

## Analysis of Middle School Mathematics Teachers' Evaluations of Skill-Based Questions within the Framework of Mathematical Competencies\*

Çiğdem Bozkuş<sup>a</sup>  Meriç Özgeldi<sup>b</sup> 

<sup>a</sup> Teacher, Ministry of National Education, Adana, Türkiye, [bozkuscigdem@gmail.com](mailto:bozkuscigdem@gmail.com)

<sup>b</sup> Assoc. Prof. Dr., Mersin University, Mersin, Türkiye, [mericozgeldi@mersin.edu.tr](mailto:mericozgeldi@mersin.edu.tr)

### ABSTRACT

The purpose of this study is to examine the solution methods developed by middle school mathematics teachers for skill-based mathematics questions and their evaluations within the framework of mathematical competencies. Mathematical competency demands are defined as communication, devising strategy, mathematizing, representation, using symbols, operations and formal language, and reasoning and argument. Thirteen middle school mathematics teachers (7 female, 6 male) participated voluntarily in the study. They were asked to solve twelve skill-based questions, followed by the examination of their solutions, and then semi-structured interviews were conducted with each of them. During the interviews, the teachers were presented with semi-structured questions, and their evaluations were examined within the scope of mathematical competencies. The study results indicated that teachers apply different solutions in solving the questions and that mathematical competencies emerge at different levels within these solutions. Considering the determined levels of solutions, other competencies, except for communication competency, appeared to be at similar levels based on teachers' evaluations. The competency of using symbols, operations, and formal language stood out as an essential factor in selecting among strategies. It was found that teachers could create appropriate models according to the level of demand for mathematizing competency, yet they did not evaluate the structural relationships between variables within the scope of mathematizing competency. Regarding representation competency, the most striking point was that the majority of teachers identified and used visual information. However, only a few teachers were successful in manipulating representations in a solution-appropriate manner. It was also discovered that as the demand level increases in using symbols, operations, and formal language competency, the increase in the number, type, and procedures of operations used is not always correct with these solution methods. Teachers could not identify the mathematical deductions utilized in the solution process. The majority addressed them at a lower demand level in their evaluations.

**Article Type**  
Research

**Article Background**  
Received:  
24.01.2024  
Accepted:  
26.02.2024

**Keywords**  
Mathematical  
Competency, Skill-  
Based Questions,  
Mathematics  
Teacher

**To cite this article:** Bozkuş, Ç. & Özgeldi, M. (2024). Analysis of middle school mathematics teachers' evaluations of skill-based questions within the framework of mathematical competencies. *International Journal of Turkish Educational Sciences*, 12(1), 535-583. <https://doi.org/10.46778/goputeb.1425323>

**Corresponding Author:** Meriç Özgeldi, e-mail: [mericozgeldi@mersin.edu.tr](mailto:mericozgeldi@mersin.edu.tr)

\* The study is derived from the unpublished master's thesis of the first author, Çiğdem Bozkuş.

## Introduction

Being competent in a field requires mastery of its fundamental aspects (Niss, 2003). While traditional teaching approaches focus on developing individuals knowledgeable in content, today, there is a growing importance placed on cultivating individuals who can apply and adapt content knowledge. Mathematical competency encompasses both content knowledge and cognitive domains, expressing domain-specific cognitive areas (Harks, 2014). Moreover, mathematical competency cannot exist without mathematical content, nor can it be reduced to the specifics of mathematical content (Niss & Højgaard, 2019). In this context, mathematical competency encompasses the processes essential for the application of mathematical knowledge (Turner et al., 2015). In recent years, there has been an increasing understanding of the role of these processes and their integration into mathematics lessons, highlighting the importance of fostering individuals with mathematical competencies.

Frameworks of mathematical competency address the cognitive complexity of mathematical actions in the face of challenges as various dimensions of demands for mathematical competencies (Turner, 2012). Niss (2003) expressed mathematical competency as the ability to understand, reason, apply, and utilize mathematics in mathematical and non-mathematical contexts, addressing the demand for mathematical competency necessary for mastering mathematics within the Danish PISA project (Danish: Competencies and Mathematics Learning). This framework has influenced mathematics curricula and assessment criteria in many European countries such as Denmark, Germany, Catalonia, Sweden, and Norway (Pettersen & Nortvedt, 2018). Therefore, it has become crucial for students to engage with tasks rich in mathematical competencies and for teachers to accurately assess the competency demands of tasks (Pettersen & Nortvedt, 2018). To be beneficial in mathematics education, activities focusing on students' progress in their knowledge and actions related to mathematical competencies have emerged (Ahl & Helenius, 2023).

Turner and Adams (2012) expanded Niss's (2003) framework of mathematical competencies, redefining the demands for mathematical competencies and creating a framework consisting of four levels for each competency. In this framework, the demands for mathematical competencies are: 1. Communication, 2. Devising Strategy, 3. Mathematizing, 4. Representation, 5. Using symbols, operations, and formal language (Symbols and formalism), 6. Reasoning and Argument. In the developed framework, each demand for mathematical competency includes two low and two high levels, along with corresponding actions. This theoretical framework has been utilized to determine the item difficulties of questions in the Programme for International Student Assessment (PISA). As a result of the study, actions specifying the definitions and levels of demands for mathematical competencies have been organized in more detail (Turner et al., 2015).

Mathematical competency frameworks approach the goal of mathematics education as the development of competencies to use knowledge and skills when needed rather than merely repeating well-studied procedures (Kilpatrick, 2014). Niss (2003) stated that mathematical competencies could be used in three different ways: (i) to determine the outcomes of school mathematics, (ii) to characterize mathematics teaching and learning, and (iii) to monitor and control what students learn or what teachers teach. Therefore, the aim of mathematics education is to enhance students' levels of mathematical competencies, and in line with this goal, it is crucial for teachers to be able to assess the mathematical tasks used in terms of competencies (Pettersen & Nortvedt, 2018). Turner et al. (2015) suggested that mathematical competencies should be formally incorporated into mathematics teaching, and the framework they developed could be used by

teachers to select, design, or evaluate appropriate teaching tasks. Shimizu et al. (2010) also emphasized that tasks selected for teaching and assessment should reveal, nourish, and develop students' performances. In this respect, teachers must be able to analyze tasks or questions used during instruction or assessment in terms of both content and cognitive demands.

In line with the 2015 PISA results for Turkey and the OECD Turkey report, the Ministry of National Education (MoNE) abolished the Transition from Primary to Secondary Education Exam (TEOG) that 8th-grade students took and started to implement the High School Entrance Exam (LGS) (MoNE, 2018). The question structure in LGS was changed to skill-based questions in order to prepare students more effectively for international exams (Erden, 2020). Altun (2020) pointed out that these questions, skill-based or new generation in everyday language, are questions related to mathematical literacy. Accordingly, examples of skill-based questions prepared to fit the changed examination system have been regularly published, and resource books called Skill-Based Tests and LGS Workbooks, consisting of these questions, have been provided to students in state schools affiliated with the MoNE for the academic years 2020-2021, 2021-2022, and 2022-2023 (MoNE, 2022).

The MoNE stated in the mathematics curriculum that one of the objectives of the mathematics course is to 'develop and effectively use mathematical literacy skills' (MoNE, 2018). Since mathematical literacy is defined based on the mathematical competencies identified by Niss (2003), instructional activities targeting mathematical competencies have gained importance for developing mathematical literacy skills. However, it has been observed that activities aimed at developing all mathematical competencies are not typically carried out in mathematics classes (Charalambous & Philippou, 2010). Petterson (2019) stated that teachers involved in instructional activities at all levels of education need to be aware of mathematical competencies and plan and implement classroom activities to encourage the development of these competencies.

The aim of this study is to examine the solution methods developed by middle school mathematics teachers for skill-based mathematics questions and their evaluations within the framework of mathematical competencies. It is believed that this study will contribute to the literature examining the mathematical competency demands of teachers in the context of the changing mathematics curriculum and the significance of mathematical literacy and skill-based questions emphasized by the High School Entrance Exam (LGS) in Turkey in 2018. The ability of mathematics teachers to evaluate exam questions in terms of mathematical competency demands is vital for internalizing the changing goals of the mathematics curriculum and reflecting them in lessons. The research question is as follows:

What is the level of mathematical competency in the evaluations made by middle school mathematics teachers within the scope of skill-based mathematics question solutions?

## **Conceptual Framework and Related Studies**

### **Mathematical Competency**

Although defining mathematical competency is not straightforward, researchers have pointed out several characteristics regarding its definition. Generally, mathematical competency is defined as "someone's insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations" (Niss & Højgaard, 2019, p.12). It involves individuals possessing specific mathematical

skills and the degree to which they can mobilize these skills when necessary (Turner et al., 2015). What is more, it is directed towards both physical and mental actions and relies on various processes, such as understanding mathematical ideas and applying mathematical knowledge (Niss & Højgaard, 2019; Turner & Adams, 2012).

The application of mathematics and the implementation of mathematical processes focus on mathematical competency, which is in harmony with mathematical literacy (Niss & Højgaard, 2019). In the mathematical component of PISA, the mathematical literacy of 15-year-old students in participating countries is examined comparatively (OECD, 2019). The primary aim of PISA is to measure students' ability to use the knowledge they acquire at school in everyday life. In this regard, mathematical literacy is individuals' capacity to use, formulate, and interpret mathematics. Within the context of mathematical literacy, eight fundamental processes are identified, formulated using the mathematical competencies defined by Niss (2003) (Niss, 2015). These mathematical competency demands are interpreted as mathematical thinking, creating and solving mathematical problems, modeling mathematically, reasoning mathematically, representing, using formal, technical language and procedures, communicating in mathematics, about mathematics, and with mathematics, and using mathematical tools. Turner and Adams (2012) redefined mathematical competencies based on the ones defined by Niss (2003) and developed a framework in which they address the demands for activation of these competencies at four levels. This mathematical competency framework aims not only to determine the difficulties of mathematical questions and tasks but also to enable direct enhancement of these competencies in mathematics classes (Turner & Adams, 2012).

The framework developed by Turner et al. (2015) to define the levels of mathematical competency demands, while recognizing that the actions used in the problem-solving process are interrelated processes, was prepared with a focus on as much differentiation and determination of demand levels as possible, making it suitable for use by teachers and test developers. It can be said that it is suitable for use by teachers and test developers. Mathematical competencies must be formally included in mathematics education, and, as a result, conscious efforts need to be made to develop them. It is important for mathematics teachers to be familiar with the mathematical competencies defined and to create learning opportunities for each to be developed to enhance mathematical literacy (Turner et al., 2015).

Within the framework of mathematical competencies, the competencies of communication, devising strategy, mathematising, representation, using symbols, operations and formal language, reasoning, and argument are included, along with their levels (level 0, level 1, level 2, level 3). Turner et al. (2015) have aimed to create level definitions based on solid foundations and useful factors that address aspects of the cognitive requirements needed to solve problems, along with the definitions of mathematical competencies. In this regard, for each competency, Level 0 and Level 1 correspond to situations where the demand for the respective mathematical competency is low. In contrast, Level 2 and Level 3 are elaborated for situations where the demand is high. The levels for each mathematical competency are shown in Appendix A.

### *Communication Competency*

Communication competency refers to reading and interpreting presented statements, questions, instructions, tasks, images, and objects, as well as imagining, understanding, and comprehending the presented situation, including mathematical terms referenced (Turner et al., 2015). It can be evaluated as understanding and interpreting information related to the problem situation. The

necessity to establish connections between pieces of information or to refer back within the material to understand the presented information increases the demand for communication competency, with the solution presentation involving multiple steps and justifications (Turner & Adams, 2012).

### *Devising Strategy Competency*

Strategy is considered the selection of actions to approach a problem situation to solve a problem (Turner & Adams, 2012). A strategy may consist of multiple interconnected steps. However, the physical execution of the solution process is not considered within the scope of devising strategy competency (Turner et al., 2015). The level of demand for devising strategy competency increases with the degree of creativity and innovation used in determining the strategy, as well as the number of steps used in the solution process and the complexity of the relationships between the steps (Turner & Adams, 2012). Devising a strategy involves selecting or designing a mathematical strategy to solve a problem and also monitoring and controlling the implementation of the strategy.

### *Mathematising Competency*

Mathematising refers to converting a situation outside of mathematics into a form suitable for mathematical processing or interpreting a mathematical model appropriately for a given situation (Turner & Adams, 2012). While mathematising deals with the mathematical representation of non-mathematical situations, representation competency concerns the representation of mathematical expressions as either mathematical or non-mathematical (Turner et al., 2015). The demand for mathematising competency increases depending on the knowledge, creativity, and insight required to translate between the specified mathematical contexts and mathematical structures in the problem situation (Turner & Adams, 2012). Mathematising involves converting a non-mathematical situation into a mathematical model, interpreting the results of using a model related to the problem situation or validating the adequacy of the model regarding the problem situation (Turner et al., 2015).

### *Representation Competency*

Representation can be understood as the concrete expression of a mathematical entity (Turner & Adams, 2012). Representation can be graphical, diagrammatic, verbal, symbolic, or metaphorical. However, in some problems, simple text diagrams such as figures that directly depict the problem situation, like photographs, do not necessarily activate representation competency. The demand for representation competency increases depending on the complexity of representations, the need to evaluate information from different representations, or the need to design representations (Turner et al., 2015). Representation competency involves decoding the codes of mathematical representations in the search for solutions, translating between them, and utilizing them, as well as selecting or designing appropriate representations to capture the situation or present their work (Turner et al., 2015).

### *Using Symbols, Operations, and Formal Language Competency*

The competency of using symbols, operations, and formal language involves proficient use of mathematical content knowledge, symbols, operations, and formal language (Turner & Adams, 2012). Understanding, remembering, using, and modifying necessary information are deemed important in this process. The demand for symbols, operations, and formal language increases with the complexity of mathematical content knowledge and the procedures that need to be applied. This competency involves understanding and applying mathematical procedures and language



(including symbolic expressions, arithmetic, and algebraic operations) and activating and using knowledge related to definitions, results, rules, and formal systems (Turner et al., 2015).

### *Reasoning and Argument Competency*

Reasoning and argument competency involves explaining, justifying, and validating the deductions made during the solution process, along with the internal and mental processing of information used (Turner & Adams, 2012). These actions entail describing, proving, and verifying the mental processes utilized while deducing and applying steps in the solution process of a problem. However, the mental processes activated to determine the solution steps are addressed in the competency of devising strategy. The demand for reasoning and argumentation development competency increases with the length and complexity of the inference chain used (Turner & Adams, 2012). Argumentation is making inferences using logically rooted thought processes that explore and connect problem elements, forming, examining, or verifying arguments and conclusions (Turner et al., 2015).

### **Related Studies**

Niss et al. (2016) emphasized the importance of the usability of mathematical competency frameworks for research, advocating for well-defined competencies and well-thought-out research designs. In this context, the mathematical competency framework developed by Turner et al. (2015) stands out. This theoretical framework is used in research analyzing mathematics questions, examining both the difficulty of the questions and the mastery of mathematical competencies by groups of analyzing teachers. For instance, Pettersen and Nortvedt (2018) requested five teachers and five teacher candidates to evaluate PISA 2012 mathematics questions using Turner et al.'s (2015) mathematical competency framework. The study found that teachers' evaluations were consistent, but they used a limited range of levels in their assessments. Accordingly, it was suggested that Turner et al.'s (2015) framework delineating mathematical competency demands and levels could be beneficial for teachers to select and analyze appropriate tasks (Pettersen & Nortvedt, 2018). Similarly, Pettersen and Braeken (2019) conducted scoring of the PISA 2012 mathematics survey and Norwegian national exam mathematics questions by mathematics teachers using Turner et al.'s (2015) mathematical competency framework. According to this study, it is believed that training teachers on mathematical competency demands and levels could be effective.

Teachers encouraging the development of students' mathematical competencies is becoming increasingly important in mathematics education (Niss et al., 2016). In this regard, it is necessary for changes made in mathematics programs and curricula to be understood by teachers and for them to be supported in identifying and designing lesson activities and tasks that promote mathematical competencies (Turner et al., 2015). Petterson (2019) has shown that teachers have limited knowledge about the demands of mathematical competencies and emphasized the importance of teachers' ability to analyze these competencies. However, teachers aware of the demands of mathematical competencies have expressed their ability to support students' mathematical development by integrating these into classroom tasks. In this context, it has been emphasized that teachers need to evaluate the mathematical competencies that need to be activated in tasks using mathematical competency analysis schemas and that they should be supported and encouraged through in-service training on this matter.

There are several studies investigating how teachers address the curriculum requirements, what they pay attention to, and how these can be reflected in tests developed by teachers. Among these,

Boesen (2006), in his study examining mathematical competencies, based his research on national exam questions and asked participating teachers to create creative problem-solving tasks and tests. Boesen found that teacher-made tests contained tasks aimed at solving strategies that did not necessarily activate all mathematical competencies, and the impact of the mathematical competencies underlying national exams on teachers' test development was limited. However, it was also noted that mathematical competencies are useful tools for analyzing scientific research data and evaluating or developing tests. Similarly, Becevic (2023) provided a theoretical perspective on teacher-made test applications to assess the development goals of mathematical competencies in the mathematics curriculum. The increase in teachers' awareness of mathematical competencies and its reflection in classroom practices is considered an important finding.

Mathematical competencies can be addressed collectively in studies, but research focusing on the development of one or a few competencies can also be conducted (Niss et al., 2016). In this context, Højgaard (2021) addressed the competency of mathematizing and discussed the differences and relationships between problem-solving and mathematization. In his study, Højgaard (2021) emphasized the importance of tasks used to develop students' mathematizing competency. He noted that a task should go beyond the routine strategies, methods, and procedures for those performing the task and should present mathematical challenges for those engaging with it. In this regard, it can be said that designing and selecting mathematical tasks in line with the demands of the desired mathematical competencies is essential.

In the literature, there are studies evaluating questions, textbooks, and curricula following the changes in the mathematics curriculum in Turkey in 2018 and the introduction of skill-based questions in the LGS mathematics test. Among these, Küçükgençay et al. (2020) analyzed the questions used in the LGS and the sample questions published by MoNE in the context of problem-solving skills in PISA 2012. The study concluded that skill-based questions aimed to measure multiple competencies and involved processes such as planning and implementation, exploration and understanding, representation and formulation, control, and reflection. Yüceer (2023), in his study analyzing LGS mathematics questions according to the mathematics curriculum and the TIMSS framework, indicated that the questions did not show a balanced distribution according to the mathematics curriculum. Moreover, analyses based on TIMSS competency levels revealed that there were no questions directed towards lower competency levels, a few questions at the intermediate level, and the majority of questions at the upper or advanced level. Similarly, Arı (2022) compared mathematics textbooks with LGS mathematics questions and found that the questions and activities in textbooks did not contribute to higher-order thinking skills, whereas LGS mathematics questions required higher-order thinking skills. These studies have shown that the questions in the LGS mathematics test require higher-level mathematical skills. However, no study has addressed LGS mathematics questions in the context of mathematical competencies.

In their study, Kertil et al. (2021) conducted interviews with middle school mathematics teachers to examine their thoughts on skill-based questions and how they implemented them in their classes. While the teachers expressed positive views on skill-based questions, they generally stated that they included such questions in their classes once a week. Additionally, they mentioned that the activities and questions in MoNE textbooks were inadequate and that they needed training to develop their skills in writing skill-based questions and solving problems. In a study by Çetin (2019) focusing on LGS mathematics questions, teachers expressed the need for self-improvement and renewal and felt pressured by LGS results. On the other hand, Çetin and Ünsal (2019) examined the effects of LGS on mathematics teachers and the reflections on implementing the mathematics curriculum. The study

found that centralized exams positively influenced teachers' professional development. However, it was noted that teachers did not address all dimensions of the curriculum when implementing it; instead, they focused on LGS success and determined their goals and content accordingly. They also conducted assessment activities using multiple-choice exams and emphasized lecturing and test-solving activities in their classes. Similarly, Şen and Ünal (2020) evaluated the changes in the mathematics curriculum in 2018 and found that the teachers perceived these changes as a decrease or displacement of achievements. These studies conducted in Turkey highlight differences between the curriculum, textbooks, and skill-based questions. Mathematics teachers emphasize the necessity of in-service training for implementing the curriculum and selecting, writing, and implementing skill-based questions in their classes. In this context, there have been no studies specifically addressing Turner et al.'s (2015) mathematical framework. However, it is believed that teachers could analyze mathematical tasks and consequently organize their in-class activities if such a study were conducted.

In this context, it can be stated that there is a need for further research on mathematical competencies in terms of their impact on mathematics programs and curriculum documents, the selection of mathematical questions and tasks based on their difficulties and appropriateness, and the determination of mathematical competency levels individually and in groups (Niss et al., 2016). It can be said that a conscious approach of teachers to mathematical competencies is an important factor in achieving the goal of enhancing students' mathematical competencies with the revised mathematics curriculum in Turkey in 2018 and in improving success in the LGS mathematics test.

## Method

This study employs a case study approach, which is a qualitative research method in which researchers examine real-life situations in-depth using multiple sources of information within a limited system or process (Creswell, 2017). In this context, the solutions of middle school mathematics teachers to LGS mathematics questions were examined in terms of mathematical competency levels, and the evaluations made by the teachers regarding the solutions were analyzed.

### Participants

Thirteen (7 Female, 6 Male) middle school mathematics teachers, consisting of 11 teachers from state schools and 2 teachers from private schools affiliated with the Ministry of National Education (MoNE), voluntarily participated in the study. All participants taught 8th-grade mathematics classes. Participants expressed familiarity with specific question types and their solution methods by solving previous years' LGS questions in their mathematics classes. Pseudonyms such as K1, K2, and K13 were alphabetically assigned to the participants. They were briefly informed about the research process and purpose and declared their voluntary participation in the study. Ethical approval for this study was obtained from the Mersin University Social and Human Sciences Ethics Committee on 06/06/2022, decision number 239.

### Data Collection Process

The data for the study were collected during the second semester of the 2021-2022 academic year. In the first stage of the data collection process, participants were invited to provide detailed solutions to the 2020 LGS questions included in the Question Form (see Appendix B) prepared by the



researchers. These questions were selected from six units of the 8th-grade mathematics curriculum, with two questions chosen from each unit. A total of 12 questions were sent to the participants online by the researchers, and the participants returned their solutions to the researchers online as well. The solution processes for the questions were conducted separately for each participant, and there was no time limit for the solution process.

In the second stage, semi-structured interviews were conducted with the participants considering their solutions. They were conducted online with each participant within three to seven days. The duration of the interviews varied between 40 minutes to 1 hour and 30 minutes. Ten-minute breaks were provided upon the request of the participants during the interviews. With participants' permission, audio recordings and field notes were taken during the interviews. The audio recordings were transcribed into text using the Microsoft Word program to create interview protocols. The interview questions were designed to determine the teachers' evaluations of mathematical competencies. For this purpose, six questions were asked in accordance with the definitions of mathematical competencies by Turner et al. (2015). These questions are as follows:

1. Could you evaluate the questions in terms of reading and interpreting the statements, instructions, tasks, images, and objects in the text?
2. Could you evaluate the process of determining or designing the steps to solve the questions and observing the implementation of these steps?
3. Could you evaluate the questions in terms of expressing non-mathematical situations mathematically (modeling) and the use of the relevant model or models?
4. Could you evaluate the mathematical representations provided in the solution process (decoding the code), translating between representations, and using them to guide the solution process?
5. Could you evaluate the use of mathematical language (symbolic language and arithmetic-algebraic operations) in the solution process?
6. Could you evaluate the logical deductions made during the solution process?

Additionally, participants who indicated their choice of strategy based on the use of different solution methods were asked questions about the factors influencing their strategy selection, the factors influencing their choices when applying procedures in using symbols, operations, and formal language competency, and whether they included these procedures in their lessons when using non-curricular operational procedures, and questions about the reasons for their choices.

### **Data Analysis**

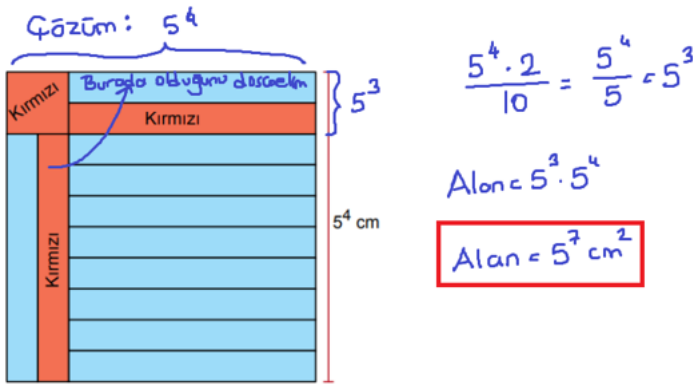
The data for this research were obtained from the solutions provided by the participants to the questions in the questionnaire and the interviews conducted with the participants. Initially, the solution methods of the 13 participants were grouped according to their similarities, and these methods were analyzed according to the levels of mathematical competency (see Appendix A). When determining the solution methods used, the cases of employing one or more of the competencies such as devising strategy, mathematizing, representation, using symbols, operations and formal language, or reasoning and argument in a different way were considered. Out of the 12 questions in the questionnaire, six were selected, one from each unit, based on the solutions applied

by the participants, and these six questions were examined within the scope of the study.

After examining the solutions, the interviews conducted with the participants were organized for each participant using the Microsoft Word program. In this context, content analysis was performed on the participants' statements. For each question, the participants' statements were examined according to the levels established by Özgeldi and Aydın (2021). For example, the analysis of one of the solution methods applied for Question 2 in terms of the competency of devising strategy is as follows:

Figure 1

Example of a Solution for the Second Question



The information indicating that the rectangles in the solution method were equal within the figure was used, with one of the red rectangles being relocated. Utilizing the relationships between the lengths of the sides in the resultant figure, the ratio of the desired area to the area of the square within the figure has been ascertained. Subsequently, it was envisaged that the area of the square within the figure should be calculated, followed by a division operation employing the obtained ratio to find the area of the desired region. Upon evaluation in accordance with the levels of the developed strategy, it was determined that the devising strategy competency was at level 3, considering the design of a multi-stage strategy involving significant metacognitive thinking in applying the strategy for the solution.

As an example of the analysis of participants' expressions in line with the demands of mathematical competency, the statements of participant K10, who employed the same solution method for the same question, were provided during the interviews:

This is a question with a high-level strategy. If you do not grasp that strategy, the solution becomes significantly more challenging. What complicates that strategy is shifting the area, that is, relocating the rectangle. Once relocated, it is merely a matter of two steps to find the entire area using the ratio. Without relocating the rectangle, it becomes exceedingly difficult for the person to figure it out.

In this statement, it can be observed that K10 not only explains the steps of his solution method but also indicates the utilization of metacognitive processes. Therefore, it can be stated that while the problem could be approached with an alternative solution method, the method employed effectively engages with K10's devising strategy competency, enabling him to articulate his statements at Level 3.

## Findings

In this section, middle school mathematics teachers' solution methods and their evaluations within the scope of these solutions have been examined according to the levels of mathematical competency. Table 1 illustrates the levels of mathematical competency for six problems in relation to teachers' solution methods. The shaded cells in Table 1 indicate the levels determined by the researchers, while the numbers within the cells denote the number of teachers. Additionally, after the overall evaluation of the six problems, the solutions provided by the teachers and their evaluations during the interviews for one specific problem have been thoroughly discussed in this section.

Table 1

*Frequency of Teachers Evaluating the Mathematical Competency Levels of Problems within the Scope of Solution Methods*

	Level	CC	SC	MC	RC	US	RA
1st Question 1st Method	0	1	-	-	-	-	5
	1	3	-	5	-	5	-
	2	1	1	-	5	-	-
	3	-	4	-	-	-	-
1st Question 2nd Method	0	1	-	-	1	-	5
	1	3	-	-	4	1	-
	2	-	5	5	-	4	-
	3	-	-	-	-	-	-
1st Question 3rd Method	0	1	-	-	-	-	3
	1	1	-	-	3	-	-
	2	1	3	3	-	-	-
	3	-	-	-	-	3	-
2nd Question 1st Method	0	1	1	1	-	-	4
	1	1	-	-	-	-	-
	2	2	-	-	4	-	-
	3	-	3	3	-	4	-
2nd Question 2nd Method	0	1	1	-	-	-	5
	1	2	-	1	-	-	-
	2	2	4	1	5	5	-
	3	-	-	3	-	-	-
2nd Question 3rd Method	0	-	-	-	-	-	4
	1	2	-	-	-	-	-
	2	1	-	-	4	-	-
	3	-	4	4	-	4	-
3rd Question 1st Method	0	4	2	1	7	3	13
	1	6	-	8	6	6	-
	2	3	11	4	-	4	-
	3	-	-	-	-	-	-
4th Question	0	3	-	-	-	-	3

1st Method							
	1	3	-	-	3	-	5
	2	-	9	1	2	9	1
	3	<b>3</b>	-	8	<b>4</b>	-	-
4th Question							
2nd Method	0	-	-	-	-	-	-
	1	-	-	-	-	-	2
	2	1	<b>2</b>	-	2	1	-
	3	<b>1</b>	-	<b>2</b>	-	<b>1</b>	-
4th Question							
3rd Method	0	-	-	-	-	-	1
	1	1	-	-	-	-	-
	2	-	<b>2</b>	2	1	-	1
	3	<b>1</b>	-	-	1	2	-
5th Question							
1st Method	0	-	-	1	<b>6</b>	<b>6</b>	-
	1	2	1	<b>5</b>	-	-	-
	2	<b>4</b>	<b>5</b>	-	-	-	<b>6</b>
	3	-	-	-	-	-	-
5th Question							
2nd Method	0	-	1	-	<b>7</b>	<b>7</b>	2
	1	1	3	<b>7</b>	-	-	2
	2	<b>5</b>	<b>3</b>	-	-	-	<b>3</b>
	3	1	-	-	-	-	-
6th Question							
1st Method	0	3	1	1	<b>12</b>	3	-
	1	5	-	2	-	6	9
	2	3	6	<b>9</b>	-	<b>3</b>	<b>3</b>
	3	<b>1</b>	<b>5</b>	-	-	-	-
6th Question							
2nd Method	0	-	1	1	<b>1</b>	1	1
	1	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-
	3	<b>1</b>	-	-	-	-	-

Note: CC: Communication Competency, SC: Devising Strategy Competency, MC: Mathematising Competency, RC: Representation Competency, US: Using Symbolic Language and Formal Language Competency, RA: Reasoning and Argument Competency

According to Table 1, it is observed that teachers applied different solution methods, leading to the emergence of mathematical competencies at different levels within these solutions. Teachers devised more than one solution method in five out of six questions. Teachers developed three different distinct solution methods for the 1st, 2nd, and 3rd questions. Generally, considering the determined levels of solutions, except for communication competency, the levels of other competencies are similar based on teachers' evaluations. It was discovered that teachers generally approached the questions at a lower level in terms of communication competency compared to all other competencies. As seen in Table 1, the communication competency of the six LGS math questions determined by the researchers (highlighted in bold) was at a high level (level 2 or 3). Considering that teachers did not encounter difficulties in solving the questions, it can be inferred that the constructive component of communication competency remained at a lower level in meeting the demand level based on the expressions they employed in their evaluations. Teachers frequently expressed in their evaluations that the questions were easy, clear, and straightforward.

The level of the questions was determined to be high for the competency of devising strategy (level 2 or 3). As shown in Table 1, these levels corresponded closely to the levels that emerged in the evaluations of teachers' devising strategy competency. However, it was observed that participants who evaluated the devising strategy competency at a low level approached the questions more superficially. Furthermore, during discussions, they expressed dissatisfaction with the purpose of the questions, stating that they were easy or did not adequately measure the unit achievements. Additionally, these teachers utilized mathematical operations and procedures such as systems of equations with two unknowns and algebraic expressions, as well as division operations in the solutions to the questions, which were unsuitable for the level of 8th-grade students.

The levels of the questions for mathematising competency were predominantly determined to be high. As depicted in Table 1, teachers' evaluations regarding mathematising competency were also at a high level. However, it was observed that some teachers perceive mathematising competency at a lower level. While these teachers acknowledge 'the given or defined variable' within the scope of mathematising competency, they do not consider 'expressing dependent variables in terms of independent variables or interpreting models for different variables' within the scope of mathematising competency.

For the representation competency, the levels of the 1st, 2nd, and 4th questions were high. For example, in the 1st question, the alterations made to the representation were crucial in interpreting the levels of competency in strategy, mathematical modeling, and symbols, operations, and the use of formal language. In this question, teachers adjusted their strategies based on the changes made to the representation. Therefore, the interpretation of the competency in using strategies also changed depending on the interpretation of the representation in the question. In the 4th question, since it required evaluating information from two different graphs concurrently, the level of representation competency was high. In this question as well, as teachers incorporate two variables in the solution process, the interpretation of competency in using symbols, operations, and formal language also changed. The fact that teachers delved into a topic not typically covered at the 8th-grade level in solving this question was considered a noteworthy finding.

For the competency in using symbols, operations, and formal language, the levels of the questions and the evaluations by the teachers were high. For example, in the 2nd question, participants mentioned that they noticed the common factor, which is an algebraic expression, before applying the steps of the solution process. They aimed to reduce the operational burden by performing the entire operational process within the common factor parentheses. It was observed that as the demand level increases in the competency of using symbols, operations, and formal language, the increase in the number, type, and procedures of operations used is not always necessary with these solution methods.

For the competency in reasoning and argument, except for questions 5 and 6, the questions' levels were low. In the solution process of low-level questions, no inference was made or direct inferences were made from the given information. It was observed that three teachers could not identify the mathematical inferences made during the solution process, and the majority handled them at a lower demand level in their evaluations. In these evaluations, it was uncovered that teachers who assign values within the given constraints rather than verbally expressing the inferences made in the solution process and showing evidence do not consider the inferences and evidence as part of the competency in reasoning and argument. For example, while some teachers evaluated the 6th question as 'a question with an unspecified purpose', others stated that it 'requires mathematical





the same thing, and increases and decreases can also vary.

### *Devising Strategy Competency*

In Figure 1, the first solution method required evaluating among strategies, hence the devising strategy competency was determined as Level 3; while the second and third solution methods directly necessitated developing multi-step strategies, thus they were classified as Level 2. K6, who used the first solution method, stated the following for solving the problem:

Now, since they did not provide any actual values, there is not a real numerical value. So, directly, the first thing that comes to mind is to give a certain ratio in one of the two graphs, you need to give a factor. They are doing this very nicely, actually. So, let us say the first step is this: in the first part, if they give factors like mine, 3 times, 4 times, 5 times, for instance, this would be the first step. Then, they need to take this to L and see the excess of 25 and the surplus of 40, which would be the second step. They need to see that M is twice the size of L there, which would be the third step. If they achieve these three steps, they also need to take the value they found back to the first graph.

In their comment, K6 utilized a multi-step strategy. In this strategy, controlled operations involve writing down the ratios corresponding to the sector slices in the first graph and planning to transition to the other graph using increases and decreases. Using the ratio between the given slices in the second graph requires employing the same strategy again. Throughout all these operations, the aim was to find the ratio constant defined as a variable in the first graph.

### *Mathematising Competency*

Since all three solution methods involved defining variables, creating mathematical models including constraints, and connecting different models to form equations, they required activating level 3 mathematising competency. K7 mentioned the importance of recognizing the relationship between angles in the circle graph and proportional algebraic expressions for defining variables. K7's comments indicated that they defined the variable proportionally, connected different models and compared them. These remarks suggested a level 3 mathematising competency.

### *Representation Competency*

In the three methods applied to solve the problem, understanding, using, comparing, and evaluating multiple complex representations were required (level 3). The majority of participants emphasized the importance of understanding, using, connecting, or comparing multiple complex representations in their explanations (indicating level 3). K13, K2, K3, K8, and K9 highlighted the transition between graphs in their explanations but did not comment on interpreting the circle graph. Upon examining K13's comments, it was observed that they emphasized transitioning between representations (level 2): "There are two separate graphs. There is a transition from one representation to another. There is not just one representation. Therefore, it is a complex problem in terms of representation. That is why it is advanced."

### *Using Symbols, Operations, and Formal Language Competency*

When evaluating participants' interpretations of operations using symbols, operations, and formal language, the explanations of ten participants corresponded to level 2, while the explanations of three participants corresponded to level 3. In the first solution method, expressions containing variables with multiple components were used and modified, and equations were formulated and solved together using multiple procedures (level 2). However, in the second and third solution

methods, two-variable equations were formulated and solved by combining various rules, facts, and techniques (level 3). For example, the statement of K6 was as follows:

The angles here were nice. 90, 120, 150 were very convenient, you see. So, an operational part will find a ratio from here. Then, it will be conceptually structured algebraically. It will put the equation. It will solve the equation, but it is not an equation that will not be solved. It is a simple equation. So, of course, it will solve, conceptualize, and put it into algebra in 1, 2, or maybe 3 steps.

K6 used the common factors of central angles when forming algebraic expressions, expressing changes in algebraic expressions. K6 employed multiple mathematical rules and procedures simultaneously (level 2).

### *Reasoning and Argument Competency*

There was no requirement for any mathematical inference in the three methods used. Therefore, reasoning and argument competency were at level 0. However, when the comments of the participants were evaluated, four participants made remarks corresponding to level 0, seven participants commented corresponding to level 1, and two participants made comments corresponding to level 2. For example, K8 stated that he made logical inferences while forming the equation in the solution process:

I wrote the equation using ratios and changes from the first graph to the second graph. Then, I employed equation solving. The logical inference affected the angles. I mean, writing the ratio of the angles based on the given figures on the shape. Like what I wrote,  $90x$ ,  $120x$ , etc. There is no specific number. We assign the value. This constitutes a logical inference. Since the angle of L is  $90^\circ$  in both, it may seem to indicate the same unit. This complicates the inference drawn.

K8 mentioned that the equal distribution of the pie charts representing the L brand televisions on both graphs made the inference difficult. Accordingly, K8 used both the ratios of the central angles in both graphs and the increase and decrease amounts of the K and L brand televisions to form the equation.

## **Discussion**

In this study, it has been observed that mathematics teachers employ different solution methods for skill-based problems, and these solutions may exhibit varying levels of mathematical competency. The determined levels of communication competency aside, the levels of other competencies, in accordance with the evaluations of teachers, seem to be similar across the different solution methods. This finding is consistent with the conclusion reached by Turner et al. (2015), indicating that different solution methods may require activation at different levels of competency. In this context, one of the most critical factors in problem-solving is determining solution methods appropriate for the students' level of knowledge. Therefore, considering students' knowledge and level when solving skill-based problems and interpreting mathematical competencies according to different solution methods is crucial. When examining studies on mathematical questions in the literature, for instance, Özgeldi and Aydın (2021) suggest that taking into account different solution methods is an important finding for understanding and interpreting mathematical competencies based on the analysis of mathematical competency levels according to a single solution provided in mathematics textbooks.

The current research found that skill-based mathematics questions have a high level of communication competency. However, it has been uncovered that when evaluating the questions in terms of communication competency, participants tend to assess communication at a lower level compared to all other competencies. Teachers frequently express that the questions are easy to understand, clear, and straightforward in their evaluations, yet they struggle to articulate the connections used in the problem situations. Research indicates that evaluating a question or task poses different challenges for teachers (e.g., Arbaugh & Brown, 2005). One of these challenges is teachers' tendency to assess such questions as easy or difficult, especially in questions requiring high cognitive demands like PISA mathematics questions (Pettersen & Nordvedt, 2018). Hence, it can be noted that similar results were obtained in the evaluations of skill-based questions with high levels of mathematical competency by teachers.

The solutions to the skill-based mathematics questions used in the research exhibit a high level of devising strategy competency. These levels are similar to the levels revealed in teachers' evaluations within this competency context. The competency in utilizing symbols, operations, and formal language during the solution process emerges as a crucial factor in executing the action of choosing among strategies. Teachers who make choices among strategies have indicated that they consider the number and complexity of operations to be used in the continuation of the solution process when making their selections. Moreover, when the solution process involves a lower demand level in devising strategy competency, there is a higher demand for mathematising and competency in using symbols, operations, and formal language. Turner et al. (2015) remarked that traditional mathematics education emphasizes mathematising and competency in using symbols, operations, and formal language during instructional activities. In this sense, the evaluations made by mathematics teachers in the context of devising strategy are particularly assessed in terms of the symbols and operations used during the solution process and emerge as a significant factor in determining the level of mathematical competency. Additionally, in cases where devising strategy competency remains at a lower demand level, it was observed that mathematical operations and procedures, such as systems of equations and algebraic expressions, were used, which are not suitable for the level of 8th-grade students. This indicates that the changes made in the mathematics curriculum in 2018 have not been accurately reflected in teaching activities. In this regard, the inclusion of procedural operations not included in the curriculum raises concerns. The result suggests that the objectives of curriculum changes are not reflected in learning and teaching activities, and competency in symbols and formalism continues to be emphasized, as indicated by the findings of Boesen et al. (2014), Adlef et al. (2023), and Niss et al. (2016). This outcome can be interpreted as teachers prioritizing competency in using symbols, operations, and formal language over devising strategy competency in their lessons and continuing to use and teach operations contained in previous mathematics curricula.

Developing mathematising competency requires comprehensive use of real-life problems (Turner & Adams, 2012). Mathematising competency is activated at the 1st, 2nd, and 3rd demand levels in solutions, mostly requiring high-level activation. When evaluating their solutions in terms of mathematising competency, teachers have predominantly expressed actions suitable for the activated demand level. However, it has been observed that many teachers approach mathematising competency at a lower level in many questions. These teachers, while addressing the evaluation of variables used in the solution process within the scope of mathematising competency, do not consider 'expressing dependent variables in terms of independent variables or interpreting models for different variables' (Fakhrunisa & Hasanah, 2020) within the scope of mathematising

competency. In this context, it can be stated that teachers can create modeling suitable for the demand level of mathematising competency; however, there are cases where they do not evaluate the structural relationships between variables within the scope of mathematising competency.

In terms of representation competency, it is observed that the solutions to the questions are at a high level, and teachers also tend to evaluate this competency at a high level. The most notable aspect within the scope of representation competency is that while most teachers identify and use visual information, only a few teachers are successful in manipulating representations in a solution-appropriate manner. Changes made based on the questions can be said to affect strategy competency, mathematical modeling, and the competency of using symbols, operations, and formal language. For example, drawings and modifications made to the visual used in the question directly affect devising strategy competency. Turner and Adams (2012) have emphasized the importance of teachers encouraging students to use representations in questions and creating opportunities for students to manipulate representations. In this context, the changes made by teachers on representations play an important role in solving skill-based questions and have an essential place in developing representation competency.

The competency of using symbols, operations, and formal language has been evaluated in accordance with the demand levels activated during the solution process. However, it is noteworthy that some participants use procedural procedures that are not included in the curriculum and mention that they address them in their classes. Niss and Højgaard (2019) have expressed that procedural knowledge needs to be used to some extent for any competency to be activated, and furthermore, having a competency is more comprehensive than having procedural skills. Ahl and Helenius (2023) state that the competency of using symbols, operations, and formal language is associated with conceptualization and meaning-making. Another result of this study is that the action of using insight, i.e., using the most appropriate form of an algebraic expression for the operations to be performed, with algebraic expressions at the 3rd demand level, was not performed by all participants. In the solutions applied to the 2nd problem used in the research, it was observed that five participants performed operations at the 2nd demand level by not conducting the action of working flexibly with algebraic expressions. Additionally, participants who activate the competency of using symbols, operations, and formal language at the 3rd level have mentioned statements indicating that they used insight to determine the appropriate algebraic expression form. These participants stated that they noticed the common factor, which is an algebraic expression, before applying the steps of the solution process and aimed to reduce the operational burden by performing the entire operational process within the common factor parentheses. It is observed that as the demand level increases in the competency of using symbols, operations, and formal language, the increase in the number, type, and procedures of operations used is not always correct with these solution methods. It is emphasized that using insight as an action in the highest demand level of the competency of using symbols, operations, and formal language indicates the importance of cognitive processes for this competency (Turner et al., 2015).

The competency of reasoning and argument is at a low level in the solutions of the questions. In the solution process of four questions, no inference was used, and no direct inferences were made from the given information. It was observed that teachers generally could not identify the mathematical inferences used in the solution process, and the majority addressed them at a lower demand level in their evaluations. In these evaluations, teachers who assign values within the given constraints rather than verbally expressing the inferences they make in the solution process and showing evidence do not consider them within the scope of reasoning and argument competency.



Furthermore, the sixth question, in which the competency of reasoning and argument is highly activated, received mixed reviews; some participants disliked it, stating that it was a question with an unclear purpose, while others expressed their liking for it, stating that it required mathematical reasoning. Additionally, nine teachers who evaluated the solution of the seventh question, which requires the activation of the competency at level 0, also considered various steps taken within the scope of devising strategy, mathematizing, using symbols, operations, and formal language competencies as mathematical inferences. In this context, it is considered that the effective activation of high-demand levels for the other five competencies in the question contributes to this situation. Additionally, it can be argued that due to the high impact of cognitive processes in the solution process of the problem, teachers may have a misconception that reasoning and argument competency encompasses all cognitive processes. When these two findings regarding reasoning and argument competency are considered together, it can be concluded that teachers struggle the most to distinguish and that teacher perspectives on this competency differ the most. Pettersen and Nordvedt (2018) noted in their study analyzing teachers' interpretations of questions within the framework of mathematical competencies that the lowest reliability results were found for reasoning and argument competency. Moreover, providing opportunities for students to express their ideas both verbally and in writing and offering opportunities for students to engage with and consider others' mathematical ideas are considered important for the development of reasoning and argument competency (Turner & Adams, 2012). Teachers' difficulty in identifying actions that require the activation of reasoning and argument competency may be interpreted as a lack of consciously conducting instructional activities aimed at developing reasoning and argument competency in students.

Analytical skills to assess mathematical competency demands can be developed, yet they require time and experience (Arbaugh & Brown, 2005; Pettersen & Nordvedt, 2018). In this regard, it is crucial for teachers to gather to examine the questions and discuss mathematical competency demands (Pettersen & Nordvedt, 2018). It is deemed necessary for teachers who conduct instructional activities within the framework of mathematical competencies to effectively utilize the framework as well (Turner et al., 2015). Educating individuals with mathematical competency is only possible if teachers design and select instructional activities aimed at developing mathematical competencies (Niss & Højgaard, 2019; Turner et al., 2015). In this respect, in-service teacher training workshops can be organized for mathematics teachers to analyze mathematical competencies as they are expected to analyze these competencies and design their lesson plans accordingly to enhance these competencies in order to achieve the goal of improving mathematical literacy skills outlined in the mathematics curriculum.

**Ethics Committee Approval:** Mersin University Social and Human Sciences Ethics Committee Decision 06/06/2022-239.

**Author Contributions:** Both authors contributed equally in each section of the study.

**Conflict of Interest:** Authors declare that they have no conflict of interest.

## Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Beceri Temelli Sorulara Yönelik Değerlendirmelerinin Matematiksel Yetkinlikler Çerçevesinde İncelenmesi \*

Çiğdem Bozkuş<sup>a</sup>  Meriç Özgeldi<sup>b</sup> 

<sup>a</sup> Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Adana, Türkiye, [bozkuscigdem@gmail.com](mailto:bozkuscigdem@gmail.com)

<sup>b</sup> Doç. Dr., Mersin Üniversitesi, Mersin, Türkiye, [mericozgeldi@mersin.edu.tr](mailto:mericozgeldi@mersin.edu.tr)

### ÖZET

Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin beceri temelli matematik soruları için geliştirdikleri çözüm yöntemlerinin ve bu çözümler kapsamında yaptıkları değerlendirmelerinin matematiksel yetkinlikler çerçevesinde incelenmesidir. Matematiksel yetkinlik talepleri iletişim, strateji geliştirme, matematikleştirme, temsil, semboller, işlemleri ve resmi dili kullanma, akıl yürütme ve argüman geliştirme olarak tanımlanmaktadır. Çalışmaya 13 ortaokul matematik öğretmeni (7 Kadın, 6 Erkek) gönüllü olarak katılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenlere 12 beceri temelli soru sorulmuş, öğretmenlerin çözümleri incelenmiş ve ardından her biri ile yarı yapılandırılmış görüşmeler düzenlenmiştir. Görüşmelerde öğretmenlere yarı yapılandırılmış sorular sorulmuş ve yaptıkları değerlendirmeler matematiksel yetkinlikler kapsamında incelenmiştir. Çalışmanın sonuçları, öğretmenlerin soruların çözümlerinde farklı çözümler uyguladıkları ve bu çözümler kapsamında matematiksel yetkinliklerin farklı düzeylerde ortaya çıktığını göstermektedir. Çözümlerin belirlenen düzeyleri göz önünde bulundurulduğunda, öğretmenlerin değerlendirmelerine göre iletişim yetkinliği dışında diğer yetkinliklerin belirlenen seviyeleri benzerdir. Stratejiler arasında seçim yapma eyleminin gerçekleştirilmesinde önemli etken olarak çözüm sürecinde semboller, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği öne çıkmaktadır. Öğretmenlerin matematikleştirme yetkinliğinin talep düzeyine uygun olan modellemeler oluşturabildikleri; fakat değişkenler arasındaki yapısal ilişkileri matematikleştirme yetkinliği dâhilinde değerlendirmedikleri görülmüştür. Temsil yetkinliği kapsamında en dikkat çeken nokta, öğretmenlerin çoğunun görsel bilgileri belirleyip kullanmaları, ancak temsilleri çözüme uygun şekilde manipüle etmekte az sayıda öğretmenin başarılı olmasıdır. Semboller, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinde talep düzeyi arttıkça kullanılan işlem sayısı, türü ve prosedürlerin artmasının her durumda doğru olmadığı bu çözüm yöntemleriyle görülmüştür. Öğretmenlerin genellikle çözüm sürecinde kullanılan matematiksel çıkarımları belirleyemedikleri ve çoğunluğunun değerlendirmelerinde daha düşük talep düzeyinde ele aldıkları görülmüştür.

### MAKALE BİLGİSİ

**Makale Türü**  
Araştırma

**Makale Geçmişi**  
Gönderim tarihi:  
24.01.2024  
Kabul tarihi:  
26.02.2024

**Anahtar Kelimeler**  
Matematiksel  
Yetkinlik, Beceri  
Temelli Sorular,  
Matematik  
Öğretmeni

**Atf Bilgisi:** Bozkuş, Ç. ve Özgeldi, M. (2024). Ortaokul matematik öğretmenlerinin beceri temelli sorulara yönelik değerlendirmelerinin matematiksel yetkinlikler çerçevesinde incelenmesi. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 12(1), 535-583. <https://doi.org/10.46778/goputeb.1425323>

**Sorumlu yazar:** Meriç Özgeldi, e-posta: [mericozgeldi@mersin.edu.tr](mailto:mericozgeldi@mersin.edu.tr)

\* Çalışma, birinci yazar Çiğdem Bozkuş'un yayınlanmamış yüksek lisans tezinden üretilmiştir

## Giriş

Bir alanda yetkinliğe sahip olmak, ilgili alanın temel yönlerine hâkim olmayı gerektirir (Niss, 2003). Geleneksel öğretim yaklaşımında içerik bilgisine sahip bireyler yetiştirmek ön planda iken günümüzde içerik bilgisini uygulayabilen ve uyarlayabilen bireyler yetiştirmek önemli hale gelmiştir. Matematiksel yetkinlik, içerik bilgisi ve bilişsel alanları birlikte ele alır ve içeriğe özgü bilişsel alanları ifade eder (Harks, 2014). Diğer yandan matematiksel yetkinlik matematiksel içerikler olmadan var olamayacağı gibi bir matematiksel içeriğin özeline de indirgenemez (Niss ve Højgaard, 2019). Bu bağlamda matematiksel yetkinlik, matematiksel bilgilerin uygulaması için temel olan süreçleri kapsar (Turner ve diğerleri, 2015). Son yıllarda bu süreçlerin rolü ile ilgili anlayışın gelişmesi ve matematik derslerinde bu süreçlere yer verilmesi ile matematiksel yetkinliklere sahip bireyler yetiştirilmesi önem kazanmıştır.

Matematiksel yetkinlik çerçeveleri, zorluklar karşısında gerçekleştirilen matematiksel eylemlerin bilişsel karmaşıklığını farklı boyutlarda matematiksel yetkinlik talepleri olarak ele almaktadır (Turner, 2012). Niss (2003) matematiksel yetkinliğe sahip olmanın matematiğin rol oynadığı matematik içi ve dışı bağlamlarda matematiği anlama, yargılama, uygulama ve kullanma yeteneği olduğunu ifade etmiştir ve matematikte ustalaşmak için gerekli olduğu düşünülen matematiksel yetkinlik talebini Danimarka KOM (Danca: Yetkinlikler ve Matematik Öğrenimi) projesinde ele almıştır. Bu çerçeve Avrupa'da Danimarka, Almanya, Katalonya, İsveç ve Norveç gibi birçok ülkenin matematik müfredatı ve ölçme değerlendirme ölçütlerini etkilemiştir (Pettersen ve Nortvedt, 2018). Bu bağlamda öğrencilerin matematiksel yetkinlik yönünden zengin görevlerle ilgilenmesi, öğretmenlerin ise kullanılan görevlerin yetkinlik taleplerini doğru değerlendirebilmesi önemli hale gelmiştir (Pettersen ve Nortvedt, 2018). Matematiksel yetkinliklerin matematik öğretiminde faydalı olabilmesi için öğrencilerin matematiksel yetkinliklere yönelik bilgi ve eylemlerindeki ilerleme fikrine odaklanan etkinliklerin kullanılması ön plana çıkmıştır (Ahl ve Helenius, 2023).

Turner ve Adams (2012), Niss'in (2003) matematiksel yetkinlikler çerçevesini geliştirerek matematiksel yetkinlik taleplerini tekrar tanımlamış ve her bir yetkinlik için dört düzey belirledikleri bir çerçeve oluşturmuştur. Bu çerçevede matematiksel yetkinlik talepleri 1. İletişim, 2. Strateji, 3. Matematikleştirme, 4. Temsil etme, 5. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma (Semboller ve formalizm), 6. Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinlikleridir. Geliştirilen çerçevede her bir matematiksel yetkinlik talebinin iki düşük, iki yüksek düzeyi ve bu düzeylere karşılık gelen eylemler yer almaktadır. Bu teorik çerçeve Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) sorularının madde güçlüklerini belirlemede kullanılmış ve çalışma sonucunda matematiksel yetkinlik taleplerinin tanımları ve düzeylerini belirten eylemler düzenlenerek daha ayrıntılı hale getirilmiştir (Turner ve diğerleri, 2015).

Matematiksel yetkinlik çerçeveleri, matematik öğretiminin amacını, iyi çalışılmış işlemleri tekrar etmekten ziyade bilgi ve becerilerin gerektiğinde kullanılabilmesi için yetkinliklerin geliştirilmesi olarak ele almaktadır (Kilpatrick, 2014). Niss (2003) matematiksel yetkinliklerin (i) okul matematiğinin sonuçlarını belirlemek, (ii) matematik öğretimi ve öğrenimini karakterize etmek, (iii) öğrencilerin ne öğrendiklerini veya öğretmenlerin ne öğrettiklerini izlemek ve kontrol etmek olmak üzere üç farklı şekilde kullanılabileceğini belirtmiştir. Bu bağlamda matematik eğitiminin amacı, öğrencilerin matematiksel yetkinlik düzeylerini yükseltmek olup, bu amaç doğrultusunda öğretmenlerin kullanılan matematiksel görevleri yetkinlikler açısından doğru

değerlendirebilmelerine yardımcı olmaktadır (Pettersen ve Nortvedt, 2018). Turner ve diğerleri (2015) matematiksel yetkinliklerin matematik öğretiminde resmi olarak yer alması gerektiğini ve oluşturdukları çerçevenin öğretmenler tarafından uygun öğretim görevleri seçmek, tasarlamak veya değerlendirmek için kullanılabileceğini belirtmiştir. Shimizu ve diğerleri (2010) ise öğretim ve değerlendirme faaliyetleri için seçilen görevlerin öğrencilerin performanslarını ortaya çıkarması, beslemesi ve geliştirmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu amaçla öğretmenlerin öğretimde veya değerlendirmede kullanılan görev veya soruları içerikle beraber bilişsel talep açısından da analiz edebilmesi gerekli görülmektedir.

Türkiye’de 2015 PISA sonuçları ve OECD Türkiye raporu doğrultusunda Millî Eğitim Bakanlığı (MoNE) 8. sınıf öğrencilerinin girdiği Temel Eğitimden Ortaöğretime Geçiş Sistemini (TEOG) kaldırmış ve Lise Geçiş Sistemini (LGS) uygulamaya başlamıştır (MoNE, 2018). LGS’de soru yapısı uluslararası sınavlara daha etkili biçimde hazırlanmak amacıyla beceri temelli sorular olarak değiştirilmiştir (Erden, 2020). Altun (2020) günlük dilde beceri temelli veya yeni nesil sorular olarak adlandırılan soruların gerçekte matematik okuryazarlığı soruları olduğuna işaret etmiştir. Bu doğrultuda değişen sınav sistemine uygun olarak hazırlanan beceri temelli soru örnekleri düzenli olarak yayımlanmaktadır ve bu sorulardan oluşturulan Beceri Temelli Testler ve LGS Çalışma Kitabı isimli kaynak kitaplar MoNE’ye bağlı devlet okullarında öğrencilere 2020-2021, 2021-2022 ve 2022-2023 eğitim-öğretim yıllarında ulaştırılmıştır (MoNE, 2022).

MoNE matematik dersi öğretim programında matematik dersinin amaçlarından ilkinin ‘matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirmek ve etkin şekilde kullanmak’ olduğunu belirtmiştir (MoNE, 2018). Matematiksel okuryazarlık, Niss’in (2003) belirlediği matematiksel yetkinliklere göre tanımlandığından matematiksel okuryazarlık becerilerinin geliştirmesi için matematiksel yetkinliklere yönelik öğretim faaliyetleri önem kazanmaktadır. Fakat genellikle matematik derslerinde matematiksel yetkinliklerin tamamını geliştirmeye yönelik faaliyetlerin yürütülmediği görülmüştür (Charalambous ve Philippou, 2010). Petterson (2019) tüm eğitim seviyelerinde öğretim faaliyetlerinde yer alan öğretmenlerin matematiksel yetkinliklerin farkında olması ve sınıf etkinliklerinin bu yetkinlikleri geliştirmeye teşvik edici şekilde planlaması ve uygulaması gerektiğini belirtmiştir.

Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmenlerinin beceri temelli matematik soruları için geliştirdikleri çözüm yöntemlerinin ve bu çözümler kapsamında yaptıkları değerlendirmelerinin matematiksel yetkinlikler çerçevesinde incelenmesidir. Bu çalışmanın Türkiye’de 2018 yılında değişen matematik öğretim programı ve LGS ile önem kazanan matematiksel okuryazarlık ve beceri temelli soruların öğretmenler tarafından matematiksel yetkinlik talepleri açısından incelenmesi bağlamında alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Matematik öğretmenlerinin sınav sorularını matematiksel yetkinlik talepleri yönünden değerlendirebilmelerinin matematik öğretim programının değişen hedeflerinin içselleştirilmesi ve derslere yansıtılabilmesi açısından önemlidir. Araştırma sorusu şu şekildedir:

Ortaokul matematik öğretmenlerinin beceri temelli matematik soru çözümleri kapsamında yaptıkları değerlendirmelerin matematiksel yetkinlik düzeyi nedir?

## Kavramsal Çerçeve ve İlgili Çalışmalar

### Matematiksel Yetkinlik

Matematiksel yetkinliğin tanımlanması çok kolay olmamakla beraber araştırmacılar bu tanımın birçok özelliğine dikkat çekmiştir. Genel anlamda, matematiksel yetkinlik, “kişilerin verilen durumlarla ilgili matematiksel zorluklara karşı uygun bir şekilde hareket etmeye hazır olma durumu” olarak tanımlanır (Niss ve Højgaard, 2019, s.12). Matematiksel yetkinlik bireyin belirli matematiksel becerilere sahip olması ve bu becerileri gerekli olduğu durumlarda harekete geçirilebilme derecesidir (Turner ve diğerleri, 2015). Bununla birlikte, matematiksel yetkinlik fiziksel ve zihinsel eylemlere yöneliktir ve bireylerin matematiksel fikirleri anlama ve matematiksel bilgileri uygulama eylemleri gibi çeşitli süreçlere dayanır (Niss ve Højgaard, 2019; Turner ve Adams, 2012).

Matematiğin uygulanması ve matematiksel süreçlerin hayata geçirilmesine odaklanan matematiksel yetkinlik ile matematik okuryazarlığı uyum içerisindedir (Niss ve Højgaard, 2019). PISA matematik bileşeninde katılımcı ülkelerdeki 15 yaş grubunda yer alan öğrencilerin matematik okuryazarlığı karşılaştırmalı olarak incelenmektedir (OECD, 2019). PISA'nın temel amacı öğrencilerin okulda öğrendikleri bilgileri günlük yaşamda kullanabilme becerilerini ölçmektir. Bu doğrultuda matematik okuryazarlığını bireylerin matematiği kullanma, formüle etme ve yorumlama kapasitesi olarak ele alır. Matematik okuryazarlığı bağlamında ihtiyaç duyulan sekiz temel süreç tanımlanmış ve bunlar Niss (2003) tarafından tanımlanan matematiksel yetkinliklerden faydalanılarak oluşturulmuştur (Niss, 2015). Bu matematiksel yetkinlik talepleri matematiksel düşünme; matematiksel problemler oluşturma ve çözme; matematiksel olarak modelleme; matematiksel olarak akıl yürütme; temsil etme; formal, teknik dil ve işlemleri kullanma; matematikte, matematikle ve matematik hakkında iletişim kurma; matematiksel araç gereçleri kullanma olarak ele alınmaktadır. Turner ve Adams (2012), Niss (2003) tarafından tanımlanan bu matematiksel yetkinliklerden yola çıkarak matematiksel yetkinlikleri yeniden tanımlamış ve bunların etkinleştirilme taleplerini dört düzeyde ele aldıkları bir çerçeve geliştirmiştir. Bu matematiksel yetkinlik çerçevesi hem matematik soruları ve görevlerinin güçlüklerini belirlemek hem de matematik sınıflarında doğrudan bu yetkinliklerin geliştirilmesine yönelik çalışmaların yapılabilmesini hedeflemektedir (Turner ve Adams, 2012).

Turner ve diğerlerinin (2015) geliştirdiği matematiksel yetkinlik taleplerinin düzeylerini tanımlayan çerçeve problem çözme sürecinde kullanılan eylemleri birbiriyle ilişkili süreçler olmasına rağmen mümkün olduğunca ayırtmaya ve talep düzeylerini belirlemeye önem verilerek hazırlanmış olup öğretmenler ve test geliştiricileri tarafından kullanılmaya uygun olduğu söylenebilir. Matematiksel yetkinliklerin matematik eğitiminde resmi şekilde yer alması ve bunun sonucunda da matematiksel yetkinliklerin geliştirilmesinde bilinçli bir çaba gösterilmesi gereklidir. Matematik öğretmenlerinin burada tanımlanan matematiksel yetkinliklere hâkim olmaları ve her birinin geliştirilebilmesi için öğrenme fırsatları oluşturabilmeleri matematiksel okuryazarlığı arttırabilmek için önemli görülmektedir (Turner ve diğerleri, 2015).

Matematiksel yetkinlikler çerçevesinde iletişim; strateji geliştirme; matematikleştirme; temsil; semboller; işlemleri ve resmi dili kullanma; akıl yürütme ve argüman geliştirme matematiksel yetkinlikleri ve bu yetkinliklerin düzeyleri (düzey 0, düzey 1, düzey 2, düzey 3) yer almaktadır. Turner ve diğerleri (2015) matematiksel yetkinliklerin tanımları ile beraber sorunları çözmek için gereken bilişsel gerekliliklerin önemli yönlerini ele alan, sağlam temellere dayanan ve kullanışlı faktörler içeren düzey tanımlarının oluşturulmasını esas amaç edinmişlerdir. Bu çerçevede her



yetkinlik için belirlenen dört düzeyden 0. Düzey ve 1. Düzey ilgili matematiksel yetkinliğe duyulan talebin düşük düzeyde, 2. Düzey ve 3. Düzey ise yüksek düzeyde olduğu durumlar için ayrıntılı ele alınmıştır. Her bir matematiksel yetkinlik için düzeyler Ek A'da gösterilmiştir.

### ***İletişim Yetkinliği***

İletişim sunulan ifadeleri, soruları, talimatları, görevleri, görüntüleri ve nesnelere okuma ve yorumlama; sunulan durumu hayal etme, anlama ve atıfta bulunulan matematiksel terimler dâhil olmak üzere sağlanan bilgileri anlamlandırmayı ifade eder (Turner ve diğerleri, 2015). İletişim yetkinliği problem durumuna yönelik bilgilerin anlaşılması ve yorumlanması olarak değerlendirilebilir. Bilgiler arasında bağlantılar kurmanın gerekli olması veya sunulan bilgiyi anlamak için materyal içerisinde geriye dönmenin gerekli olması, çözümün sunumunun çok sayıda aşama ve gerekçelendirme içermesi iletişim yetkinliğine olan talebi yükseltmektedir (Turner ve Adams, 2012).

### ***Strateji Geliştirme Yetkinliği***

Strateji bir problemi çözmek için problem durumuna yaklaştırmaya yönelik eylem seçimi olarak ele alınır (Turner ve Adams, 2012). Strateji birbiriyle bağlantılı olan birden fazla aşamadan oluşabilir. Bununla beraber çözüm sürecinin fiziksel olarak yürütülmesi strateji geliştirme yetkinliğinin kapsamında ele alınmaz (Turner ve diğerleri, 2015). Strateji geliştirme yetkinliğine duyulan talep düzeyi stratejinin belirlenmesinde kullanılan yaratıcılık ve buluş derecesi ve çözüm sürecinde kullanılan adımların sayısı ve adımlar arası ilişkilerin karmaşıklığı ile yükselir (Turner ve Adams, 2012). Strateji geliştirme bir problemi çözmek için matematiksel bir strateji seçme veya tasarlama ve aynı zamanda stratejinin uygulanmasını izleme ve kontrol etmeyi ifade eder.

### ***Matematikleştirme Yetkinliği***

Matematikleştirme, matematik dışında yer alan bir durumun matematiksel işleme uygun biçime getirilmesi veya matematiksel bir modelin duruma uygun olarak yorumlanmasını ifade eder (Turner ve Adams, 2012). Matematikleştirme matematik dışı durumların matematiksel olarak temsiliyle ilgilenirken temsil yetkinliği matematiksel ifadelerin matematik içi veya dışı olacak şekilde temsil edilmesini ile ilgilenir (Turner ve diğerleri, 2015). Matematikleştirme yetkinliğine olan talep problem durumunda belirtilen matematiksel bağlamlar ve matematiksel yapılar arasında çeviri yapmak için gerekli olan bilgi düzeyi, yaratıcılık ve iç görü kullanma düzeyine bağlı olarak yükselir (Turner ve Adams, 2012). Matematikleştirme matematik dışı bir durumu matematiksel bir modele çevirme, problem durumuyla ilgili bir model kullanmanın sonuçlarını yorumlama veya problem durumuyla ilgili olarak modelin yeterliliğini doğrulamayı ifade eder (Turner ve diğerleri, 2015).

### ***Temsil Yetkinliği***

Temsil matematiksel bir varlığın somut bir ifadesi olarak ele alınabilir (Turner ve Adams, 2012). Temsil grafik, diyagram olabileceği gibi sözel, sembolik veya mecazi olabilir. Bununla beraber bazı problemlerde kullanılan basit metin diyagramları, fotoğraflar gibi problem durumunu doğrudan resmeden figürler temsil yetkinliğini etkinleştirmeyi gerektirmez. Temsil yetkinliğine duyulan talep temsillerin karmaşıklığı, farklı temsillerden bilgilerin beraber değerlendirilmesi veya temsil tasarlama ihtiyacına bağlı olarak yükselir (Turner ve diğerleri, 2015). Temsil yetkinliği çözüm arayışında verilen matematiksel temsillerin kodunu çözme, bunlar arasında çeviri yapma ve

bunlardan yararlanma; durumu yakalamak veya çalışmalarını sunmak için uygun temsilleri seçme veya tasarlamayı ifade eder (Turner ve diğerleri, 2015).

### ***Sembolleri, İşlemleri ve Resmi Dili Kullanma Yetkinliği***

Matematiksel içerik bilgisini kullanma, sembollerin, işlemlerin ve resmi dilin yetkin bir şekilde kullanılması olarak düşünülmektedir (Turner ve Adams, 2012). Bu süreçte gerekli bilgileri anlama, hatırlama, kullanma ve değiştirebilme önemli görülmektedir. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanmaya yönelik talep matematiksel içerik bilgisinin ve uygulanması gereken matematiksel prosedürlerin karmaşıklığıyla artar. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği matematiksel prosedürleri ve dili (sembolik ifadeler, aritmetik ve cebirsel işlemler dâhil) onları yöneten matematiksel kuralları anlama ve uygulama ile tanımlara, sonuçlara, kurallara ve biçimsel sistemlere ilişkin bilgileri etkinleştirme ve kullanmayı ifade eder (Turner ve diğerleri, 2015).

### ***Akıl Yürütme ve Argüman Geliştirme Yetkinliği***

Akıl yürütme ve argüman geliştirme çözüm sürecini devam ettirebilmek için yapılması gereken çıkarımları ve bu sırada bilginin içsel ve zihinsel işlenmesi ile beraber kullanılan zihinsel süreci açıklamak, kanıtlamak ve doğrulamak eylemlerini ifade eder (Turner ve Adams, 2012). Problemin çözüm sürecinde kullanılan çözüm adımlarını belirlemek için de zihinsel süreçler etkinleştirilir fakat bunlar strateji geliştirme yetkinliğinde ele alınmaktadır. Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğine olan talep kullanılan çıkarım zincirinin uzunluğu ve karmaşıklığı ile yükselir (Turner ve Adams, 2012). Argüman geliştirme yetkinliği argümanları ve sonuçları oluşturma, inceleme veya doğrulamak için problem öğelerini keşfeden ve birbirine bağlayan mantıksal olarak kök salmış düşünce süreçlerini kullanarak çıkarımlar yapmayı ifade eder (Turner ve diğerleri, 2015).

### ***İlgili Çalışmalar***

Niss ve diğerleri (2016) matematiksel yetkinlik çerçevelerinin araştırmalar için kullanılabilmesinin önemli olduğunu ve bunun için yetkinliklerin iyi tanımlanmış olması ve iyi düşünülmüş araştırma tasarımlarının gerekliliğini savunmuştur. Bu bağlamda Turner ve diğerlerinin (2015) matematiksel yetkinlikler çerçevesi ön plana çıkmaktadır. Bu teorik çerçeve matematik sorularının analizlerinde kullanılarak hem soruların madde güçlükleri hem de analizi gerçekleştiren öğretmen gruplarının matematiksel yetkinliklere hâkimiyetlerini inceleyen araştırmalarda kullanılmaktadır. Örneğin, Pettersen ve Nortvedt (2018) beş öğretmen ve beş öğretmen adayından PISA 2012 matematik sorularını değerlendirirken Turner ve diğerlerinin (2015) matematiksel yetkinlik çerçevesini kullanmasını istemiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin değerlendirmelerinin tutarlı olduğu fakat değerlendirmelerinde düzeyleri sınırlı bir aralıkta kullandıkları ifade edilmiştir. Buna göre Turner ve diğerlerinin (2015) geliştirdikleri matematiksel yetkinlik talepleri ve düzeylerini belirten çerçevenin uygun görevleri seçme ve analiz etme amacıyla öğretmenler tarafından kullanılmasının yararlı olabileceği belirtilmiştir (Pettersen ve Nortvedt, 2018). Benzer şekilde, Pettersen ve Braeken (2019) PISA 2012 matematik anketi ve Norveç ulusal sınavı matematik sorularını matematik öğretmenlerinin ile Turner ve diğerlerinin (2015) matematiksel yetkinlik çerçevesini kullanarak puanlamalarını gerçekleştirmiştir. Bu çalışmaya göre, öğretmenlerin matematiksel yetkinlik talepleri ve düzeyleri ile ilgili eğitimi almalarının etkili olabileceği düşünülmektedir.

Öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel yetkinliklerinin gelişimlerini teşvik etmesi matematik öğretiminde bir öncelik haline gelmektedir (Niss ve diğerleri, 2016). Bu doğrultuda matematik programlarında ve müfredatlarında yapılan değişikliklerin öğretmenler tarafından anlaşılması ve

matematikselsel yetkinlikleri geliştirmeye teşvik eden ders etkinlikleri ve görevlerini belirlemek ve tasarlamak için desteklenmeleri gerekmektedir (Turner ve diğlerleri, 2015). Öğretmenlerin matematikselsel yetkinlik talepleri konusunda sınırlı bilgi sahibi olduğunu ortaya koyan Petterson (2019) öğretmenlerin matematikselsel yetkinlik taleplerini analiz edebilmesi gerektiğini belirtmiştir. Ancak matematikselsel yetkinlik taleplerinin farkında olan öğretmenlerin bunları sınıf görevlerine yansıtarak öğrencilerin matematikselsel gelişimlerini destekleyebileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda öğretmenlerin görevlerde etkinleştirilmesi gereken matematikselsel yetkinlikleri, matematikselsel yetkinlik analiz şemaları kullanarak değerlendirmesi ve bu konuda hizmet içi eğitimlerle desteklenmesi ve teşvik edilmesi gerektiğini işaret etmiştir.

Öğretmenlerin öğretim programının gerekliliklerini nasıl ele aldıkları ve nelere dikkat ettiklerini, öğretmen tarafından geliştirilen testlerle bunların nasıl ortaya çıkabileceğini araştıran birçok çalışma vardır. Bunlardan Boesen (2006), matematikselsel yetkinlikleri incelediği çalışmasında ulusal sınav sorularını temel alarak katılımcı öğretmenlerden yaratıcı problem çözmeye ve test oluşturmasını istemiştir. Öğretmen yapımı testlerin matematikselsel yetkinliklerin tümünü etkinleştirmeyi gerektirmeyen stratejiler ile çözmeye dönük görevler içerdiği ve ulusal sınavlarda temel alınan matematikselsel yetkinliklerin öğretmenlerin test geliştirmesi üzerindeki etkisinin sınırlı olduğunu belirlemiştir. Bununla beraber matematikselsel yetkinliklerin bilimsel araştırmalarda veri analizi yapmak ve testleri değerlendirmek veya geliştirmek için faydalı birer araç olduğu da belirtilmiştir. Benzer şekilde, Becevic (2023) matematik öğretmenlerinin matematik öğretim programında yer alan matematikselsel yetkinlikleri geliştirme hedeflerini değerlendirmek için öğretmen yapımı test uygulamalarına teorik bir bakış getirmiştir. Öğretmenlerin matematikselsel yetkinlikler konusunda farkındalıklarının artması ve bunun sınıf uygulamalarına da yansımaları önemli bir bulgu olarak değerlendirilmektedir.

Matematikselsel yetkinlikler çalışmalarda beraber ele alınabildiği gibi bir ya da birkaç yetkinliğin geliştirilmesini temel alan araştırmalar da yapılabilir (Niss ve diğlerleri, 2016). Bu bağlamda Højgaard (2021) matematikleştirme yetkinliğini ele almış ve problem çözmeye ile matematikleştirme arasındaki farklılıklar ve ilişkilere değinmiştir. Højgaard (2021) çalışmasında öğrencilerin matematikleştirme yetkinliğini geliştirmekte kullanılan görevlerin önemine değinmiştir. Bir görevin görevi yerine getirenler için rutin olan stratejilerin, yöntemlerin ve prosedürlerin uygulanmasından öteye geçmesi ve görevin onunla ilgilenen kişiler için matematikselsel sorunlar ortaya koyması gerektiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda matematikselsel görevlerin geliştirilmek istenen matematikselsel yetkinliklerin talepleri doğrultusunda tasarlanması ve seçilmesinin önemli olduğu söylenebilir.

Türkiye’de 2018 yılında değışen matematik öğretim programı ve LGS matematik testinde beceri temelli soruların kullanılmaya başlanması sonrası yapılan soru değerlendirme, ders kitabı ve öğretim programı inceleme çalışmaları alanyazında yer almaktadır. Bunlardan LGS matematik testinde yer alan soruları analiz eden Küçükgençay ve diğlerleri (2020) LGS’de kullanılmış olan soruları ve MoNE’nin yayınladığı örnek soruları PISA 2012 problem çözmeye becerileri bağlamında ele almıştır. Araştırmanın sonucunda beceri temelli soruların birden fazla kazanımı ölçmeye yönelik olduğu ve soruların çözümlerinin planlama ve uygulama, keşfetme ve anlama, temsil etme ve formüle etme, kontrol etme ve yansıtma süreçlerini içerdiği görülmüştür. Yüceer (2023) LGS matematik sorularını matematik öğretim programına ve TIMSS çerçevesine göre analiz ettiği çalışmasında soruların matematik öğretim programına göre dengeli bir dağılım göstermediği sonucuna işaret etmiştir. Bununla beraber TIMSS yeterlik düzeylerine göre yapılan analizler alt düzeye yönelik hiç soru olmadığını; orta düzeyde az sayıda soru olduğunu ve soruların çoğunluğunun üst veya ileri düzey olduğunu göstermiştir (Yüceer, 2023). Benzer şekilde, Arı (2022)

matematik ders kitapları ile LGS matematik sorularını karşılaştırdığı çalışmasında ders kitaplarında yer alan soru ve etkinliklerin üst düzey düşünme becerisine katkı sağlayacak nitelikte olmadığını bununla beraber LGS matematik sorularının üst düzey düşünme becerisi gerektirdiğini belirtmiştir. Bu çalışmalar LGS matematik testinde yer alan soruların üst düzey matematiksel beceriler gerektirdiği ortaya koymuştur. Ancak, LGS matematik sorularını matematiksel yetkinlikler bağlamında ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Kertil ve diğerleri (2021) ortaokul matematik öğretmenlerinin beceri temelli sorulara yönelik düşüncelerini, derslerinde nasıl uyguladıklarını ele aldıkları çalışmasında öğretmenler ile görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Matematik öğretmenlerinin beceri temelli sorular ile ilgili olumlu görüşlere sahip olmakla beraber sınıf içinde bu sorulara yer vermelerinin sıklığını genellikle haftada bir olarak belirtmişlerdir. Bununla beraber MoNE ders kitaplarında yer alan etkinlik ve soruların yetersiz olduğu ve öğretmenlerin beceri temelli soru yazma ve problem çözme becerisini geliştirmek için eğitime ihtiyaç duyduklarını belirtmiştir. Çetin (2019) LGS matematik soruları ile ilgili olarak öğretmen görüşlerini ele aldığı çalışmasında öğretmenlerin kendilerini geliştirme ve yenilemeye ihtiyaç duyduklarını ve LGS sonuçlarının üzerlerinde baskı oluşturduğunu ifade etmiştir. Diğer yandan, Çetin ve Ünsal (2019) LGS'nin matematik öğretmenleri üzerindeki etkilerini ve matematik öğretim programının uygulanması üzerindeki yansımalarını incelemiştir. Çalışma sonucunda merkezi sınavların öğretmenlerin mesleki gelişimlerini olumlu etkilediği, bununla beraber öğretmenlerin öğretim programı uygularken tüm boyutlarını ele almadıklarını, LGS başarısına odaklanarak amaç ve içerik belirlediklerini, ölçme değerlendirme faaliyetlerini çoktan seçmeli sınavlar ile gerçekleştirdiklerini ve derslerde anlatım ve test çözme faaliyetlerine ağırlık verdiklerini belirtmişlerdir. Benzer şekilde, Şen ve Ünal (2020) 2018 yılında değişen matematik öğretim programını değerlendiren çalışmalarında ise matematik öğretmenlerinin programda yapılan değişiklikleri kazanımların azalması veya yer değiştirmesi olarak nitelendirdiklerini belirtmiştir. Türkiye'de yapılan bu çalışmalar dikkate alındığında öğretim programı, ders kitapları ve beceri temelli sorular arasındaki farklılaşmalar dikkat çekerken matematik öğretmenlerinin öğretim programını uygulama ve beceri temelli soru seçme, yazma ve derslerde uygulama ile ilgili hizmet içi eğitimlerin gerekliliğini belirtmektedir. Bu bağlamda Turner ve diğerlerinin (2015) matematiksel çerçevesini ele alan bir çalışmaya rastlanmamış olup öğretmenlerin matematiksel görevleri analiz edebilmeleri ve buna bağlı olarak ders içi faaliyetlerini düzenleyebilecekleri düşünülmektedir.

Bu bağlamda matematiksel yetkinliklerin matematik programları ve müfredat belgeleri üzerinde, matematik soruları ve görevlerinin güçlükleri ve uygun olanların seçilmesinde, bireysel ve gruplar halinde matematiksel yetkinlik düzeylerinin belirlenmesinde daha fazla çalışmaya ihtiyaç olduğu ifade edilebilir (Niss ve diğerleri, 2016). Türkiye'de 2018 yılında değişen matematik öğretim programının öğrencilerin matematiksel yetkinliklerini geliştirme hedefini gerçekleştirilebilmesi ve LGS matematik testinde başarının artırılabilmesi için önemli bir faktörün öğretmenlerin matematiksel yetkinliklere bilinçli yaklaşımı olduğu söylenebilir.

## Yöntem

Bu çalışmanın yöntemi, araştırmacıların gerçek yaşam durumlarını sınırlı bir sistem veya süreçte çoklu bilgi kaynakları kullanarak detaylı ve derinlemesine incelediği nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasıdır (Creswell, 2017). Bu kapsamda, ortaokul matematik öğretmenlerinin LGS matematik sorularının çözümlerinin matematiksel yetkinlik düzeyleri ve öğretmenlerin çözümlere

yönelik yaptıkları değerlendirmeler incelenmiştir.

### **Katılımcılar**

Çalışmaya, MoNE'ye bağlı devlet (11 kişi) ve özel okullarda (2 kişi) çalışan 13 (7 Kadın, 6 Erkek) ortaokul matematik öğretmeni gönüllü olarak katılmıştır. Katılımcıların tamamı 8. sınıf matematik derslerine girmektedir. Katılımcılar, matematik derslerinde önceki yıllardaki LGS sorularını çözerek belirli soru tiplerine ve onların çözüm yöntemlerine aşina olduklarını ifade etmiştir. Katılımcılara alfabetik sıraya göre K1, K2, ... K13 gibi takma isimler verilmiştir. Katılımcılar araştırma süreci ve amacı konusunda kısaca bilgilendirilmiş ve araştırmaya gönüllü olarak katıldıklarını beyan etmişlerdir. Bu çalışmanın yürütülmesi için Mersin Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Etik Kurulundan 06/06/2022 toplantı karar tarihli, 239 numaralı etik izin alınmıştır.

### **Veri Toplama Süreci**

Araştırmanın verileri 2021-2022 eğitim-öğretim yılının ikinci döneminde toplanmıştır. Veri toplama sürecinin birinci aşamasında, katılımcılardan öncelikle araştırmacılar tarafından oluşturulan Soru Formunda Ek B' de yer alan 2020 yılına ait LGS sorularını ayrıntılı çözmeleri istenmiştir. Bu sorular, 8. sınıf matematik öğretim programında yer alan altı üniteden seçilmiştir ve her bir üniteden ikişer soru belirlenmiştir. Araştırmacılar tarafından toplamda 12 soru online olarak katılımcılara gönderilmiş ve katılımcılar da soruların çözümlerini online olarak araştırmacılara geri göndermiştir. Soruların çözüm süreçleri her bir katılımcı için ayrı gerçekleştirilmiş olup süre sınırlaması uygulanmamıştır.

İkinci aşamada katılımcıların çözümleri göz önünde bulundurularak yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Soru çözümlerinin ardından her katılımcı ile üç ile yedi gün içerisinde online olarak görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme süreleri 40 dakika ile 1 saat 30 dakika arasında değişmiştir. Görüşmelere katılımcılar talep ettiğinde onar dakika ara verilmiştir. Görüşmelerde katılımcıların izniyle ses kayıtları ve alan notları alınmıştır. Ses kayıtları Microsoft Word programı aracılığıyla metne dönüştürülerek görüşme protokolleri oluşturulmuştur. Görüşme soruları öğretmenlerin değerlendirmelerinin matematiksel yetkinliklerini belirlemeyi amaçlayan sorulardan oluşmaktadır. Bu amaçla Turner ve diğerlerinin (2015) matematiksel yetkinlikler tanımlarına uygun olarak altı soru sorulmuştur. Bu sorular şu şekildedir:

1. Soruları metinde yer alan ifadeler, talimatlar, görevler, görüntüler ve nesnelere okumak ve yorumlamak açısından değerlendirir misiniz?
2. Soruları çözmek için izlenilecek adımları belirleme veya tasarlama ve bu adımların uygulanmasını izlemek açısından değerlendirir misiniz?
3. Soruları matematik dışı durumları matematiksel olarak ifade etme (model) ve ilgili modelin veya modellerin kullanımını açısından değerlendirir misiniz?
4. Soruları çözüm sürecinde verilen matematiksel temsilleri okuma (kodunu çözme), temsiller arasında çeviri yapma ve bunlardan yararlanarak çözüm sürecini yönlendirmek açısından değerlendirir misiniz?
5. Soruları çözüm sürecinde kullanılan matematiksel dili (sembolik dil ve aritmetik-cebirselle işlemler) uygulama açısından değerlendirir misiniz?
6. Soruları çözüm sürecinde yapılan mantıksal çıkarımlar yönünden değerlendirir misiniz?



Bununla beraber farklı çözüm yöntemlerinin kullanılmasından yola çıkılarak strateji seçimi yaptığını belirten katılımcılara strateji seçimini etkileyen faktörler, sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği bağlamında prosedürleri uygularken yaptıkları tercihleri etkileyen faktörler ve müfredat dışı işlemsel bir prosedür kullandıkları durumlarda derslerinde bu prosedürlere yer verip vermedikleri ve nedenlerine yönelik sorular yöneltilmiştir.

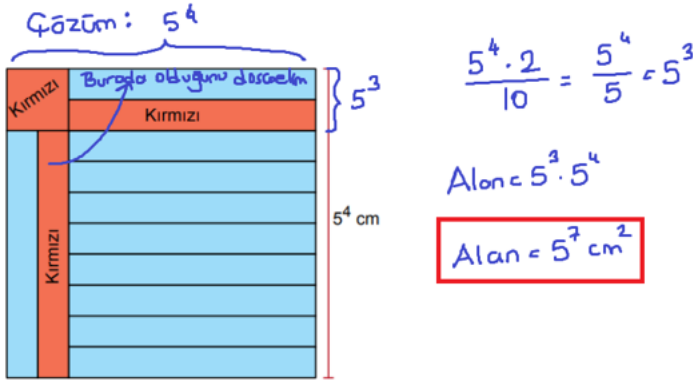
### Veri Analizi

Bu araştırmanın verileri, soru formunda yer alan soruların katılımcılar tarafından yapılan çözümleri ve katılımcılar ile gerçekleştirilen görüşmelerden elde edilmiştir. İlk olarak, 13 katılımcının çözüm yöntemleri benzerliklerine göre gruplandırılmış ve bu çözüm yöntemleri Ek A'da yer alan matematiksel yetkinlikler düzeylerine göre analiz edilmiştir. Kullanılan çözüm yöntemleri belirlenirken strateji geliştirme, matematikleştirme, temsil, sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma veya akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliklerinden bir ya da birkaçını farklı bir şekilde kullanma durumu ele alınmıştır. Soru formunda yer alan 12 sorudan altısı her üniteden birer tane olacak şekilde katılımcıların uyguladıkları çözümler doğrultusunda belirlenmiş ve çalışma kapsamında bu altı soru incelenmiştir.

Çözümlerin incelenmesinin ardından, katılımcılarla gerçekleştirilen görüşmeler Microsoft Word programı kullanılarak her katılımcı için düzenlenmiştir. Bu kapsamda, katılımcıların cümleleri için içerik analizi yapılmıştır. Her bir soru için katılımcıların cümleleri Özgeldi ve Aydın'ın (2021) oluşturdukları düzeylere göre incelenmiştir. Örneğin soru formunda yer alan 2. soru için uygulanan çözüm yöntemlerinden birinin strateji geliştirme yetkinliği bağlamında analizi şu şekildedir:

Şekil 1.

İkinci Soru İçin Gerçekleştirilen Çözüm Örneği



Çözüm yönteminde şekilde verilen dikdörtgenlerin eş olduğu bilgisi kullanılarak kırmızı dikdörtgenlerden birinin yeri değiştirilmiştir. Elde edilen şekilde kenar uzunlukları arasındaki kat ilişkileri kullanılarak istenen alanın şekildeki karenin alanına oranı belirlenmiştir. Daha sonra şekildeki karenin alanının hesaplanması gerektiği ve ardından istenen bölgenin alanını bulmak için bulunan orandan faydalanılarak bölme işlemi yapılması gerektiği tasarlanmıştır. Geliştirilen stratejinin düzeylerine göre değerlendirildiğinde strateji kullanmanın çözüme yönelik stratejinin uygulanmasında önemli ölçüde üstbilişsel düşünme içeren çok aşamalı bir strateji tasarlama ifadesi kapsamında ele alınarak strateji geliştirme yetkinliğinin 3. düzeyinde olduğu belirlenmiştir.

Katılımcıların görüşmelerde matematiksel yetkinlik talepleri doğrultusunda analizine örnek olarak

yine aynı soruyu verilen çözüm yöntemini kullanan katılımcılardan biri olan K10'un ifadeleri verilmiştir:

Bu, stratejisi yüksek bir soru. Zaten o stratejiyi yakalamazsanız, çözümü de çok zorlaşır. O stratejiyi zor kılan şey, alan taşıyor olması. Yani dikdörtgeni taşımak. Taşdıktan sonra iki adım sadece tüm alanı bul oranla. Eğer dikdörtgeni taşımazsa kişinin içinden çıkması çok zor.

Bu ifadede K10'un çözüm yönteminin adımlarını açıklamakla birlikte üstbilişsel süreçleri kullandığını da ifade ettiği altı çizili cümlelerde görülmektedir. Bu durumda, sorunun farklı bir çözüm yöntemiyle ele alınabileceği, ancak kullanılan yöntemin, katılımcının strateji geliştirme yetkinliği ile uyumlu değerlendirmelerini etkinleştirdiği ve K10'un ifadelerini 3. düzeyde oluşturduğu belirtilebilir.

Öğretmenlerin çözüm yöntemleri araştırmacılar tarafından matematiksel yetkinlik talepleri çerçevesine göre öncelikle bireysel olarak kodlanmıştır. Çalışmanın dış güvenilirliğini artırmak için kodlayıcılar arası güvenilirlik %95 olarak hesaplanmış (Miles ve Huberman, 1994), ardından her iki araştırmacı bir araya gelerek çözüm yöntemlerinin matematiksel yetkinlik düzeyleri için tam bir fikir birliğine ulaşmıştır. Bununla birlikte araştırmacılar her bir soru için öğretmenlerin değerlendirmelerini benzer şekilde öncelikle bireysel kodlamışlardır. Kodlamalar karşılaştırıldığında uyum oranının %90 olduğu görülmüştür. Araştırmacılar arasındaki farklı kodlamalar üzerinde tekrar tartışılmış ve tam bir fikir birliğine ulaşıncaya kadar süreç devam etmiştir. Çalışmanın iç güvenilirliği için bulgulara öğretmenlerin doğrudan alıntılarına yer verilmiştir. Çalışmanın iç geçerliliğini artırmak için de araştırmaya katılan öğretmenlerin kimlikleri hakkında herhangi bir bilgi paylaşılmayacağı ifade edilmiştir.

## Bulgular

Bu bölümde, ortaokul matematik öğretmenlerinin çözüm yöntemleri ve bu çözümler kapsamında yaptıkları değerlendirmeler matematiksel yetkinlik düzeylerine göre incelenmiştir. Tablo 1'de öğretmenlerin çözüm yöntemleri kapsamında altı sorunun matematiksel yetkinlik düzeyleri gösterilmektedir. Tablo 1'de koyu renkli taralı hücreler araştırmacılar tarafından belirlenen düzeyleri belirtirken hücre içindeki sayılar öğretmenlerin sayısını göstermektedir. Bu bölümde ayrıca altı sorunun genel değerlendirmesinin ardından bir soru için öğretmenlerin çözümleri ve görüşmelerde yapılan değerlendirmeler ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tablo 1

Çözüm yöntemleri kapsamında soruların matematiksel yetkinlik düzeylerini değerlendiren öğretmenlerin sıklığı

	Düzyey	İY	SY	MY	TY	SR	AY
1. Soru							
1. Yöntem	0	1	-	-	-	-	5
	1	3	-	5	-	5	-
	2	1	1	-	5	-	-
	3	-	4	-	-	-	-
1. Soru							
2. Yöntem	0	1	-	-	1	-	5
	1	3	-	-	4	1	-
	2	-	5	5	-	4	-
	3	-	-	-	-	-	-
1. Soru							
3. Yöntem	0	1	-	-	-	-	3
	1	1	-	-	3	-	-
	2	1	3	3	-	-	-
	3	-	-	-	-	3	-
2. Soru							
1. Yöntem	0	1	1	1	-	-	4
	1	1	-	-	-	-	-
	2	2	-	-	4	-	-
	3	-	3	3	-	4	-
2. Soru							
2. Yöntem	0	1	1	-	-	-	5
	1	2	-	1	-	-	-
	2	2	4	1	5	5	-
	3	-	-	3	-	-	-
2. Soru							
3. Yöntem	0	-	-	-	-	-	4
	1	2	-	-	-	-	-
	2	1	-	-	4	-	-
	3	-	4	4	-	4	-
3. Soru							
1. Yöntem	0	4	2	1	7	3	13
	1	6	-	8	6	6	-
	2	3	11	4	-	4	-
	3	-	-	-	-	-	-
4. Soru							
1. Yöntem	0	3	-	-	-	-	3
	1	3	-	-	3	-	5
	2	-	9	1	2	9	1
	3	3	-	8	4	-	-
4. Soru							
2. Yöntem	0	-	-	-	-	-	-
	1	-	-	-	-	-	2
	2	1	2	-	2	1	-
	3	1	-	2	-	1	-
4. Soru							
3. Yöntem	0	-	-	-	-	-	1
	1	1	-	-	-	-	-

5. Soru 1. Yöntem	2	-	2	2	1	-	1
	3	1	-	-	1	2	-
	0	-	-	1	6	6	-
	1	2	1	5	-	-	-
	2	4	5	-	-	-	6
5. Soru 2. Yöntem	3	-	-	-	-	-	-
	0	-	1	-	7	7	2
	1	1	3	7	-	-	2
	2	5	3	-	-	-	3
	3	1	-	-	-	-	-
6. Soru 1. Yöntem	0	3	1	1	12	3	-
	1	5	-	2	-	6	9
	2	3	6	9	-	3	3
	3	1	5	-	-	-	-
	0	-	1	1	1	1	1
6. Soru 2. Yöntem	1	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-
	3	1	-	-	-	-	-

Not. İY: İletişim Yetkinliği, SY: Strateji Geliştirme Yetkinliği, MY: Matematikleştirme Yetkinliği, TY: Temsil Yetkinliği, SR: Sembollerini İşlemleri ve Resmi Dili Kullanma Yetkinliği, AY: Akıl Yürütme ve Argüman Geliştirme Yetkinliği

Tablo 1'e göre öğretmenlerin soruların çözümlerinde farklı çözümler uyguladıkları ve bu çözümler kapsamında matematiksel yetkinliklerin farklı düzeylerde ortaya çıktığı görülmektedir. Öğretmenler altı sorunun beşinde birden fazla çözüm yöntemi geliştirmiştir. Öğretmenler 1., 2. ve 3. sorular için ise üç farklı çözüm yöntemi geliştirmiştir. Genel olarak çözümlerin belirlenen düzeyleri göz önünde bulundurulduğunda, öğretmenlerin değerlendirmelerine göre iletişim yetkinliği dışında diğer yetkinliklerin belirlenen seviyeleri benzerdir. Öğretmenlerin soruları, iletişim yetkinliği bağlamında değerlendirirken diğer tüm yetkinliklere göre daha düşük düzeyde ele aldıkları görülmektedir. Tablo 1'de de görüldüğü üzere, altı LGS matematik sorusunun araştırmacılar tarafından belirlenen (koyu renkle gösterilen hücreler) iletişim yetkinliği yüksek (2. veya 3. düzey) düzeydedir. Öğretmenlerin soruları çözerken sorun yaşamadıkları göz önüne alındığında değerlendirmelerinde kullandıkları ifadeler bakıldığında iletişim yetkinliğinin yapıcı bileşenin talep düzeyini karşılamada düşük düzeyde kaldıkları söylenebilir. Öğretmenlerin değerlendirmelerinde sıklıkla soruların kolay, açık ve net olduğunu ifade ettikleri görülmüştür.

Strateji geliştirme yetkinliği için soruların düzeyi yüksek olarak belirlenmiştir (2. veya 3. düzey). Tablo 1'de de görüldüğü üzere bu düzeyler, öğretmenlerin strateji geliştirme yetkinliği bağlamındaki değerlendirmelerinde ortaya çıkan düzeyler ile benzerdir. Bununla beraber strateji geliştirme yetkinliğini düşük düzeyde değerlendiren katılımcıların sorulara daha yüzeysel yaklaştıkları ve görüşmelerde soruların amacını beğenmedikleri, bunların kolay olduğunu veya ünite kazanımlarını ölçmediğini belirttikleri görülmüştür. Ayrıca bu öğretmenler soruların çözümlerinde, iki bilinmeyenli denklem sistemleri ve cebirsel ifadeler ile bölme işlemi gibi 8. sınıf öğrencilerinin seviyelerine uygun olmayan matematiksel işlemler ve prosedürler kullanmıştır.

Matematikleştirme yetkinliği için soruların düzeyleri çoğunlukla yüksek düzey olarak belirlenmiştir. Tablo 1'de görüldüğü üzere, öğretmenlerin matematikleştirme yetkinliği

bağlamındaki değerlendirmeleri de yüksek düzeydedir. Bununla beraber matematikleştirme yetkinliğini daha düşük düzeyde ele alan öğretmenlerin olduğu görülmüştür. Bu öğretmenler 'kullanılan değişkenin verilmiş olması veya tanımlanmasını' matematikleştirme yetkinliği kapsamında ele alırken 'bağımlı değişkenlerin bağımsız değişken cinsinden yazılması veya modellerin farklı değişkenler için yorumlanmasını' matematikleştirme yetkinliği kapsamında ele almamıştır.

Temsil yetkinliği için 1., 2. ve 4. soruların düzeyleri yüksektir. Örneğin, 1. soruda temsil üzerinde yapılan değişiklikler strateji, matematikleştirme ve sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliklerinin seviyesini yorumlamada önemli olmuştur. Bu soruda, öğretmenler temsil üstünde yaptıkları değişikliklere bağlı olarak stratejilerini değiştirmişlerdir. Dolayısıyla sorudaki temsilin yorumlanmasına bağlı olarak strateji kullanma yetkinliğinin yorumlanması da değişmiştir. 4. soruda ise iki farklı grafikten edinilen bilgilerin birlikte değerlendirilmesi gerektiğinden temsil yetkinliğinin düzeyi yüksektir. Bu soruda da öğretmenler çözüm sürecinde iki değişken kullandıkları için sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinin yorumlanması da değişmiştir. Öğretmenlerin bu sorunun çözümünde 8. sınıf düzeyinde gösterilmeyen bir konuya girmiş olmaları ise dikkat çekici bir bulgu olarak değerlendirilmiştir.

Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği için soruların düzeyleri ve öğretmenlerin değerlendirmeleri yüksek düzeydedir. Örneğin, 2. soruda katılımcılar çözüm sürecinin adımlarını uygulamadan önce bir cebirsel ifade olan ortak çarpanı fark ettiklerini belirtmiş ve tüm işlemsel süreci ortak çarpan parantezinde yaparak işlemsel yükü azaltmayı hedeflediklerini ifade etmişlerdir. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinde talep düzeyi arttıkça kullanılan işlem sayısı, türü ve prosedürlerin artmasının her durumda gerekli olmadığı bu çözüm yöntemleriyle görülmüştür.

Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği için 5. ve 6. soru haricinde soruların düzeyleri düşüktür. Düşük seviyeli olan soruların çözüm sürecinde herhangi bir çıkarım yapılmamış veya verilen bilgilerden doğrudan çıkarım yapılmıştır. Öğretmenlerden üçünün çözüm sürecinde kullanılan matematiksel çıkarımları belirleyemedikleri ve çoğunluğunun değerlendirmelerinde daha düşük talep düzeyinde ele aldıkları görülmüştür. Bu değerlendirmelerde çözüm sürecinde yürütülen çıkarımları sözel olarak ifade etmek yerine verilen kısıtlamalar dahilinde değerler atayan öğretmenlerin yaptıkları çıkarımları ve kanıt göstermelerini akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği kapsamında ele almadıkları görülmektedir. Örneğin, 6. soruda öğretmenlerin birkaçı bu soru için 'hangi amaca hizmet ettiği belli olmayan bir soru' olarak değerlendirirken diğerleri 'matematiksel muhakeme yapmayı gerektiriyor' ifadesinde bulunmuştur. Bu noktada, yapılan değerlendirmeler göz önüne alındığında akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği öğretmenler arasında en çok uyumsuzluk oluşturan yetkinlik olarak değerlendirilebilir. Bununla beraber, öğretmenler çözüm sürecinde strateji geliştirme, matematikleştirme, sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinlikleri kapsamında ele alınmış olan çeşitli adımları matematiksel çıkarım olarak da değerlendirmiştir.

### **Örnek Sorunun İncelenmesi: Öğretmen Çözümleri ve Değerlendirmeleri**

4. soruda öğretmenlerin soruyu çözmek kullandıkları yöntemler ve değerlendirmeler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Problemin çözümü için üç farklı yöntem kullanılmıştır. Bunlardan ilki dokuz katılımcı tarafından kullanılmış olup ikincisi iki, üçüncüsü iki katılımcı tarafından kullanılmıştır. Üç çözüm yöntemi matematiksel yetkinlikler çerçevesinde incelendiğinde yetkinliklerin düzeylerinin

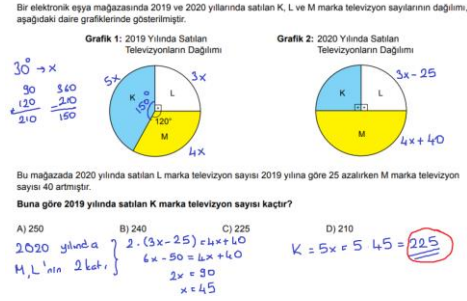


birbirinden strateji geliştirme ve sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği bağlamında farklı düzeylerde yer aldığı görülmüştür. Problemin çözümü için kullanılan üç farklı çözüm yöntemi Şekil 1’de gösterilmiştir.

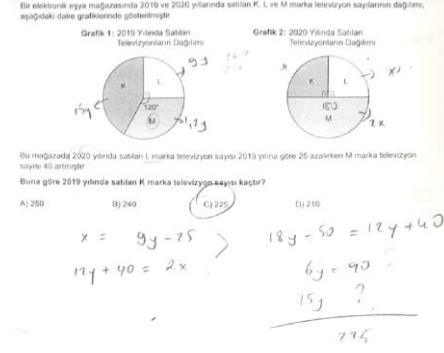
Şekil 2.

## Öğretmenlerin Çözümleri

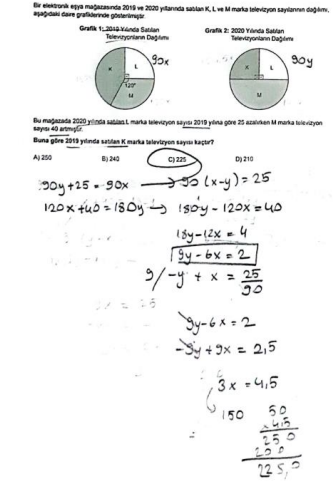
### 1. Çözüm Yöntemi



### 2. Çözüm Yöntemi



### 3. Çözüm Yöntemi



## İletişim Yetkinliği

Sorunun iletişim düzeyi mantıksal olarak karmaşık ilişkiler içeren çoklu bağlam veya görev öğelerini ve bunlar arasındaki bağlantıları belirleme, seçme ve anlamayı gerektirdiğinden 3. düzey olarak belirlenmesine rağmen öğretmenlerin değerlendirmeleri incelendiğinde, iletişim yetkinliğinin genel olarak düşük olduğu görülmektedir. Öğretmenlerden K10 “Evet kolay. Gayet güzel anlaşılıyor. Bilgi anlamlandırılabilir. Bence sorunun, iletişimi gayet güzel. Anlaşılması kolay. Kolay bir soru bence” ifadesiyle sorunun kolay ve anlaşılabilir olduğunu vurgusunu yapmaktadır. Benzer şekilde K8 “Yukarıda verilen ifadeler tamamen neyi istediğini söylüyor...Öğrenci burada yine parça bütün ilişkisini kullanır. Daha zor bir açı verseydi öğrenci için bence yorumlaması da zor olabilirdi” şeklinde ifade etmiştir. Diğer yandan K11 yaptığı değerlendirmede öğrencilerin de kendisi gibi soruyu anlamada karmaşa yaşayabileceğini söylemiştir:

Şimdi burada şey öğrenciler gerçekten karmaşa yaşıyorlar ben de öğretmen olarak aynı karmaşayı yaşıyordum. En son artık bu 360x'e göre, 360y'ye göre davranmaya başladıktan sonra bu soruları çözebilir hale gelir. Şimdi baktığımda görselde L'de değişmiş ama ikisinde de 90° görünüyor ya. Ama azalma var diyor sayısal anlamda. Orada da orantısal akıl yürütmesinin ciddi anlamda yüksek olması lazım ki burada dilimlerin değişmesiyle sayıların aynı şeyi ifade etmediğini artış ve azalışların da değişkenlik gösterebileceğini öğrencinin sezmesi lazım.

## Strateji Geliştirme Yetkinliği

Şekil 1’de, 1. çözüm yöntemi stratejiler arasında değerlendirme yapmayı gerektirdiğinden strateji geliştirme yetkinliği 3. düzey; 2. ve 3. çözüm yöntemi ise doğrudan çok aşamalı strateji geliştirmeyi gerektirdiğinden 2. düzey olarak belirlenmiştir. 1. çözüm yöntemini kullanan K6 sorunun çözümü için şunları söylemiştir:

Şimdi hiç gerçek değer vermedikleri için gerçek bir sayısal bir değer yok. O yüzden direkt ilk akıllarına buradan iki grafikten birinde belli bir oran verme, bir kat vermek gereği gerekir. Bunu çok güzel yapıyorlar aslında. Yani ilk bölüme eğer böyle benimki gibi 3 kat, 4 kat, 5 kat verirlerse

bu birinci adım diyeyim. Sonra bunu L'ye taşıyıp oradaki 25 eksiğiyle 40 fazlasını görmesi lazım ikinci adım. Orada M ile L'nin birbirinin 2 katı olduğunu görmesi lazım üçüncü adım. Üç adımda yaparlarsa bir de buldukları değeri birinci grafiğe tekrar taşımaları lazım.

K6 yaptığı yorumda çok aşamalı strateji kullanmıştır. Bu stratejide kontrollü işlemler birinci grafikte daire dilimlerine karşılık gelen oranları yazma ve artış azalışları kullanarak diğer grafiğe geçiş yapmayı tasarladığı bölümde görülmektedir. İkinci grafikte verilen dilimler arasındaki oranı kullanmak aynı stratejiyi tekrar kullanmayı gerektirmektedir. Tüm bu işlemleri yaparken hedefi birinci grafikte değişken olarak tanımladığı orantı sabitini bulmaya çalışmıştır.

### *Matematikleştirme Yetkinliği*

Kullanılan üç çözüm yöntemi değişkenlerin tanımlanması ve kısıtlamalar dâhilinde matematiksel modeller oluşturulması, farklı modellerin birbirine bağlanarak denklem oluşturma içerdiğinden 3. düzey matematikleştirme yetkinliği etkinleştirmeyi gerektirmektedir. K7 “Açı değerlerinin matematiksel olarak, cebirsel olarak ifade edilişi var. Açı değerleri ile cebirsel ifadeler arasındaki oran yani çözüm yöntemi olarak baktığımızda bir oran var. Daha sonra işte bu aralarındaki ilişki birbirine eşit ifadeleri bulma ve sonuçta da denklemi yazma var.” değerlendirmesiyle değişkeni tanımlamak için daire grafiğindeki açılar ile orantılı cebirsel ifadeler için bir modeller arasındaki ilişkiyi görmenin öneminden bahsetmiştir. K7'nin değişkeni orantısal olarak tanımladığı, farklı modelleri bağladığı ve karşılaştırdığı söylenebilir. Bu yorumlar matematikleştirmenin 3. düzeyini işaret etmektedir.

### *Temsil Yetkinliği*

Sorunun çözümünde uygulanan üç yöntemde çoklu karmaşık temsillerin anlaşılması, kullanılması, karşılaştırılması ve değerlendirilmesi gerekmektedir (3. düzey). Katılımcıların çoğunluğu açıklamalarında (3. düzeyi işaret eden) çoklu karmaşık temsillerini anlamının, kullanmanın, bağlantı kurmanın veya temsilleri karşılaştırmanın öneminden bahsetmiştir. K13, K2, K3, K8 ve K9 açıklamalarında grafikler arasındaki geçişe vurgu yapmış; fakat daire grafiğinin okunmasına yönelik yorum yapmamıştır. K13'ün açıklamaları incelendiğinde, temsiller arasında geçiş yapmaya vurgu yaptığı (2. düzey) görülmektedir: “Bir kere iki ayrı grafik var. Grafikten grafiğe temsilden başka bir temsile geçiş var. Sadece bir temsil yok. O yüzden temsil edilebilme açısından karmaşık bir soru. O yüzden üst düzey.”

### *Sembollerini İşlemleri ve Resmi Dili Kullanma Yetkinliği*

Katılımcıların yaptıkları işlemleri semboller, işlemler ve resmi dili kullanma açısından yorumlamaları değerlendirildiğinde on katılımcının açıklamaları 2. düzeye, üç katılımcının açıklamaları 3. düzeye karşılık gelmektedir. 1. çözüm yönteminde değişkenler içeren birden çok bileşene sahip ifadeler kullanılmış, değiştirilmiş ve birden fazla prosedür birlikte kullanılarak denklem kurulmuş ve çözülmüştür (2. düzey). Bununla beraber 2. ve 3. çözüm yönteminde çeşitli kurallar, gerçekleri ve teknikleri birleştirerek iki bilinmeyenli denklemler kurulmuş ve çözülmüştür (3. düzey). Örneğin K6 ifadesi şu şekildedir:

Burada şeyler açılar güzeldi. 90, 120, 150 çok müsaitti yani. Buradan bir oran bulacak işlemsel kısmında. Ondan sonra cebirsel olarak kurgulayacak. Eşitliği koyacak. Denklemi çözecek ama denklem çözülmeyecek bir denklem değil. Basit bir denklem. Yani tabii ki 1, 2, işte 3 aşamada çözecek oranlayacak, cebirsel dökecek, denklemi çözecek eşitlik yapacak.

K6 sorunun çözümünde kullandığı cebirsel ifadeleri oluştururken merkez açıların ortak bölenlerini

kullanmış, cebirsel ifadeler üzerinde değişimleri ifade etmiştir. K6 birden çok matematiksel kural ve prosedürü beraber kullanmıştır (2. düzey).

### ***Akıl Yürütme ve Argüman Geliştirme Yetkinliği***

Kullanılan üç yöntemde herhangi bir matematiksel çıkarım yapmaya gerek yoktur. Bu nedenle olup akıl yürütme ve argüman geliştirme 0. düzeydedir. Bununla beraber katılımcıların yorumları değerlendirildiğinde dört katılımcı 0. düzeye, yedi katılımcı 1. düzeye ve iki katılımcı da 2. düzeye karşılık gelen açıklamalar yapmıştır. Örneğin, K8 çözüm sürecinde denklemi kurarken mantıksal çıkarımlarda bulunduğunu ifade etmiştir:

Oranlar ve birinci grafikten ikinci grafiğe değişimleri kullanarak denklemi yazdım. Ondan sonra denklem çözme kullandım. Açıların oranı etkiledi mantıksal çıkarımı onu söyleyeyim. Yani şekil üzerinde verilenler o açılara göre oranını yazmak. O yazdığım işte 90x, 120x gibi. Şöyle belli bir sayı yok. Biz değer veriyoruz. Bu mantıksal çıkarım. İkisinde de L'nin açısı 90° olduğu için aynı birimi gösteriyor sanılabilir. Bu yapılan çıkarımı zorlaştırıyor.

K8 satılan L marka televizyonları ifade eden daire dilimlerinin her iki grafikte de eşit verilmesinin yapılan çıkarımı zorlaştırdığını belirtmiştir. Buna göre K8'in denklemi kurmak için hem her iki grafikteki merkez açıların oranlarını, hem de K ve L marka televizyonların artış ve azalış miktarlarını kullandığı görülmektedir.

## **Tartışma**

Bu çalışmada matematik öğretmenlerinin beceri temelli soruların çözümlerinde farklı çözümler uyguladıkları ve bu çözümlerin matematiksel yetkinlik düzeylerinin farklı olabileceği görülmüştür. Bu çözüm yöntemlerinde soruların çözümlerinin belirlenen düzeyleri ve öğretmenlerin değerlendirmelerine göre iletişim yetkinliği dışında diğer yetkinliklerin belirlenen seviyeleri benzerdir. Bu sonuç, Turner ve diğerlerinin (2015) aynı sorunun farklı çözüm yöntemlerinin farklı düzeylerde etkinleştirme gerektirebileceği sonucuyla paralellik göstermektedir. Bu kapsamda soru çözümlerinde en önemli faktörlerden biri, öğrencilerin bilgi düzeyine uygun olan çözüm yöntemlerinin belirlenmesidir. Bu nedenle beceri temelli soruların çözümlerinde öğrenci bilgi ve seviyesini göz önünde bulundurmak, farklı çözüm yöntemlerine göre matematiksel yetkinlikleri yorumlamak önemlidir. Alanyazında matematik sorularının incelendiği çalışmalar incelendiğinde, örneğin Özgeldi ve Aydın (2021), matematik ders kitaplarındaki soruların verilen tek bir çözüme göre yapılan matematiksel yetkinlik seviyelerinin analizi için farklı çözüm yöntemlerinin göz önünde bulundurulması matematiksel yetkinlikleri anlamak ve yorumlamak açısından önemli bir bulgu olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu araştırmada kullanılan beceri temelli matematik sorularının iletişim yetkinliğinin yüksek düzeyde olduğu görülmüştür. Bununla beraber katılımcıların soruları iletişim yetkinliği bağlamında değerlendirirken diğer tüm yetkinliklere göre iletişimi daha düşük düzeyde ele aldıkları görülmektedir. Öğretmenlerin değerlendirmelerinde sıklıkla soruların anlaşılmasının kolay, açık ve net olduğunu ifade ettikleri ve problem durumunda kullanılan bağlantıları ifade edemedikleri görülmüştür. Araştırmalar öğretmenler için bir soruyu veya bir görevi değerlendirmenin farklı zorluklar içerdiğini göstermektedir (örn., Arbaugh ve Brown, 2005). Bu zorluklardan biri PISA matematik soruları gibi yüksek bilişsel istemleri kullanmayı gerektiren sorularda öğretmenlerin bu tür sorular için kolay-zor gibi değerlendirmeler yapmalarıdır (Pettersen

ve Nordvedt, 2018). Bu bağlamda, matematiksel yetkinlik düzeyi yüksek beceri temelli soruların öğretmenler tarafından değerlendirmelerinde de benzer bir sonuç elde edildiği söylenebilir.

Strateji geliştirme yetkinliği için araştırmada kullanılan soruların çözümlerinin düzeyi yüksektir. Bu düzeyler, öğretmenlerin bu yetkinlik bağlamındaki değerlendirmelerinde ortaya çıkan düzeyler ile benzerdir. Stratejiler arasında seçim yapma eyleminin gerçekleştirilmesinde önemli etken olarak çözüm sürecinde sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği öne çıkmaktadır. Stratejiler arasında seçim yapan öğretmenler çözüm sürecinin devamında kullanılacak işlemlerin sayısı ve düzeyini göz önüne alarak seçim yaptıklarını belirtmiştir. Bununla beraber strateji geliştirme yetkinliğinde daha düşük talep düzeyine sahip çözüm süreci gerçekleştiğinde, matematikleştirme ve sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğine olan talep daha yüksek düzeydedir. Turner ve diğerleri (2015) geleneksel matematik eğitiminde matematikleştirme ve sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinin ön planda tutulduğu eğitim faaliyetleri yürütüldüğünü ifade etmektedir. Bu kapsamda, matematik öğretmenlerinin strateji geliştirme bağlamında yaptıkları değerlendirmeler özellikle çözüm sürecinde kullanılan semboller ve işlemlerle değerlendirilmekte ve matematiksel yetkinliğin düzeyini belirlemede önemli bir etken olarak ortaya çıkmaktadır. Bununla beraber bu çalışmada strateji kullanma yetkinliğinin düşük talep düzeyinde kalınan durumlarda iki bilinmeyenli denklem sistemleri ve cebirsel ifadeler ile bölme işlemi gibi 8. sınıf öğrencilerinin seviyelerine uygun olmayan matematiksel işlemler ve prosedürler kullanıldığı görülmüştür. Bu durum matematik öğretim programında 2018 yapılan değişikliklerin öğretmenler tarafından öğretim faaliyetlerine amaçlandığı gibi yansıtılmadığını ortaya koymaktadır. Bu bakımdan, öğretmenlerin öğretim programında yer almayan işlemsel prosedürlere yer vermesi ise düşündürücüdür. Öğretim programlarında yapılan değişikliklerin amaçlarının öğrenme ve öğretim faaliyetlerine yansımadağı ve semboller ve formalizm yetkinliğinin ön planda tutulmaya devam edildiği sonucu Boesen ve diğerleri (2014), Adlef ve diğerleri (2023) ve Niss ve diğerlerinin (2016) çalışmalarının sonuçları ile de ortaya konulmuştur. Bu sonuç, öğretmenlerin derslerinde sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğini strateji geliştirme yetkinliğine göre ön planda tuttıkları ve özellikle önceki matematik öğretim programlarında yer alan işlemleri kullanmaya ve anlatmaya devam ettikleri şeklinde değerlendirilebilir.

Matematikleştirme yetkinliğini geliştirmek gerçek hayat problemlerini kapsamlı biçimde kullanmayı gerektirir (Turner ve Adams, 2012). Matematikleştirme yetkinliği çözümlerde 1., 2. ve 3. talep düzeylerinde etkinleştirilmiş olup çoğunlukla yüksek düzeyde etkinleştirme gerektirmektedir. Öğretmenler çözümlerini matematikleştirme yetkinliği bağlamında değerlendirirken çoğunlukla etkinleştirilen talep düzeyine uygun eylemleri ifade etmişlerdir. Bununla beraber birçok soruda matematikleştirme yetkinliğini daha düşük düzeyde ele alan öğretmenlerin olduğu görülmüştür. Bu öğretmenler çözüm sürecinde kullanılan değişkenin değerlendirilmesini matematikleştirme yetkinliği kapsamında ele alırken 'bağımlı değişkenlerin bağımsız değişken cinsinden yazılması veya modellerin farklı değişkenler için yorumlanmasını' (Fakhrunisa ve Hasanah, 2020) matematikleştirme yetkinliği kapsamında ele almadığı görülmüştür. Bu bağlamda, öğretmenlerin matematikleştirme yetkinliğinin talep düzeyine uygun olan modellemeler oluşturabildikleri; fakat değişkenler arasındaki yapısal ilişkileri matematikleştirme yetkinliği dâhilinde değerlendirmedikleri durumlar olduğu söylenebilir.

Temsil yetkinliği için soruların çözümlerinin yüksek düzeyde olduğu, bununla beraber öğretmenlerin de bu yetkinliği değerlendirmelerinde yüksek düzeyde ele aldıkları görülmektedir. Temsil yetkinliği kapsamında en dikkat çeken nokta, öğretmenlerin çoğunun görsel bilgileri belirleyip kullanmaları, ancak temsilleri çözüme uygun şekilde manipüle etmekte az sayıda

öğretmenin başarılı olmasıdır. Sorular üstünden yapılan değişiklikler strateji yetkinliğini, matematikleştirme ve sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliklerini etkilediği söylenebilir. Örneğin soruda kullanılan görselin üstünde yapılan çizimler ve değişiklikler özellikle strateji geliştirme yetkinliğini doğrudan etkilemektedir. Turner ve Adams (2012) öğretmenlerin öğrencileri sorularda yer alan temsilleri kullanmaya teşvik etmeleri ve öğrencilere temsili manipüle etme fırsatı yaratmaları gerektiğinin öneminden bahsetmiştir. Bu bağlamda, öğretmenlerin temsiller üstünde yaptıkları bu değişiklikler beceri temelli soruların çözümünde önemli bir işleve sahip olmakla beraber temsil yetkinliğinin geliştirilmesi bağlamında önemli bir yere sahiptir.

Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliği çözüm sürecinde etkinleştirilen talep düzeylerine uygun biçimde değerlendirilmiştir. Bununla beraber bazı katılımcıların öğretim programında olmayan işlemsel prosedürleri kullandıkları ve bunları derslerinde ele aldıklarını ifade etmeleri dikkat çekmektedir. Niss ve Højgaard (2019) herhangi bir yetkinliğin etkinleştirilebilmesi için prosedürel bilgilerin az da olsa kullanılması gerektiğini ve bununla birlikte bir yetkinliğe sahip olmanın prosedürel beceriye sahip olmaktan daha kapsamlı olduğunu ifade etmişlerdir. Ahl ve Helenius (2023) sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinin kavramsallaştırma ve anlam oluşturma ile ilişkili olduğunu belirtmektedir. Bu çalışmanın diğer bir sonucu sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinin 3. Talep düzeyinde yer alan cebirsel ifadelerle esnek çalışma diğer bir deyişle bir cebirsel ifadenin gerçekleştirilecek işlemler için en uygun olan formunun kullanılması için iç görü kullanma eyleminin tüm katılımcılar tarafından gerçekleştirilmediğidir. Araştırmada kullanılan 2. Sorunun uygulanan çözümlerinde beş katılımcının cebirsel ifadelerle esnek çalışma eylemini gerçekleştirilmeyerek 2. Talep düzeyinde işlemler yaptığı görülmüştür. Bununla beraber sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğini 3. Düzeyde etkinleştiren katılımcılar uygun cebirsel ifade formunu belirlemek için iç görü kullandıklarını belirten ifadelerle görüşmelerde yer vermişlerdir. Bu katılımcıların çözüm sürecinin adımlarını uygulamadan önce bir cebirsel ifade olan ortak çarpanı fark ettiklerini belirttikleri ve tüm işlemsel süreci ortak çarpan parantezinde yaparak işlemsel yükü azaltmayı hedeflediklerini ifade ettikleri görülmektedir. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinde talep düzeyi arttıkça kullanılan işlem sayısı, türü ve prosedürlerin artmasının her durumda doğru olmadığı bu çözüm yöntemleriyle görülmüştür. Sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinliğinin en yüksek talep düzeyinde iç görü kullanmak eylemi ile bilişsel sürecin bu yetkinlik için önemi ifade edilmektedir (Turner ve diğerleri, 2015).

Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği soruların çözümlerinde düşük düzeydedir. Soruların dördünün çözüm sürecinde herhangi bir çıkarım kullanılmamış veya verilen bilgilerden doğrudan çıkarım yapılmıştır. Öğretmenlerin genellikle çözüm sürecinde kullanılan matematiksel çıkarımları belirleyemedikleri ve çoğunluğunun değerlendirmelerinde daha düşük talep düzeyinde ele aldıkları görülmüştür. Bu değerlendirmelerde çözüm sürecinde yürütülen çıkarımları sözel olarak ifade etmek yerine verilen kısıtlamalar dahilinde değerler atayan öğretmenlerin yaptıkları çıkarımları ve kanıt göstermelerini akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği kapsamında ele almadıkları görülmektedir. Bununla beraber akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğinin yüksek düzeyde etkinleştirildiği altıncı soru birkaç katılımcı tarafından hangi amaca hizmet ettiği belli olmayan bir soru olduğu söylenilerek beğenilmezken diğer katılımcıların matematiksel muhakeme yapmayı gerektiriyor diyerek beğendiğini ifade ettikleri bir soru olmuştur. Bununla beraber akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğinin 0. düzeyde etkinleştirme gerektirdiği yedinci sorunun çözümünü değerlendiren dokuz öğretmen çözüm sürecinde strateji geliştirme, matematikleştirme, sembolleri, işlemleri ve resmi dili kullanma yetkinlikleri kapsamında ele alınmış



olan çeşitli adımları matematiksel çıkarım olarak da değerlendirmiştir. Bu bağlamda sorunun diğer beş yetkinlik için yüksek talep düzeylerinde etkinleştirme gerektirmesinin etkili olduğu düşünülmektedir. Bununla beraber sorunun çözüm sürecinde bilişsel süreçlerin etkisinin yüksek olmasından yola çıkarak akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğinin tüm bilişsel süreçleri kapsadığına dair bir yanlış algıya sahip oldukları söylenebilir. Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğine dair bulunan bu iki sonuç beraber ele alındığında öğretmenlerin ayırt etmekte en çok zorlandıkları ve öğretmen görüşlerinin birbirleriyle en farklılaştığı yetkinliğin akıl yürütme ve argüman geliştirme olduğu söylenebilir. Pettersen ve Nortvedt (2018) öğretmenlerin soruları matematiksel yetkinlikler çerçevesinde analiz ettikleri çalışmalarında en düşük güvenilirlik sonuçlarının akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliği için bulunduğunu belirtmiştir. Bununla beraber öğrencilerin fikirlerini hem konuşarak hem de yazarak ifade etmesi ve başkalarının matematiksel fikirleriyle ilgilenme ve dikkate alma fırsatlarının sunulması akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğinin geliştirilmesi için önemli görülmektedir (Turner ve Adams, 2012). Akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğini yüksek düzeyde etkinleştirmeyi gerektiren eylemleri öğretmenlerin belirlemede zorlanması öğrencilere akıl yürütme ve argüman geliştirme yetkinliğini geliştirmeye yönelik fırsatlar sunmayı hedefleyen öğretim faaliyetlerini bilinçli şekilde gerçekleştirmedikleri olarak yorumlanabilir.

Matematiksel yetkinlik taleplerini analiz etme becerileri geliştirilebilir beceriler olup zaman ve deneyim gerektirmektedir (Arbaugh ve Brown, 2005; Pettersen ve Nortvedt, 2018). Bu amaç doğrultusunda öğretmenlerin bir araya gelerek soru analizleri yapmaları ve matematiksel yetkinlik talepleri hakkında tartışmalar yapmaları önemlidir (Pettersen ve Nortvedt, 2018). Matematiksel yetkinlikler çerçevesinin öğretim faaliyetlerini yürüten öğretmenler tarafından da etkili şekilde kullanılabilmesi gerekli görülmektedir (Turner ve diğerleri, 2015). Matematiksel yetkinliğe sahip bireyler yetiştirmek ancak öğretmenlerin öğretim faaliyetlerini matematiksel yetkinlikleri geliştirmeye yönelik tasarımları ve seçmeleri ile mümkündür (Niss ve Højgaard, 2019; Turner ve diğerleri, 2015). Bu kapsamda, matematik öğretmenlerinin matematiksel yetkinlikleri analiz edebilmeleri için hizmet içi eğitimler planlanabilir. Matematik öğretim programında yer alan matematiksel okuryazarlık becerilerinin geliştirilebilmesi amacının yerine getirilebilmesi için matematik öğretmenlerinin matematiksel yetkinlikleri analiz edip derslerinde bu yetkinlikleri geliştirmeye yönelik planlamalar yapabilmeleri önemli görülmektedir.

**Etik Kurul Onayı:** Mersin Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Etik Kurulu Kararı 06/06/2022-239.

**Araştırmacıların Katkı Oranı:** Çalışmanın her bölümünde her iki yazarın katkısı eşit orandadır.

**Çatışma Beyanı:** Yazarlar potansiyel bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

## References

- Adleff, A. K., Ross, N., König, J., & Kaiser, G. (2023). Types of mathematical tasks in lower secondary classrooms in Germany: Statistical findings from a latent class analysis based on general mathematical competencies. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 371-392. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10254-9>

- Ahl, L. M., & Helenius, O. (2023). New demands on the symbols and formalism competency in the digital era. In U. T. Jankvist, & E. Geraniou, (Eds.). *Mathematical competencies in the digital era* (pp. 159-176). Springer.
- Altun, M. (2020). *Mathematics literacy handbook: Next generation question writing and instructional organization techniques* [Matematik okuryazarlığı el kitabı: Yeni nesil soru yazma ve öğretim düzenleme teknikleri]. Alfa Aktüel.
- Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2005). Analyzing mathematical tasks: A catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(11), 499-536. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-6585-3>
- Arı, M. E. (2022). *Examining the activity and measurement evaluation questions in the 8th grade mathematics lesson book and comparison with LGS exam questions and getting teacher's opinions* [8. sınıf matematik ders kitabındaki etkinlik ve ölçme değerlendirme sorularının incelenerek LGS sınav soruları ile karşılaştırılması ve öğretmen görüşlerinin alınması]. [Unpublished master's thesis]. Marmara University.
- Becevic, S. (2023). When teachers construct tests for assessing students' competencies: a taxonomy. *Educational Studies in Mathematics*, 114(2), 315-336. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10233-0>
- Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. [Unpublished doctoral thesis]. Umeå University.
- Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(3), 72-87. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001>
- Charalambous, C. Y., & Philippou, G. N. (2010). Teachers' concerns and efficacy beliefs about implementing a mathematics curriculum reform: Integrating two lines of inquiry. *Educational studies in Mathematics*, 75(1), 1-21. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9238-5>
- Creswell, J. W. (2017). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage.
- Çetin, B. Ş. (2019). *Investigation of mathematics teachers' views on the 2018 LGS system* [Matematik öğretmenlerinin 2018 LGS sistemine ilişkin görüşlerinin incelenmesi]. [Unpublished doctoral thesis]. Sakarya University.
- Çetin, A., & Ünsal, S. (2019). Social, psychological effects of central examinations on teachers and their reflections on teachers' curriculum implementations [Merkezi sınavların öğretmenler üzerinde sosyal, psikolojik etkisi ve öğretmenlerin öğretim programı uygulamalarına yansımaları]. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34(2), 304-323. <https://doi.org/10.16986/HUJE.2018040672>
- Erden, B. (2020). Teachers' views related to skill-based questions in Turkish, mathematics and science lessons [Türkçe, matematik ve fen bilimleri dersi beceri temelli sorularına ilişkin öğretmen görüşleri]. *Academia Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 5(2), 81-103.
- Fakhrunisa, F., & Hasanah, A. (2020). Students' algebraic thinking: A study of mathematical modelling competencies. *Journal of Physics: Conference Series*, 1521(3), 32-77. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1521/3/032077>
- Harks, B., Klieme, E., Hartig, J., & Leiss, D. (2014). Separating cognitive and content domains in mathematical competence. *Educational Assessment*, 19(4), 243-266. <https://doi.org/10.1080/10627197.2014.964114>
- Højgaard, T. (2021). Teaching for mathematical competence: The different foci of modelling competency and problem solving competency. *Quadrante*, 30(2), 101-122. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23691>
- Kertil, M., Dede, H. G., & Ulusoy, E. G. (2021). Skill-based mathematics questions: What do middle school mathematics teachers think about and how do they implement them? *Turkish Journal of*

*Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 12(1), 151-186.  
<https://doi.org/10.16949/turkbilmate.774651>

- Kilpatrick, J. (2014). Competency frameworks in mathematics education. S. Lerman (Ed.), In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 85-87). Springer.
- Küçükgençay, N., Karatepe, F., & Peker, B. (2021). Evaluation of LGS and sample mathematics questions within the learning areas and PISA 2012 framework [LGS ve örnek matematik sorularının öğrenme alanları ve PISA 2012 çerçevesinde değerlendirilmesi]. *Milli Eğitim Dergisi*, 50(232), 177-198. <https://doi.org/10.37669/milliegitim.741871>
- MoNE. (2018). *Primary school mathematics curriculum (Grades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8) [İlköğretim matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)]*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- MoNE. (2022). *LGS study workbook: Previous LGS exam questions and Ministry of National Education sample questions [LGS Çalışma Kitabı: LGS'de çıkmış sorular ve Milli Eğitim Bakanlığı örnek soruları]*. <http://odsgm.meb.gov.tr/www/e-kitaplar/icerik/605>
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference of mathematical education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy* (pp. 35–56). Springer.
- Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM*, 48(6), 611-632. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3>
- Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University Press.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(6), 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and analytical framework*. OECD Publishing.
- Özgeldi, M., & Aydın, U. (2021). Identifying competency demands in calculus textbook examples: The case of integrals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(1), 171-191. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10046-9>
- Pettersen, A. (2019). *Towards competency-oriented mathematics education: An investigation of task demands and teachers' knowledge of task demands from a competency perspective* [Unpublished doctoral thesis]. Oslo University.
- Pettersen, A., & Braeken, J. (2019). Mathematical competency demands of assessment items: A search for empirical evidence. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(2), 405-425. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9870-y>
- Pettersen, A., & Nortvedt, G. A. (2018). Identifying competency demands in mathematical tasks: Recognising what matters. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(6), 949-965. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9807-5>
- Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. (2010). The role of mathematical task in different cultures. Y. Shimizu, B. Kaur & R. Huang (Eds.), In *Mathematical tasks in classrooms around the world* (pp. 1-15). Sense Publishers.
- Şen, E. Ö., & Ünal, D. P. (2021). Evaluation of the mathematics course curriculum according to the Eisner Educational Criticism Model [Matematik dersi öğretim programının Eisner Eğitsel Eleştiri

- 
- Modeline göre değerlendirilmesi]. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 605-632. <https://doi.org/10.33711/yyuefd.1029100>
- Turner, R. (2012, April). *Some drivers of test item difficulty in mathematics* [Paper presentation]. The Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), Vancouver, Canada. <https://research.acer.edu.au/pisa/4>
- Turner, R., & Adams, R. J. (2012). *Some drivers of test item difficulty in mathematics: An analysis of the competency rubric*. American Educational Research Association (AERA).
- Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress. In K. Stacey, & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy* (pp. 85-115). Springer.
- Yüceer, E. G. (2023). *Examination of LGS mathematics items according to mathematics curriculum and TIMSS framework* [Lgs matematik sorularının matematik öğretim programına ve TIMSS çerçevesine göre incelenmesi]. [Unpublished doctoral thesis]. Necmettin Erbakan University.

## Appendix A

### Description and level explanations of mathematical competencies adapted from Özgeldi and Aydın (2021, pp. 175-178)

---

#### Communication

Understanding the presented information by imagining the situation, understanding the situation using mathematical terms, and presenting mathematical work by reading descriptions, instructions, questions, examples, and images.

- Level 0 Understanding a short sentence or expression related to a single familiar concept that is immediately accessible:  
All information is relevant to the task, and thought steps are presented in the correct sequence.  
The connection involves a single word or numerical result.
- Level 1 Describing, selecting, and extracting relevant elements of information:  
Understanding the context using links within the text; creating loops between the text and other representations. The connection is simple and extends beyond a single numerical result (e.g., writing a short expression or performing a calculation).
- Level 2 Providing a brief explanation about understanding instructions and selecting elements of information through repeated loops and linking multiple elements:  
Interpreting conditional statements or instructions or actively transmitting a generated explanation. The connection includes making a short explanation or a series of calculation steps.
- Level 3 Providing a brief explanation about recognizing and interpreting logically complex relationships:  
Creating an economical, clear, consistent, and comprehensive explanation of a solution, process, or argument. The connection involves developing an argument that includes multiple elements and connections.
- 

#### Devising Strategy

Selecting, creating, and implementing a mathematical strategy to solve problems arising from the context/task; monitoring and controlling the implementation of the involved processes.

- Level 0 Taking direct actions when the required strategy is clear:  
Using a specified solution strategy.
- Level 1 Identifying an appropriate strategy using the given relevant information:  
Creating a simple strategy that combines the relevant elements of the context into a single step.
- Level 2 Creating a strategy to transform the given information:  
Using a simple strategy involving multiple steps. Creating multi-stage strategies repeatedly to transform the given information requires controlled/targeted processing to use the strategy.
- Level 3 Reaching a comprehensive solution or generalized conclusion by creating a detailed strategy; evaluating or comparing strategies:  
Creating multi-stage strategies with advanced cognition to reach the solution.
- 

#### Mathematising

Transforming a non-mathematical situation into a mathematical model (e.g., structuring, idealizing, making assumptions, creating a model), interpreting or verifying a given or created model by relating it to the context.

- Level 0 There is entirely mathematical content, or the relationship between the real situation and the model is unnecessary for problem-solving:  
Issues arising within mathematical structures.
- Level 1 Making direct interpretations and deductions from a given model; converting the structure, variables, and relationships from a given situation to mathematics:  
Conceptualizing the situation appropriately; selecting and defining relevant variables; collecting relevant measurements; creating tables, diagrams, or figures.
-



- 
- Level 2 Modifying or using a given model to change conditions or interpret extracted relationships: Selecting a familiar model within specific and clear constraints; creating a model where necessary variables, relationships, and constraints are explicit and clear.
- Level 3 Establishing connections, comparisons, evaluations, or selections between different given models:  
Creating a model in a situation where assumptions, variables, relationships, and constraints will be identified or defined; verifying whether the created model meets the requirements of the context/task.
- 

#### Representation

Interpreting, analyzing, translating, and using given representations in a quest for a solution; selecting or creating representations to capture the situation or present one's own work. Representations include mathematical objects or depictions of relationships such as equations, formulas, graphs, tables, diagrams, pictures, text descriptions, concrete materials.

- Level 0 Using a representation that requires minimal interpretation:  
Directly translating from text to a number; reading a value directly from a diagram, graph, or table.
- Level 1 Using and interpreting a standard or familiar representation:  
Comparing data; showing or interpreting trends and relationships.
- Level 2 Translating or using between two or more different representations:  
Changing one representation; representing a situation with a simple representation; creating a representation that significantly requires analysis.
- Level 3 Using and interpreting a non-standard representation:  
Creating a representation that captures a complex mathematical situation; comparing or evaluating multiple representations; contextualizing representations of various mathematical entities.
- 

#### Using Symbols, Operations, and Formalism

Understanding and using definitions, symbols, and truths; manipulating symbolic expressions within a mathematical context (e.g., arithmetic expressions and operations or algorithms and procedures) determined by mathematical traditions and rules; understanding and using structures based on definitions, rules, and formal systems.

- Level 0 No need to activate mathematical rules or symbolic expressions beyond basic arithmetic calculations:  
Using basic mathematical definitions, symbols, and truths; performing a few arithmetic calculations involving easily traceable numbers.
- Level 1 Directly using a simple functional relationship:  
Using familiar linear relationships; using formal mathematical symbols related to fractions and decimals, direct substitution, or continuous arithmetic calculations; directly activating the formal mathematical definition, symbolic concept, tradition, or rule.
- Level 2 Explicitly using and manipulating symbols:  
Manipulating symbols algebraically by rearranging them; using mathematical rules, definitions, traditions, procedures, or formulas by employing a combination of multiple relationships or symbolic concepts; using formally expressed mathematical relationships involving multiple components; using repeated or continuous calculations, creating simple functional relationships.
- Level 3 Multi-step application of formal mathematical procedures:  
Working flexibly with functional or complex algebraic relationships; producing results and drawing conclusions using both mathematical techniques and knowledge; applying multi-step formal mathematical procedures; using a large number of functional relationships in repeated or continuous calculations.
- 

#### Reasoning and Argument

Engaging in logically driven thought processes to discover and connect problem elements, draw conclusions from them, or verify given validity or justify statements; producing mathematical arguments

---

about the credibility of conclusions (e.g., about why the conclusions rely on specific properties of mathematical components, such as objects, concepts, and transformations).

Level 0	Drawing direct conclusions from given information and instructions: Developing a simple mathematical argument.
Level 1	Thinking to combine information to draw conclusions: Combining separate components in the problem; direct reasoning within a context/task/problem.
Level 2	Analyzing information to follow or construct a multi-step argument: Combining multiple mathematical elements (e.g., variables, objects, concepts, and transformations); reasoning from connected sources of information.
Level 3	Synthesizing and evaluating, constructing reasoning chains, using or creating them: Justifying or generalizing conclusions sustainably and purposefully using multiple pieces of information; shaping, examining, or justifying arguments and conclusions using multiple contexts/tasks/problem elements.

### Özgeldi ve Aydın'den (2021, s. 175-178) adapte edilmiş matematik yetkinliklerin tanımları ve seviye açıklamaları

#### İletişim

Açıklamaları, talimatları, soruları, örnekleri ve görüntüleri okuyarak, sunulan bilgiyi anlamak için durumu hayal etme, matematik terimlerini kullanarak durumu anlama ve matematiksel çalışmayı sunmadır.

Seviye 0	Hemen erişim sağlayan tek bir tanıdık kavrama ilişkin kısa bir cümleyi veya ifadeyi anlama: Tüm bilgi görevle ilgilidir ve düşünce adımları doğru sırayla sunulur. Bağlantı, tek bir kelime veya sayısal sonucu içerir.
Seviye 1	Bilgiyi tanımlama, seçme ve ilgili unsurları çıkarma: Metin içinde bağlantılar kullanarak bağlamı anlamak; metinle diğer temsiller arasında döngü oluşturmaz. Bağlantı basittir ve tek bir sayısal sonuçtan öteye gider (örneğin, kısa bir ifade yazma veya hesaplama yapma).
Seviye 2	Talimatları anlama ve bilgi unsurlarını seçme için tekrarlanan döngüler ve çoklu unsurları bağlama hakkında kısa bir açıklama: Koşullu ifadeleri veya talimatları yorumlama veya oluşturulan bir açıklamayı aktif olarak iletir. Bağlantı, kısa bir açıklama yapmayı veya hesaplama adımlarının bir dizisini içerir.
Seviye 3	Mantıksal olarak karmaşık ilişkileri tanıma ve yorumlama hakkında kısa bir açıklama: Bir çözüm, süreç veya argümanın ekonomik, net, tutarlı ve eksiksiz bir açıklamasını oluşturmaz. Bağlantı, birden fazla unsuru ve bağlantıyı içeren bir argüman geliştirmeyi içerir.

#### Strateji oluşturma

Bağlam/görevden kaynaklanan sorunları çözmek için matematiksel bir stratejiyi seçme, oluşturma ve uygulama; dahil olan süreçlerin uygulanmasını izleme ve kontrol etmedir.

Seviye 0	Gerekli strateji açık olduğunda doğrudan eylemler alınır: Belirtilen bir çözüm stratejisini kullanmaz.
Seviye 1	İlgili verilen bilgiyi kullanarak uygun bir strateji belirleme: Bağlamın ilgili unsurlarını birleştiren tek bir adım içeren basit bir strateji oluşturmaz.
Seviye 2	Verilen bilgiyi dönüştürmek için bir strateji oluşturma:

---

	Birden fazla adımı içeren basit bir stratejiyi kullanmadır. Verilen bilgiyi dönüştürmek için tekrar tekrar çok aşamalı stratejiler oluşturma, stratejiyi kullanmak kontrollü/hedefli işleme gerektirir.
Seviye 3	Detaylı bir strateji oluşturarak kapsamlı bir çözüme veya genelleştirilmiş bir sonuca ulaşma; stratejileri değerlendirme veya karşılaştırma: Çözüme ulaşmak için üstbiliş öneme sahip çok aşamalı stratejiler oluşturmazdır.

---

### Matematikselleştirme

Matematik dışı bir durumu matematiksel bir modele dönüştürme (örneğin, yapılandırma, idealize etme, varsayımlar yapma, bir model oluşturma), bir verilen veya oluşturulan modeli bağlamla ilişkilendirerek yorumlama veya doğrulamadır.

Seviye 0	Tamamen matematiksel bir içerik vardır ya da gerçek durum ile model arasındaki ilişki problem çözümünde gereksizdir: Matematiksel yapılar içinde ortaya çıkan sorunlardır.
Seviye 1	Verilen bir modelden doğrudan yorum yapma ve sonuç çıkarma; yapı, değişkenler ve ilişkiler verilen bir durumdan matematiğe dönüştürülür: Durumu ilgili şekilde kavramlaştırma; ilgili değişkenleri seçme ve tanımlama; ilgili ölçümleri toplama; tablolar, diyagramlar veya şekiller oluşturmazdır.
Seviye 2	Koşulları değiştirmek veya çıkarılan ilişkileri yorumlamak için bir verilen modeli değiştirme veya kullanma: Belirli ve net kısıtlamalar içinde tanıdık bir model seçme; gerekli değişkenlerin, ilişkilerin ve kısıtlamaların açık ve net olduğu bir model oluşturmazdır.
Seviye 3	Farklı verilen modeller arasında bağlantı kurma, karşılaştırma, değerlendirme veya seçme: Varsayımların, değişkenlerin, ilişkilerin ve kısıtlamaların belirleneceği veya tanımlanacağı bir durumda bir model oluşturma; oluşturulan modelin bağlam/görevin gereksinimlerini karşılayıp karşılamadığını kontrol etmedir.

---

### Temsil

Bir çözüm arayışında verilen temsilleri yorumlama, çözümlenme, aralarında çeviri yapma ve kullanma; durumu yakalamak veya kendi çalışmasını sunmak için temsilleri seçme veya oluşturmazdır. Temsiller, denklemler, formüller, grafikler, tablolar, diyagramlar, resimler, metin açıklamaları, somut materyaller gibi matematiksel nesnelere veya ilişkilerin tasvirlerini içerir.

Seviye 0	Minimal yorum gerektiren bir temsil kullanma: Metinden doğrudan sayıya geçme; diyagramdan, grafikten veya tablodan doğrudan bir değeri okumadır.
Seviye 1	Standart veya tanıdık bir temsil kullanma ve yorumlama: Verileri karşılaştırma; trendleri ve ilişkileri gösterme veya yorumlamadır.
Seviye 2	İki veya daha fazla farklı temsil arasında çeviri yapma veya kullanma: Bir temsili değiştirme; bir durumu basit bir temsil ile gösterme; önemli ölçüde çözümlenme gerektiren bir temsil oluşturmazdır.
Seviye 3	Standart olmayan bir temsil kullanma ve yorumlama: Karmaşık bir matematiksel durumu yakalayan bir temsil oluşturma; birden fazla temsili karşılaştırma veya değerlendirme; çeşitli matematiksel varlıkların temsillerini bağlamadır.

---

### Semboller ve formalizm

Tanımları, sembolleri ve gerçekleri anlama ve kullanma; matematiksel bağlam içinde sembolik ifadeleri manipüle etme (örneğin, aritmetik ifadeler ve işlemler veya algoritmalar ve prosedürler), matematiksel gelenekler ve kurallar tarafından belirlenen; tanımlara, kurallara ve formal sistemlere dayalı yapıları anlama ve kullanmadır.

Seviye 0	Temel aritmetik hesaplamalardan öteye geçmeden matematiksel kurallar veya sembolik ifadelerin etkinleştirilmesine ihtiyaç yoktur:
----------	---

---

---

Seviye 1	Temel matematiksel tanımları, sembolleri ve gerçekleri kullanma; kolayca izlenebilir sayılar içeren birkaç aritmetik hesaplama yapmadır. Doğrudan kullanılan basit bir işlevsel ilişki: Tanıdık doğrusal ilişkileri kullanma; kesirler ve ondalıklarla ilgili formal matematik sembollerini kullanma, doğrudan yerine koyma veya kesintisiz aritmetik hesaplamaları kullanma; resmi matematiksel tanımı, sembolik kavramı, geleneksel veya kuralı doğrudan etkinleştirmedir.
Seviye 2	Sembollerin açıkça kullanılması ve manipülasyonu: Sembolleri cebirsel olarak yeniden düzenleyerek manipüle etme; birden çok ilişki veya sembolik kavramın bir kombinasyonunu kullanarak matematiksel kuralları, tanımları, gelenekleri, prosedürleri veya formülleri kullanma; birden çok bileşen içeren resmi olarak ifade edilmiş matematiksel ilişkileri kullanma; tekrarlanan veya kesintisiz hesaplamaları kullanma, basit işlevsel ilişkileri oluşturmazdır.
Seviye 3	Resmi matematiksel prosedürlerin çok adımlı uygulaması: Esnek bir şekilde fonksiyonel veya karmaşık cebirsel ilişkilerle çalışma; hem matematiksel teknik hem de bilgi kullanarak sonuç üretme ve sonuçlar çıkarma; çok adımlı resmi matematiksel prosedürleri uygulama; tekrarlanan veya sürekli hesaplamalarda çok sayıda işlevsel ilişki kullanmadır.

---

### **Akıl yürütme ve argüman**

Mantıklı kökenli düşünce süreçleri, problem unsurlarını keşfetmek ve birbirine bağlamak suretiyle bunlardan sonuçlar çıkarmak veya verilen bir haklılığı kontrol etmek veya ifadeleri haklı çıkarmak için; sonuçların inandırıcılığı hakkında matematiksel argümanlar üretmektir (örneğin, sonuçların neden matematiksel bileşenlerin özgül özelliklerine, nesnelere, kavramlar ve dönüşümler gibi, dayandığı hakkında).

Seviye 0	Verilen bilgi ve talimatlardan doğrudan sonuçlar çıkarma: Basit bir matematiksel argüman geliştirmedir.
Seviye 1	Sonuçlar çıkarmak için bilgiyi birleştirmek için düşünme: Problemde bulunan ayrı bileşenleri birleştirme; bağlam/görev/problem içindeki bir yönü içinde doğrudan akıl yürütmedir.
Seviye 2	Bilgiyi takip etmek veya çok adımlı bir argüman oluşturmak için bilgiyi analiz etme: Birçok matematiksel unsuru birleştirme (örneğin, değişkenler, nesnelere, kavramlar ve dönüşümler); bağlı bilgi kaynaklarından akıl yürütmedir.
Seviye 3	Sentezlemek ve değerlendirmek, akıl yürütme zincirleri oluşturmak, kullanmak veya oluşturmak: birden çok bilgi unsurunu kullanarak sürdürülebilir ve yönlendirilmiş bir şekilde sonuçları haklı çıkarma veya genelleme yapma; çoklu bağlam/görev/problem unsurlarını kullanarak argümanları ve sonuçları şekillendirme, inceleme veya haklı çıkarmadır.

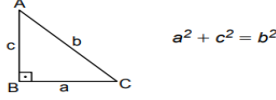
---

## Appendix B

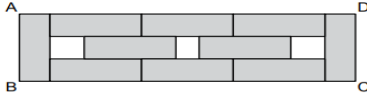
### Question Form

1)

Dik üçgenlerde  $90^\circ$  lik açının karşısındaki kenara hipotenüs denir.  
Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.



ABCD dikdörtgeni biçimindeki bir kâğıt parçasının bir yüzüne aşağıdaki gibi 10 eş dikdörtgen çizilip bu dikdörtgenler boyanıyor.

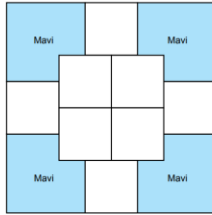


Kâğıdın bu yüzündeki boyanmayan bölgelerin alanları toplamı  $30 \text{ cm}^2$  olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin köşegenlerinden birinin uzunluğu kaç santimetredir?

- A)  $3\sqrt{10}$       B)  $5\sqrt{26}$   
C)  $10\sqrt{13}$       D)  $26\sqrt{10}$

3)

Kare şeklindeki bir kâğıdın bir yüzü aşağıdaki gibi sekiz eş beyaz bölgeye ve dört eş mavi bölgeye ayrılmıştır.



Beyaz bölgelerden her biri, alanı  $(4x^2 + 8x + 4) \text{ cm}^2$  olan karesel bölgelerdir.

Buna göre mavi bölgelerden birinin alanını santimetrekare cinsinden veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $6(x+1)^2$       B)  $8(x+1)^2$       C)  $4(x+2)^2$       D)  $2(x+2)^2$

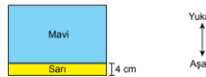
5)

Uzun kenarlarının uzunlukları birbirine eşit, kısa kenarlarının uzunlukları 20 cm ve 8 cm olan dikdörtgen şeklinde iki karton Şekil I'de verilmiştir.



Şekil I

Bu kartonlar Şekil II'deki gibi uzun kenarları paralel olacak ve sarı karton altına kalacak biçimde üst üste yerleştirildiğinde mavi dikdörtgenin uzun kenarı, sarı dikdörtgenin iki eş parçaya ayrılmakta ve eş parçalardan biri mavi dikdörtgenin altında kalmaktadır.



Şekil II

Kartonlar Şekil II'deki konumlarındayken sarı dikdörtgenin sabit kalmak üzere mavi dikdörtgenin sarı dikdörtgenin üzerine aşağıya doğru x cm hareket ettirildiğinde sarı dikdörtgenin tamamı mavi dikdörtgenin altında kalmaktadır.

Buna göre x'in alabileceği değerleri santimetre cinsinden gösteren eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

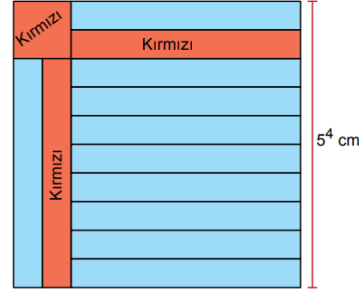
- A)  $4 \leq x \leq 16$       B)  $4 \leq x \leq 20$       C)  $2 \leq x \leq 16$       D)  $8 \leq x \leq 20$

2)

$a \neq 0$  ve  $m, n$  tam sayılar olmak üzere

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ ve } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ dir.}$$

Bir kenarının uzunluğu  $5^4$  cm olan kare şeklindeki kâğıdın bir yüzüne aşağıdaki gibi 12 eş dikdörtgen ve 1 kare çizilmiştir. Bu şekillerden kare ve 2 eş dikdörtgen kırmızıya boyanmıştır.

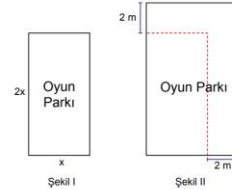


Buna göre kırmızı bölgelerin alanları toplamı kaç santimetrekaredir?

- A)  $2 \cdot 5^7$       B)  $5^7$       C)  $2 \cdot 5^6$       D)  $5^6$

4)

Kenarlarının uzunlukları x metre ve 2x metre olan dikdörtgen şeklindeki oyun parkının planı Şekil I'de verilmiştir. Bu oyun parkının kenarları 2 şer metre uzatılarak Şekil II'deki gibi dikdörtgen biçiminde bir oyun parkı planlanmıştır.

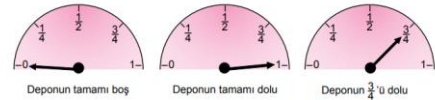


Buna göre Şekil II'deki oyun parkının alanının Şekil I'deki oyun parkının alanından kaç metrekare fazla olduğunu veren cebirsel ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $6x+4$       B)  $6x+6$       C)  $3x+2$       D)  $3x+4$

6)

Aşağıdaki yakıt göstergelerinde ibrenin ucu 0'ı gösterdiğinde yakıt deposunun tamamının boş olduğu, 1'i gösterdiğinde tamamının dolu olduğu ve 0 ile 1 arasında eşit aralıklarla konulan çizgilerden herhangi birini gösterdiğinde ise kaçta kaçının dolu olduğu anlaşılmaktadır.



Deposu 48 litre yakıt alabilen bir aracın başlangıçta deposunda 30 litre yakıt bulunmaktadır. Bu araç x litre yakıt tükettikten sonra yakıt göstergesindeki ibrenin ucu  $\frac{1}{4}$  ile  $\frac{1}{2}$  arasındaki bir değeri göstermektedir.

Buna göre aracın tükettiği yakıt miktarını litre cinsinden gösteren eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

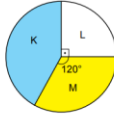
- A)  $36 < x < 48$       B)  $30 < x < 42$       C)  $18 < x < 30$       D)  $6 < x < 18$



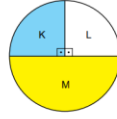
7)

Bir elektronik eşya mağazasında 2019 ve 2020 yıllarında satılan K, L ve M marka televizyon sayılarının dağılımı, aşağıdaki daire grafiklerinde gösterilmiştir.

Grafik 1: 2019 Yılında Satılan Televizyonların Dağılımı



Grafik 2: 2020 Yılında Satılan Televizyonların Dağılımı



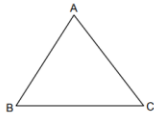
Bu mağazada 2020 yılında satılan L marka televizyon sayısı 2019 yılına göre 25 azalırken M marka televizyon sayısı 40 artmıştır.

Buna göre 2019 yılında satılan K marka televizyon sayısı kaçtır?

- A) 250 B) 240 C) 225 D) 210

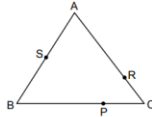
9)

Efe aşağıda verilen ABC üçgeninin açılarının ölçülerini esnemeyen bir ip yardımıyla sıralayacaktır.



Efe bu ipin bir ucunu;

- A köşesine koyup ipi [AB] ve [BC] ile çakıştırdığında ipin diğer ucu P noktasına,
- B köşesine koyup ipi [BC] ve [CA] ile çakıştırdığında ipin diğer ucu R noktasına,
- C köşesine koyup ipi [CA] ve [AB] ile çakıştırdığında ipin diğer ucu S noktasına gelmektedir.



$|BP| > |AS| > |CR|$  olduğuna göre ABC üçgeninin iç açılarının ölçülerinin doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $m(\hat{A}) > m(\hat{C}) > m(\hat{B})$  B)  $m(\hat{B}) > m(\hat{C}) > m(\hat{A})$   
C)  $m(\hat{C}) > m(\hat{B}) > m(\hat{A})$  D)  $m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$

11)

$$\text{Bir olayın olma olasılığı} = \frac{\text{İstenilen olası durumların sayısı}}{\text{Tüm olası durumların sayısı}}$$

Renkleri dışında özdeş olan toplardan 4'ü kırmızı, geri kalanı beyazdır. Bu topların tamamı aşağıdaki boş A, B ve C torbalarına dağıtılıyor.

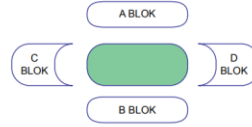


Bu torbaların her birinden rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı birbirine eşittir.

Buna göre başlangıçtaki beyaz top sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 80 B) 82 C) 88 D) 92

8)

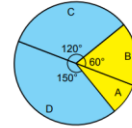


Yukarıda oturma planı verilen stadyumda oynanacak bir maç için satışa çıkarılan biletlerin %80'i satılmıştır. Biletlerin bloklara göre ücretlerini gösteren tablo ve satılmayan biletlerin sayısının bloklara göre dağılımını gösteren daire grafiği aşağıda verilmiştir.

Tablo: Bloklara Göre Bilet Ücretleri

Bloklar	1 Adet Bilet Ücreti (TL)
A	20
B	20
C	10
D	10

Grafik: Satılmayan Biletlerin Sayısının Bloklara Göre Dağılımı

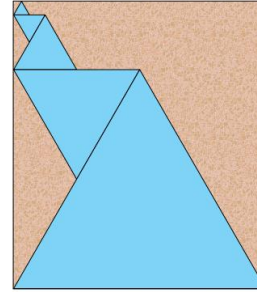
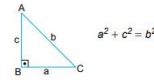


Satılmayan biletlerin toplam ücreti 15 000 TL olduğuna göre bu maç için satışa çıkarılan bilet sayısı kaçtır?

- A) 5000 B) 6000 C) 7200 D) 8400

10)

Dik üçgenlerde,  $90^\circ$  lik açının karşısındaki kenara hipotenüs denir. Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.



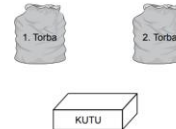
Eşkenar üçgen şeklindeki beş karton, dikdörtgen şeklindeki panonun ön yüzüne, birer kenarları ve birer köşeleri çakıştırılarak panonun yüzünden taşmayacak biçimde yukarıdaki gibi yerleştirilmiştir. Birer kenarları aynı doğru parçası üzerinde ve birer köşeleri ortak olan eşkenar üçgenlerin benzerlik oranı  $\frac{1}{2}$  dir.

Bu üçgenlerden birinin çevresinin uzunluğu 96 cm olduğuna göre panonun ön yüzünün alanı en az kaç santimetrekaredir?

- A)  $672\sqrt{3}$  B)  $832\sqrt{3}$  C)  $908\sqrt{3}$  D)  $992\sqrt{3}$

12)

$$\text{Bir olayın olma olasılığı} = \frac{\text{İstenilen olası durumların sayısı}}{\text{Tüm olası durumların sayısı}}$$



İçinde kırmızı veya sarı renkli 5 topun bulunduğu 1. torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı daha fazladır. Ayrıca mavi veya sarı renkli 7 topun bulunduğu 2. torbadan rastgele çekilen bir topun sarı olma olasılığı daha azdır. 1. ve 2. torbadaki topların tamamı boş bir kutuya atılıp karıştırılıyor.

Topların tamamı renkleri dışında özdeş olduğuna göre bu kutudan rastgele çekilen bir topun sarı olma olasılığı en fazla kaçtır?

- A)  $\frac{1}{6}$  B)  $\frac{1}{4}$  C)  $\frac{5}{12}$  D)  $\frac{7}{12}$