

$$T_{kj} \geq (U_{kij} - D_j)V_{ki} \forall k \in K, i \in I, j \in J, \quad O_{ij} = 1 \text{ ve } E_{ki} = 1 \quad (16)$$

Kısıt (16) k makinesindeki üretim sonucu geç kalan j müşteri siparişi ürün adeti (T_{kj}) hesabını göstermektedir. Teslim zamanından (D_j) sonra geçen sürenin (U_{kij}) makine üretim hızı ile çarpılması ile bulunan ürün adeti geç kalan sipariş adeti (T_{kj}) olarak hesaplanır.

$$C_{ki} - C_{kl} + AX_{kil} \leq A - P_{kl} \forall k \in K, i \in I', l \in I, i \neq l \quad (17)$$

$$C_{ki} - C_{ti} + AY_{kti} \leq A - P_{ki} \forall k \in K, i \in I, t \in K, t \neq k \quad (18)$$

Kısıtlar (17) ve (18) aynı makine üzerinde takılı olan kalıpların tamamlanma zamanları arasındaki sıra ilişkisini ve aynı kalıp ile işlem yapan farklı makinelerin tamamlanma zamanları arasındaki sıra ilişkisini göstermektedir. Bu kısıtlar ile makinelerin kalıplarla olan üretimlerinin tamamlanma zamanları C_{ki} hesaplanır.

$$C_{ki}, P_{ki} \geq 0 \forall k \in K, i \in I' \quad (19)$$

$$r_{kij}, U_{kij} \geq 0 \forall k \in K, i \in I', j \in J \quad (20)$$

$$T_{kj} \geq 0 \forall k \in K, j \in J \quad (21)$$

$$X_{kil} \in \{0,1\} \forall k \in K, i \in I', j \in J \quad (22)$$

$$Y_{kti} \in \{0,1\} \forall k \in K, i \in I', t \in K \quad (23)$$

$$W_{kij} \in \{0,1\} \forall k \in K, i \in I', j \in J \quad (24)$$

$$DE_j \in \{0,1\} \forall j \in J \quad (25)$$

Kısıtlar (19-21) $C_{ki}, P_{ki}, r_{kij}, U_{kij}$ ve T_{kj} karar değişkenlerinin işaret sınırlanmalarını göstermektedir. Kısıtlar (22-25) $X_{kil}, Y_{kti}, W_{kij}$ ve DE_j karar değişkenlerinin ikili karar değişkenleri olduğunu göstermektedir.

3. Lagrange Gevşetmeye Dayalı Sezgisel (Lagrange Relaxation Based Heuristic)

Bu bölümde, önceki bölümde önerilen matematiksel modelin çözümünde daha kısa sürelerde sonuç verebilecek bir Lagrange gevşetmeye dayalı bir çözüm algoritması sunulmaktadır. Öncelikle basit bir model üzerinde Lagrange gevşetmesi anlatılmıştır. Ardından gevşetme işlemi için doğru kısıtların hangilerinin olabileceği tartışılmıştır. Literatürdeki bazı çalışmalarda, Lagrange çarpanlarının belirlenmesi ve olurlu çözümler üretmek için sezgisel ya da kesin çözüm yöntemlerinden faydalanılmaktadır. Aşağıda genelleştirilmiş bir tam sayılı programlama matematiksel modeli verilmiştir. Aşağıdaki problemi asıl problem olarak adlandırıyoruz. Asıl problem için Lagrange gevşetmesi (Fisher [42]) aşağıda sunulmuştur.

$$Z = \text{Min } c^T x$$

$$\text{Öyle ki; } Ax \geq b, Dx = d, x \in \mathbb{N}$$

$Ax \geq b$ kısıdını kullanarak Lagrange gevşetmesini yukarıdaki probleme negatif olmayan λ katsayıları ile aşağıdaki gibi uygularız.

$$\text{Min } c^T x + \lambda(Ax - b)$$

$$\text{Öyle ki; } Dx = d, x \in \mathbb{N}$$

X kümesi $Dx = d$ ve $x \in \mathbb{N}$ kısıtlarını sağlayan x karar değişkenlerinin kümesi olmak üzere Lagrange alt problem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$L(\lambda) = \min_{\lambda \geq 0} (c^T x + \lambda(Ax - b)) | x \in X$$

Bir probleme ait optimal çözüm ve farklı λ katsayıları ile elde edilebilecek olan $L(\lambda)$ problemleri arasındaki ilişki $Z^* \geq \min_{\lambda \geq 0} (c^T x + \lambda(Ax - b) \mid x \in X) = L(\lambda)$ şeklindedir. Bu durumda $L(\lambda)$ asıl problemin bir alt sınır değeridir ve gevşetilmiş problem çözümü ile elde edilen alt sınır değerinden çok daha sıkı bir alt sınırdır. Farklı alt sınır değerleri arasından en iyi alt sınır değerine L^* ulaşmak için kurulan probleme ise Lagrange Dual (ikiz) problemi denir ve aşağıdaki gibidir.

$$\max L^*$$

Öyle ki;

$$L^* \leq c^T x + \lambda(Ax - b) \\ x \in X, \lambda \geq 0$$

Yukarıdaki problemde $\lambda \geq 0$ bir karar değişkenidir ve en iyi alt sınır değerini bulmak için değeri matematiksel model tarafından bulunmaya çalışılmaktadır. Zayıf dualite teoremi nedeni ile elde edilen L^* değerini kullanarak $L(\lambda) \leq L^* \leq Z^* = c^T x^*$ ilişkisi kurulabilir. Herhangi bir λ değeri ile bulunan x karar değişkeni vektörünün asıl problem için de optimal olup olmadığını bulmak için aşağıdaki optimalite testi yapılır.

Eğer x karar değişkeni vektörü ile $L(\lambda) = c^T x$ durumu sağlanıyorsa, $L(\lambda)$ Lagrange Dual problemin optimal amaç fonksiyonuna eşittir $L(\lambda) = L(\lambda^*) = L^*$ ve bulunan x karar değişkeni vektörü asıl problem için optimal çözümü vermektedir ($L(\lambda) = L(\lambda^*) = L^* = Z^* = c^T x^* = c^T x$).

Yukarıdaki Lagrange Dual problemde hem x hem de λ karar değişkeni vektörleri bulunmaya çalışılmıştır. X kümesi içerisinde ifade tanımlı olan kısıt sayısına bağlı olmak üzere Lagrange Dual problemin çözümü için üssel zaman kullanılması gerekebilir. Bu durumlarda alt dereceli azaltma algoritması (gradient descent algoritim) kullanılarak bir başlangıç λ vektörü her iterasyonda iyileştirilecek optimal x vektörü elde edilir.

Konkav bir f fonksiyonu ($f: R^n \rightarrow R$) için x karar değişkeni ile ilişkili bir g vektörü vardır eğer herhangi bir $y \in R^n$ için $f(y) \leq f(x) + g^T(y - x)$ koşulu sağlanıyorsa ve f fonksiyonunda x için sadece bir gradyan var ise, f fonksiyonu x için türevlenebilir bir fonksiyondur. Eğer $L(\lambda)$ türevlenebilir ise biz alt dereceli azaltma algoritmasını kullanarak optimal çözüme ulaşmaya çalışabiliriz. Fakat $L(\lambda)$ her yerde türevlenemeyebilir çünkü $L(\lambda)$ parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu yüzden aşağıdaki altgradyan (subgradient) yöntemi (Held vd. [43]) kullanılarak, her iterasyonda (iterasyon indisi $k \in N$ olmak üzere) λ_k ve $L(\lambda_k)$ değerlerini aşağıdaki gibi hesaplarız.

Algoritma: ALTGRADYAN

Adım 0: $k = 0$ olarak ayarla ve $\lambda_0 \in R^n$ değerini seç

Adım 1: $L(\lambda_k)$ değerini ve $x_k \in X$ vektörünü hesapla

Adım 2: $L(\lambda_k)$ fonksiyonu için bir altgradyan seç $g_k = Ax_k - b$

Adım 3: Eğer $g_k = 0$ ise dur, $L(\lambda_k)$ optimal çözümdür

Adım 4: Hesapla $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \theta_k^T g_k$ ($\theta_k^T = \frac{UB - L(\lambda_k)}{|Ax_k - b|^2}$)

Adım 5: $k = k+1$ olarak ayarla ve Adım 2'ye git.

Lagrange gevşetmesi temelli bir algoritma, matematiksel modelin bazı kısıtlarını belirli katsayılarla çarparak ve amaç fonksiyonuna ekleyerek problemin karmaşıklığını azaltmayı amaçlar. Bu yöntem, gevşetme işlemi uygulayarak ve adım adım optimal çözüme ulaşacak şekilde belirli adımları tekrar ederek çalışır. Bu çalışma kapsamında ele alınan problem birbiri ile etkileşim içerisinde olan sipariş reddetme, siparişi makinelere atamama ve siparişleri bölerek yığın

olarak işleme gibi karar değişkenleri ve kısıtlar nedeni ile oluşan zor kısıtlar Lagrange gevşetme yöntemi ile gevşetilebilir ve ardından çözüm prosedürü probleme uygulanabilir. Bu kapsamda yukarıda tanımlanan kısıtlar (17), ve (18) gevşetilerek modele eklenmeye müsait kısıtlardır. φ_{kil} parametresi kısıt (17) için bir Lagrange çarpanı ve ω_{kit} parametresi de kısıt (18) için bir Lagrange çarpanı olarak kullanılır. Bu çarpanları kullanarak kısıt (17) ve kısıt (18), amaç fonksiyonu (26)'ya aşağıdaki gibi eklenir.

$$L(\varphi, \omega) = \sum_{k \in K} \sum_{E_{ki}=1}^{i \in I} \gamma \theta_{ki} P_{ki} + \sum_{j \in J} L_j (1 - DE_j) \\ + \sum_{k \in K} \sum_{E_{ki}=1}^{i \in I} \sum_{j \in J} V_{ki} T_{kij} \pi_j Q_k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{i' \in I'} MC_{kli} X_{kli} B_k \\ + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \bar{w}_j T_{kj} \\ + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I'} \sum_{i \in I} \varphi_{kil} (A - P_{ki} - C_{ki} + C_{kl} - AX_{kil}) \\ + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{t \in K} \omega_{kit} (A - P_{ki} - C_{ki} + C_{ti} - AY_{ikt}) \quad (26)$$

Amaç fonksiyonu (26) ile gösterilen $L(\varphi, \omega)$ değeri hesaplamak için φ_{kil} ve ω_{kit} parametrelerine başlangıç değerleri verilmesi gerekmektedir. Bu durumda asıl model karar değişkenlerinin tam sayılı olma durumu ortadan kaldırılarak bir gevşetilmiş çözüm elde edilir ve bu çözümdeki kısıt (17) ve kısıt (18)'e ait gölge fiyatlar ile φ_{kil} ve ω_{kit} parametrelerinin başlangıç değerleri atanır. Ardından yukarıda da tanımlanan altgradyan yöntemi aşağıdaki Şekil 1'de olduğu gibi revize edilerek problemle uyarlanır.

4. Deneysel Çalışma (Experimental Study)

Bu bölümde, önerilen algoritma ve matematiksel modelin çözüm etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla gerçek hayat verilerine sahip farklı büyüklükte (sipariş sayısı, makine sayısı, kalıp sayısı) test problemleri oluşturulmuştur. Oluşturulan test problemleri için sahadan toplanan veriler aşağıda sıralanmıştır.

- Enjeksiyon makinelerinin çalışıyor ve boşta bekliyorken birim zamanda sarf ettiği elektrik miktarları,
- Kalıp bilgileri,
- Enjeksiyon makinesi kalıp uyumluluğu bilgileri,
- Siparişler, sipariş miktarları bu siparişlerin hangi kalıplarla yapılabilir olduğu bilgileri,
- Siparişlere ait teslim tarihi, ceza maliyetleri ve diğer bilgiler.

6 test problemi oluşturulmuştur. Bu problemlerden P1 ve P2 kodlu olanlar, 20 sipariş, 5 kalıp ve 10 paralel makine içermektedir ve küçük boyutlu problem olarak adlandırılmaktadır. P3 ve P4 kodlu olanlar, 40 sipariş, 10 kalıp ve 20 paralel makine içermektedir ve orta boyutlu problem olarak adlandırılmaktadır. P5 ve P6 kodlu olanlar, 80 sipariş, 15 kalıp ve 40 paralel makine içermektedir ve büyük boyutlu problem olarak adlandırılmaktadır. Hem matematiksel model hem de önerilen algoritma ile bu problemler çözülmüş ve Tablo 2'deki amaç fonksiyonu değerleri elde edilmiştir.

Modelin ve önerilen algoritmanın kodlaması GAMS 28,2 programı ve dili ile gerçekleştirilmiştir. Çözücü olarak hem karma tam sayılı model hem de gevşetilmiş model için CPLEX kullanılmıştır. Herhangi bir ek çözücü ayarı yapılmamıştır. Var olan çözücü ayarları olan, 1000 saniye çözüm süresi, iterasyon sayısı ve optimalite boşluğu (0,1) ayarları olduğu gibi tutulmuştur. Algoritmanın diğer parametreleri ise $Imax = 50$, $\varepsilon = 0,01$, $\theta_0 = 2$ ve $K = 0$ olarak kullanılmıştır. UB için başlangıç değeri tüm siparişlerin ret edilmesi durumundaki amaç fonksiyonu değeri $\sum L_j$ olarak belirlenmiştir. Yukarıda Türk Lirası olarak ifade edilen amaç fonksiyonu değerlerine göre Lagrange gevşetme temelli algoritma matematiksel modelden daha az maliyetli çözümler sunmuştur. Matematiksel model çözüm süresi olan 1000 saniye limitine kadar CPLEX çözücü tarafından çözümlenmiş, Tablo

Lagrange Gevşetme Temelli Çözüm Algoritması (I_{max} , ε , UB , K , θ_0)

Input: I_{max} // Maximum iterasyon sayısı
Input: ε // Durdurma için eşik değeri
Input: UB // Problemin anaç fonksiyonu için geçerli bir üst sınır değeri
Input: K // İyileşme olmadan geçebilecek iterasyon sayısı
Input: θ_0 // Başlangıç teta büyüklüğü
 φ_{kil} ve ω_{kit} için başlangıç değerleri olarak asıl modelin gevşetilmiş çözümünden elde edilen Kısıt (17) ve Kısıt (18)'in gölge fiyatlarını kullan
 $u^0 := \varphi \cup \omega$ // Lagrange çarpanlarını tek bir kümede birleştir
 $counter := 0$ // İyileşme olmayan iterasyonlar için sayaç
for $j := 0$ **to** I_{max}
 u^j Lagrange çarpanları ile $L(u^j)$ problemini çöz
 $\gamma^j := g(x^j)$ // $L(u^j)$ çözümüne ait altgradyan
 $t^j := \theta_j(UB - L(u^j))/\|\gamma^j\|^2$ // Adım büyüklüğü hesapla
 $u^{j+1} := \max\{0, u^j + t^j\gamma^j\}$
 If $UB > f(L(u^j))$ **then**
 $UB := f(L(u^j))$
 $counter = 0$
 else
 $counter ++$
 end if
 if $\|u^{j+1} - u^j\| < \varepsilon$ **then**
 Display: En iyi çözüm
 Stop
 end if
 if $counter \geq K$ **then**
 $\theta_{j+1} := \theta_j/2$
 $counter = 0$
 else
 $\theta_{j+1} := \theta_j$
 end if
Next j
Display: En iyi çözüm
Stop

Şekil 1. Lagrange gevşetme temelli çözüm algoritmasının sözde kodu (The pseudo code of lagrange relaxation based solution algorithm)

Tablo 2. Deneysel sonuçları (Results of the experiment)

Sipariş Sayısı	Kalıp Sayısı	Makine Sayısı	Problem Kodu	Matematiksel Model (A)	Lagrange Gevşetme Temelli Algoritma (B)	Çözüm Süresi (A)	Çözüm Süresi (B)	Opt. Boşluğu (A)	Opt. Boşluğu (B)	Çözüm Kalitesi Farkı (%)
20	5	10	P1	102877,375 TL	85412,936 TL	1 sn	39 sn	0,079	0,0	16,98
20	5	10	P2	229615,966 TL	186264,852 TL	1000 sn	486 sn	0,247	0,0	18,88
40	10	20	P3	248898,105 TL	216399,717 TL	1000 sn	1007 sn	0,453	0,0	13,06
40	10	20	P4	153821,265 TL	143807,149 TL	1000 sn	1008 sn	0,239	0,186	6,51
80	15	40	P5	539475,510 TL	434681,516 TL	1000 sn	1006 sn	0,549	0,439	19,43
80	15	40	P6	141733,172 TL	78431,741 TL	1000 sn	1009 sn	0,496	0,097	44,66

2'deki sonuçları elde etmiştir. Lagrange gevşetme temelli algoritma ise her bir problem için 1000 saniyeden çok daha az ya da 1000 saniyeye yakın sürelerde koşturmuştur. Farklı alt maliyet türlerinden oluşan amaç fonksiyonu değerleri incelendiğinde, önerilen algoritmanın aynı deney koşullarında herhangi bir ek masrafı olmaksızın ortalama %20 daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

5. Sonuçlar (Conclusions)

Literatür araştırmasında belirtilen tüm hususların bu çalışmada sunulan matematiksel modelin kapsamında olması, çalışmanın özgün yönünü belirtir. Bu çalışma literatüre şimdiye kadar sunulmuş olan en kapsamlı paralel enjeksiyon makine çizelgeleme problemidir. Bu durum bazı modelleri zorluklarını ortaya çıkarmıştır. Örneğin, sipariş bölme oranlarının belirlenmesi, yığın işleme, yığınların işlem

süresinin hesaplanması, aynı kalıbın farklı makinelerle ilişkilendirilmesindeki sıralama, farklı kalıpların aynı makineye bağlanmasındaki sıralama, enerji verimliliğinin sağlanması için hangi kalıp ve makinenin kullanılacağı belirlenmesi gibi birçok ikili karar değişkeninin birlikte kullanılması gerektiğini ortaya koymuştur. Karar değişkenleri model kısıtlarına yerleştirilirken, matematiksel modelin sadeliğini ve takip edilebilirliğini yüksek tutulmaya çalışılmıştır. Model sadeleştirilmesi için yapılmış olan her çaba, problemin çözümüne yönelik yapılmış farklılık olarak adlandırılabilir. Nihai olarak elde edilen matematiksel model ve Lagrange gevşetme algoritması, literatür araştırmasında değinilen birçok konuyu içeren bir probleme yönelik tasarlandığı için paralel enjeksiyon makineleri çizelgeleme problemleri açısından genel bir çözüm yöntemi sunmaktadır. Gerçek hayat verilerinden türetilen test problemleriyle gerçekleştirilen deney sonuçları, Lagrange gevşetme algoritmasının

matematiksel modele göre daha az maliyetli çözümleri ek bir masraf gerektirmeden (zaman, donanım ve çözücü kullanımı) elde edebildiğini göstermektedir. İleriki çalışmalarda, önerilen model ve algoritmanın bu çalışmada ele alınan bazı hususları içeren ve başka yenilikleri de kapsayan yeni problemlere uyarlanabileceği ve kullanılabileceği düşünülmektedir. Matematiksel modele karşı başarısı bu çalışmada ispatlanan önerilen çözüm yöntemi; yığın işleme ve iş paylaşırma, enerji ve iş gücü maliyeti minimizasyonu, makine uygunluk kısıtları ve işlerin makinelere atanmasındaki karmaşık yapıyı içeren başka çözümlene problemlerine uygulanabilir.

Teşekkür (Acknowledgement)

Bu çalışma araştırmacı Doç. Dr. Oğuzhan Ahmet ARIK'ın Kayseri Nuh Naci Yazgan Üniversitesinde görevli olduğu zamanlarda 2022-F-BP-2 kodlu bilimsel araştırma projesi kapsamında kısmı olarak destek almıştır.

Kaynaklar (References)

- Ríos-Solis, Y. Á., Ibarra-Rojas, O. J., Cabo, M., Possani, E., A heuristic based on mathematical programming for a lot-sizing scheduling problem in mold-injection production, *Eur. J. Oper. Res.*, 284 (3), 861–873, 2020.
- Salimifard, K., Li, J., Mohammadi, D., Moghdani, R., A multi objective volleyball premier league algorithm for green scheduling identical parallel machines with splitting jobs, *Appl. Intell.*, 51 (7), 4143–4161, 2021.
- Akyol Ozer, E. Sarac, T., MIP models and a matheuristic algorithm for an identical parallel machine scheduling problem under multiple copies of shared resources constraints, *TOP*, 27 (1), 94–124, 2019.
- Blazewicz, J., Lenstra, J. K., Kan, A. H. G. R., Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity, *Discret. Appl. Math.*, 5 (1), 11–24, 1983.
- Song, Y., Xue, M., Hua, C., Wang, W., A Column Generation Algorithm for the Resource-Constrained Order Acceptance and Scheduling on Unrelated Parallel Machines, *Math. Probl. Eng.*, 5566002, 2021.
- Soares, L. C. R. and Carvalho, M. A. M., Application of a hybrid evolutionary algorithm to resource-constrained parallel machine scheduling with setup times, *Comput. Oper. Res.*, 139, 2022.
- Avgerinos, I., Mourtos, I., Vatikiotis, S., Zois, G., Weighted tardiness minimisation for unrelated machines with sequence-dependent and resource-constrained setups, *Int. J. Prod. Res.*, 62 (1–2), 359–379, 2024.
- Geurtsen, M., Adan, J., Akçay, A., Integrated maintenance and production scheduling for unrelated parallel machines with setup times, *Flex. Serv. Manuf. J.*, 2023.
- Şaşım, Ö. and Hasgöl, S., A mathematical model for the unrelated parallel machine scheduling problem with common server and process resource constraints, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 39 (1), 607–619, 2023.
- Jemmali, M., Ben Hmida, A., Quick dispatching-rules-based solution for the two parallel machines problem under mold constraints, *Flex. Serv. Manuf. J.*, 2023.
- Takan, A., Saraç, T., New representation schemes for identical parallel machine scheduling problems with sequence dependent setup times, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 38 (2), 1041–1054, 2023.
- Saraç, T., Tutumlu, B., A bi-objective mathematical model for an unrelated parallel machine scheduling problem with job-splitting, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 37 (4), 2293–2307, 2022.
- Saraç, T., Özçelik, F., A matheuristic algorithm for multi-objective unrelated parallel machine scheduling problem, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 38 (3), 1953–1966, 2023.
- Arık, O.A., Toksarı, M.D., Multi-objective fuzzy parallel machine scheduling problems under fuzzy job deterioration and learning effects, *Int. J. Prod. Res.*, 56 (7), 2488–2505, 2018.
- Arık, O. A., Comparisons of metaheuristic algorithms for unrelated parallel machine weighted earliness/tardiness scheduling problems, *Evol. Intell.*, 13, 415–425, 2020.
- Arık, O. A., Schutten, M., Topan, E., Weighted earliness/tardiness parallel machine scheduling problem with a common due date, *Expert Syst. Appl.*, 187, 115916, 2022.
- Fisher, M. L., Jaikumar, R., A generalized assignment heuristic for vehicle routing, *Networks*, 11 (2), 109–124, 1981.
- Edis, E. B., Araz, C., Ozkarahan, I., Lagrangian-Based Solution Approaches for a Resource-Constrained Parallel Machine Scheduling Problem with Machine Eligibility Restrictions, *New Frontiers in Applied Artificial Intelligence*, Vol 1, Editör: Nguyen, N.T., Borzemeski, L., Grzech, A., Ali, M., Springer, Berlin, Heidelberg, 337–346, 2008.
- Emami, S., Sabbagh, M., Moslehi, G., A Lagrangian relaxation algorithm for order acceptance and scheduling problem: A globalised robust optimisation approach, *Int. J. Comput. Integr. Manuf.*, 29 (5), 535–560, 2016.
- Kayish, B., Dy Cheng Beng, G., A pc-based production scheduling system using a mixed integer programming approach, *Int. J. Prod. Res.*, 32 (6), 1331–1346, 1994.
- Terano, K., Yao, Y., Okamoto, K., Hashimoto, Y., Nishikawa, I., Watanabe, T., Tokumaru, H., Application of simulated annealing method and genetic algorithm to scheduling problems in plastic injection molding, *Proc. Japan/USA Symp. Flex. Autom.*, 1225–1228, 1996.
- Tanev, I. T., Uozumi, T., Morotome, Y., Hybrid evolutionary algorithm-based real-world flexible job shop scheduling problem: Application service provider approach, *Appl. Soft Comput. J.*, 5 (1), 87–100, 2004.
- Huiyuan, R., Lili, J., Xiaoying, X., Muzhi, L., Heuristic optimization for dual-resource constrained job shop scheduling, *Proc. - 2009 Int. Asia Conf. Informatics Control. Autom. Robot. CAR 2009*, 485–488, 2009.
- Gong, G., Lu, N., Lu, J., Yang, Y., A single machine scheduling strategy for energy saving in injection molding process, *Annu. Tech. Conf. - ANTEC, Conf. Proc.*, 2209–2213, 2012.
- Wong, C. S., Chan, F. T. S., Chung, S. H., A joint production scheduling approach considering multiple resources and preventive maintenance tasks, *Int. J. Prod. Res.*, 51 (3), 883–896, 2013.
- Wong, C. S., Chan, F. T. S., Chung, S. H., Injection Mold Maintenance Scheduling with Mold-Lifting Crane Consideration, *Lect. Notes Mech. Eng.*, 7, 1117–1128, 2013.
- Paolucci, M., Anghinolfi, D., Tonelli, F., Facing energy-aware scheduling: a multi-objective extension of a scheduling support system for improving energy efficiency in a moulding industry, *Soft Comput.*, 21 (13), 3687–3698, 2017.
- Şafak, C. U., Yilmaz, G., Albey, E., A hierarchical approach for solving simultaneous lot sizing and scheduling problem with secondary resources, *IFAC-PapersOnLine*, 1931–1936, 2019.
- Ishihara, M., Hibino, H., Harada, T., Simulated annealing based simulation method for minimizing electricity cost considering production line scheduling including injection molding machines, *J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf.*, 14 (4), 2020.
- Wulung, R. B. S., Wibowo, M. D., Parallel injection molding machine scheduling by considering parameter process conservation, *AIP Conf. Proc.*, 2217 (1), 030116, 2020.
- Ayad, G. and Fahim, I. S., A Practical Scheduling Optimizer for Plastic Injection Molding Facilities, *2020 Int. Conf. Decis. Aid Sci. Appl. DASA 2020*, 943–947, 2020.
- Cervantes-Sanmiguel, K. I., Vargas-Flores, M. J., Ibarra-Rojas, O. J., A two-stage sequential approach for scheduling with lot-sizing decisions in the context of plastic injection systems, *Comput. Ind. Eng.*, 151, 2021.
- Aslaner, A. A., Coşkun, A., Tülemiş, N. İ., Özbayocı, E., Ergün, N., Bulut, B., Gülbent, G., Paldrak, M., Staiou, E., A Parallel Machine Scheduling Problem for a Plastic Injection Company, *ISPR 2020: Digital Conversion on the Way to Industry 4.0*, Editors: Durakbasa, N.M., Gençyılmaz, M.G., Springer, Cham, 790-903, 2021.
- Andres, B., Guzman, E., Poler, R., A Novel MILP Model for the Production, Lot Sizing, and Scheduling of Automotive Plastic Components on Parallel Flexible Injection Machines with Setup Common Operators, *Complexity*, 6667516, 2021.

35. Ozcelik, F., Ertem, M., Saraç, T., A stochastic approach for the single-machine scheduling problem to minimize total expected cost with client-dependent tardiness costs, *Eng. Optim.*, 54 (7), 1178–1192, 2022.
36. Sadeghi, P., Guardão, L., Rebelo, R. D., Ferreira, J. S., Scheduling footwear moulding injection machines for a long time horizon, *Proc. Int. Conf. Ind. Eng. Oper. Manag.*, 5281–5292, 2021.
37. Ghaleb, M., Namoura, H. A., Taghipour, S., Reinforcement Learning-based Real-time Scheduling under Random Machine Breakdowns and Other Disturbances: A Case Study, *Proc.-Annu. Reliab. Maintainab. Symp.*, Orlando, FL, USA, 1-8, 2021.
38. Klement, N., Abdeljaouad, M. A., Porto, L., Silva, C., Lot-sizing and scheduling for the plastic injection molding industry-A hybrid optimization approach, *Appl. Sci.*, 11 (3), 1–13, 2021.
39. Sarac, T., Sipahioglu, A., Ozer, E. A., A Two-stage solution approach for plastic injection machines scheduling problem, *J. Ind. Manag. Optim.*, 17 (3), 1289–1314, 2021.
40. Mula, J., Díaz-Madroñero, M., Andres, B., Poler, R., Sanchis, R., A capacitated lot-sizing model with sequence-dependent setups, parallel machines and bi-part injection moulding, *Appl. Math. Model.*, 100, 805–820, 2021.
41. Bazargan-Lari, M. R., Taghipour, S., Zaretalab, A., Sharifi, M., Production scheduling optimization for parallel machines subject to physical distancing due to COVID-19 pandemic, *Oper. Manag. Res.*, 15 (1–2), 503–527, 2022.
42. Fisher, M. L., Applications oriented guide to lagrangian relaxation., *Interfaces (Providence)*, 15 (2), 10–21, 1985.
43. Held, M., Wolfe, P., Crowder, H. P., Validation of subgradient optimization, *Math. Program.*, 6 (1), 62–88, 1974.