İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 02 Özel Sayı Sayfa 7-15 Ağustos 2003

Sihirli Kare Matrislerin Öz Değerlerinin İncelenmesi ve Moore-Penrose İnversi

Fikri AKDENİZ* Asuman Seda TÜRKMEN**

ÖZET

Bu çalışmada nxn biçimindeki reel girişlere sahip bazı sihirli ya da yarı-sihirli kare matrisleri inceleyeceğiz. Singüler olan matrislerin öz değerlerini ve Moore -Penrose inverslerini vereceğiz.

Anahtar Kelimeler: *Moore-Penrose inversi, Öz değer, Sihirli kare, Sihirli sabit, Yarı- sihirli kare.*

1. GİRİŞ

$1,2,\ldots,n^2$ sayılarının nxn kare matris içine her satır , sütun ve köşegen toplamları aynı s sayısına eşit olacak şekildeki düzenlenmesine n-inci mertebeden sihirli kare ve s sayısına "sihirli sabit" denir. Yalnız satır ve sütun toplamlarının tümü sabit bir s sayısına eşit olan kare matrise yarı- sihirli kare denir.Bu durumda $ns=1+2+\ldots+n^2$ olduğundan $s=n(n^2+1)/2$ dir.
Örneğin, 3×3 tipindeki (LO-SHU) denilen aşağıdaki sihirli karede sihirli sabit $s=3(3^2+1)/2=15$ tir.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ünlü Alman ressamı Albert Dürer (1471-1528) tarafından yapılan "Melancolia" tablosunda yer alan ve annesinin ölüm tarihi 1514 yılını da içeren aşağıda D ile gösterilen sihirli kareyi inceleyelim. n=4 olduğundan $s=4(4^2+1)/2=34$ dir. Görüldüğü gibi satır, sütun ve köşegen toplamları 34 tür. Örneğin, dört köşedeki 2x2 matrislerin sayılar toplamı da s=34 tür.

$$D=\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

*Prof. Dr. Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 01330 Adana. E-mail: akdeniz@mail.cu.edu.tr (Haberleşme adresi)
**Arş. Gör. Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 01330 Adana.

Yukarıdaki D karesinde toplamları 34 ü veren çok sayıda kalıp vardır. Bunların bir kısmı:

16+3+5+10=34, 16+4+1+13=34, 5+9+12+8 =34, 3+9+14+8 =34
2+5+15+12=34, 3+9+15+7=34, 3+5+15+11=34, 5+4+14+11=34
16+9+7+2 =34, 3+6+12+13=34, 10+15+1+8 =34

dir. Ayrıca ilk satırdaki 3 ve 2 ile son satırdaki 15 ve 14 ün toplamı 34 tür. Saatın çalışma yönünde gidersek 15, 9, 2, 8 toplamı da 34 tür. 4x4 tipinde 880 sihirli kare yazılabilmektedir.

Çalışma üç bölüm olarak planlanmıştır. İkinci bölümde 8x8 biçimindeki sihirli kareleri tanıtacağız. Üçüncü bölümde yarı- sihirli karelerdeki Moore- Penrose inversin bazı özellikleri ile birlikte öz değerler ve matrislerin rankları verilecektir.

2. BENJAMİN FRANKLİN'İN SİHİRLİ KARELERİ

Matematik dünyasında bir çoğu henüz bilinmeyen bazı sihirli kareler 18. yüzyılda yaşamış olan Benjamin Franklin (1706-1790) tarafından oluşturulmuştur. Daha önce hiç yayınlanmamış olanı (Tablo 1) Pasles (2001) de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bir yazar, diplomat ve bilim adamı (fizikçi ve matematikçi) olarak Franklin kendi yaşadığı dönemde ve günümüzde de övgüye değer biridir. Örneğin, Londra ve Paris Bilimler Akademilerinin bilimsel üyeliğe seçtiği tek Amerikandı ve uzun yıllar da tek kalmıştı. Franklin'in matematiksel yaşamında sihirli kareler önemli yer tutmaktadır. Franklin'in formal eğitimi iki yıldan daha kısa bir sürede son bulmuştur. Esas itibariyle kendi kendini yetiştirmiştir. Günümüze kadar bir çok araştırmacının Franklin karelerini incelediğini biliyoruz. Aşağıdaki 8x8 tipindeki yarı-sihirli kare bunların en önemlilerinden biridir.

Tablo 1. Franklin'in 8x8 yarı-sihirli karesi

A=

52	61	04	13	20	29	36	45
14	03	62	51	46	35	30	19
53	60	05	12	21	28	37	44
11	06	59	54	43	38	27	22
55	58	07	10	23	26	39	42
09	08	57	56	41	40	25	24
50	63	02	15	18	31	34	47
16	01	64	49	48	33	32	17

Tablo 1. de A ile gösterilen karede satırların ve sütunların toplamı 260 dır. Yarı-sihirli karedir. Sırasıyla köşegen toplamları 260-32 ve 260+32 dir. Köşegen toplamları 260 değildir. Görüldüğü gibi k ve 65-k sayıları aynı satırda yer almaktadır.(I. satırda k=4 , 65-k=61; k=52 65-k=13; k=20 65-k=45; k=29 65-k= 36) ; köşelerdeki 2x2 karelerin sayılar toplamı=130 ; 2x4 veya 4x2 dikdörtgenlerdeki sayılar toplamı =260 dır.

Dört köşedeki 2x2 sayılar toplamı= 130 dur.(I. köşede 52+61+14+3=130 v.s). Her bir satırın ve sütunun toplamının yarısı da 130 dır. Görüldüğü gibi çok özel yapıda bir yarı-sihirli karedir.

Franklin tarafından verilen ve B ile göstereceğimiz diğer bir sihirli kare Tablo 2 de görülmektedir.

Tablo 2. Franklin'in diğer 8x8 sihirli karesi

17	47	30	36	21	43	26	40
32	34	19	45	28	38	23	41
33	31	46	20	37	27	42	24
48	18	35	29	44	22	39	25
49	15	62	4	53	11	58	8
64	2	51	13	60	6	55	9
1	63	14	52	5	59	10	56
16	50	3	61	12	54	7	57

Herhangi 2nx2n tipindeki sihirli kare oluşturmak için evrensel bir yöntem yoktur. En ilginç 8x8 yarı-sihirli kare Beverely'e aittir. 1848 de yayınlanmıştır. Sütun ve satır toplamları 260 tır. 2x2 köşeleri de yarı sihirli ve sihirli sayı 130 dur. Beverely tarafından verilen 8x8 yarı-sihirli kare matris C olsun. Köşegen toplamları sırasıyla 282 ve 210 dur. Birinci satırda: 01+48+31+50=130; 33+16+63+18=130 ve birinci sütunda: 01+30+47+52=130; 05+28+43+54=130 olmaktadır. Diğer satır ve sütunlarda da aynı sayılar bulunmaktadır.

Tablo 3. Beverely'nin 8x8 sihirli karesi

01	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	03	62	19	14	35
47	02	49	32	15	34	17	64
52	29	04	45	20	61	36	13
05	44	25	56	09	40	21	60
28	53	08	41	24	57	12	37
43	06	55	26	39	10	59	22
54	27	42	07	58	23	38	11

C yarı-sihirli karesinin bazı özelliklerini sonraki bölümde inceleyeceğiz.

3. YARI-SİHİRLİ KARELER VE MOORE-PENROSE İNVERSİ

Booth ve Booth (1955) de ifade edildiği gibi singüler olmayan bir sihirli (ya da yarı-sihirli) karenin elemanlarıyla oluşturulan bir matrisin tersi de bir sihirli karedir. s "sihirli-sabit" olmak üzere bir matrisin tersinin satır ve sütunlarının toplamları 1/s ye eşittir. Aşağıdaki 3x3 sihirli kareyi ele alalım. Singüler olmayan M matrisi için

$$M=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}2 & 9 & 4\\ 7 & 5 & 3\\ 6 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

Det(M)= $\Delta = -360$ tır.

$$M^{-1}=[a_{ij}]^{-1}=\left[\frac{A_{ji}}{\Delta}\right]=-\frac{1}{360}\begin{bmatrix}37 & -68 & 7\\ -38 & -8 & 22\\ -23 & 52 & -53\end{bmatrix}$$

Görülebileceği gibi M^{-1} matrisinin satır ve sütun toplamları 1/15 tir. Aynı özellik köşegen toplamları için de geçerlidir. Dürer'in sihirli karesine bakıldığında karşılık gelen kare matris singüler (tekil) ve rankı 3 tür. Bu nedenle Booth ve Booth (1955) deki sonuç uygulanamaz. O halde matrislerin Moore-Penrose (M-P) inverslerinin de sihirli kare özelliklerini taşıyıp taşımadığını öğrenmek istiyoruz.
Bir A matrisinin A^+ ile gösterilen M-P inversi aşağıdaki dört koşulu sağlarsa A^+ tek olarak tanımlanır.

$AA^+A=A$
$A^+AA^+=A^+$
$(AA^+)'=(AA^+)$
$(A^+A)'=A^+A$

A bir kare matris olmasa bile bu invers daima vardır (Rao ve Mitra (1971)). Yalnız (i) koşulu sağlanırsa A^+ yerine A^g gösterimi kullanılır ve $AA^gA=A$ ise, A^g ye A nın koşullu inversi (genelleştirilmiş inversi) denir. Her matris genelleştirilmiş inverse sahiptir, fakat tek olmayabilir. Ayrıca, α bir skaler olmak üzere

$$(\alpha A)^+=\alpha^+A^+ \quad \text{ve} \quad \alpha^+=\begin{cases}1/\alpha, & \alpha\neq 0\\ 0, & \alpha=0\end{cases}$$

dir.

Şimdi Albert Dürer tarafından yapılan "Melancolia" resminde yer alan aşağıdaki meşhur sihirli kareyi düşünelim:

$$D=\begin{bmatrix}16 & 03 & 02 & 13\\ 05 & 10 & 11 & 08\\ 09 & 06 & 07 & 12\\ 04 & 15 & 14 & 01\end{bmatrix}$$

Satır, sütun ve köşegen toplamları 34, dört köşedeki 2x2 alt kare matrislerin elemanlarının toplamı da 34 tür. D singüler bir matristir. Rank (D)=3 dür. D nin öz değerleri : $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 8.0$, $\lambda_3 = -8.0$, $\lambda_4 = 0$ ve İz (D)=s=34=$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ dir. D , 4x4 tipinde sihirli kare matrisin M-P inversi de sihirli kare olan bir matrise örnektir. Görüldüğü gibi D nin M-P inversi:

$$D^{+}=\frac{1}{(34).(80)}\begin{bmatrix} 275 & -201 & -167 & 173 \\ 37 & -31 & -65 & 139 \\ -99 & 105 & 71 & 3 \\ -133 & 207 & 241 & -235 \end{bmatrix}$$

dir. M-P inversindeki (i)-(iv) koşulları sağlanır (Trenkler (1994)). D matrisini

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

biçiminde parçalara ayırdığımızda

$$D_{11}=\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 11 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$, det (D) =136$\neq 0$, ve rank (D_{11}) =3 tür. $D_{12}=[13 \quad 8 \quad 12]'$, D_{21} $=[4 \quad 15 \quad 14]$, D_{22}= 1 ve $B=(D_{11}D_{11}' + D_{12}D_{12}')^{-1}D_{11}(D_{11}'D_{11} + D_{21}'D_{21})^{-1}$ olmak üzere

$$D^{+}=\begin{bmatrix} D_{11}'BD_{11}' & D_{11}'BD_{21}' \\ D_{12}'BD_{11}' & D_{12}'BD_{21}' \end{bmatrix}$$

bulunur. Görülebileceği gibi D^{+} nın satır, sütun ve köşegen toplamları , dört köşedeki alt kare matrislerdeki sayılar toplamı da 1/34 tür. j'=(1,1,1,1) ve s=34 olmak üzere $D^{+}j=\frac{1}{34}j$ ve $D^{+\prime}j=\frac{1}{34}j$ koşulları sağlanmaktadır. O halde aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem.1. Bir A kare matrisinin yarı-sihirli olabilmesi için gerek ve yeter koşul

Aj=sj,
A′j=sj

dir. Burada j'=(1,1,...,1) nx1 tipinde $\Re^{n}$ uzayında 1 lerin vektörüdür. Bu nedenle s ve j sırasıyla A ve A′ matrislerinin öz değeri ve öz vektörüdür. A nın sihirli kare matris olması için aşağıdaki iki koşul eklenmelidir.
tr(A)=s,
tr(EA)=s.

Burada $E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots 1 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & . \\ 1 & 0\ldots & & 0 \end{pmatrix}$

dir

Teorem 2. (Schmidt ve Trenkler (2001). $x \neq 0$ ve belli bazı λ skalerleri için kabul edelim ki

$Ax=\lambda x$,
$A'x=\lambda x$

dir. Bu durumda $A^{+}x=\lambda^{+}x=\lambda^{-1}x$ ve $A^{+'}x=\lambda^{+}x$ dir.

Şimdi aşağıdaki 4x4 tipinde yarı-sihirli kareyi düşünelim.

$$T=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 12 \\ 14 & 15 & 2 & 3 \\ 11 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 1 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

Burada s=34 dir. T nin öz değerleri: 34, 8, -2 ve 0 dir. Rank (T)=3 tür. T singülerdir. T matrisinin M-P inversi:

$$T^{+}=\begin{pmatrix} -0,11020658 & 0,032650560 & 0,05943627 & 0,04753151 \\ 0,09217437 & 0,020745798 & -0,02389706 & -0,05961134 \\ -0,07746849 & -0,006039916 & 0,03860294 & 0,07431723 \\ 0,12491246 & -0,017944678 & -0,04473039 & -0,03282563 \end{pmatrix}.$$

$$=\frac{1}{34.336}\begin{pmatrix} -1259 & 373 & 679 & 543 \\ 1053 & 237 & -273 & -681 \\ -885 & -69 & 441 & 849 \\ 1427 & -205 & -511 & -375 \end{pmatrix}$$

T^{+} ve $T^{+'}$ nin öz değerleri : -0.1351213, 0.02941176, 0.0202606, ve 0 dır. $T^{+}j=T^{+'}j=s^{-1}j$ koşulu sağlanmaktadır. Yukarıdaki teoremde x vektörü özel olarak j : 4x1 biçiminde bir vektör olarak alınmıştır. 4x4 tipindeki bazı yarı sihirli kare matrislerde rank(.) = 4 olmaktadır. Bu durumlarda doğal olarak $T^{-1}j=(T^{-1})'j=s^{-1}j$ eşitlikleri sağlanacaktır.

3.1 Bazı sihirli ya da yarı-sihirli kare matrislerin rank ve öz değerleri

Öncelikle 2. bölümde Benjamin Franklin tarafından oluşturulan ve A ile gösterdiğimiz Tablo 1. deki 8x8 kare matrisi düşünelim. A nın öz değerlerinin üçü $\lambda_1 = 260{,}00$, $\lambda_2 = -43{,}71281$, $\lambda_3 = 11{,}71281$ ve diğerleri sıfır olmaktadır. İz (A)=228= $\sum_{i=1}^{8} \lambda_i$ dır. rank (A)=3 tür. Görüldüğü gibi Aj=A′j=sj dir.

Tablo 2. de verilen 8x8 sihirli kare B olsun. B nin rankı 3 tür. B nin öz değerleri: $\lambda_1 = 260{,}00$, $\lambda_2 = -4.0 - 1{,}5491933i$, $\lambda_3 = -4.0 + 1{,}54913i$
ve diğerleri sıfır olmaktadır. Köşegen toplamları 260 ± 8 dir. Bu örneklerden görüldüğü gibi öz değerlerin tümü reel değildir.

Beverely tarafından verilen ve 1848 de yayınlanan 8x8 yarı-sihirli kare matris C olsun. Öz değerler:

$\lambda_1 = s = 260{,}00$, $\lambda_2 = -64{,}09064$, $\lambda_3 = 51{,}22422$, $\lambda_4 = 36{,}30959$, $\lambda_5 = -1{,}44317$, 0, 0, 0

dır. İz(C)= $\sum_{i=1}^{8} \lambda_i$ =282 dir. rank(C)=5 tir. C matrisi singüler matristir. C nin satır toplamları=sütun toplamları=260 dır. C nin M-P g-inversi C^+ ise, C^+ daki satır ve sütun toplamları 1/260 dır. Ayrıca C^+ nın 4x4 köşe kareleri de yarı-sihirlidir. Sihirli sabit 1/520 dir. $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ değerleri

$$\lambda^4 - 22\lambda^3 - 3784\lambda^2 + 113792\lambda + 172032 = 0$$

polinom denkleminin kökleridir. Aşağıda 6x6 ve 30x30 arasındaki bazı sihirli ya da yarı-sihirli kare matrislerin öz değerleri ve rankları verilmektedir. $A_0, A_1, \ldots, A_9$ ile gösterdiğimiz ve makaleye koyamadığımız kare matrisler birinci yazardan temin edilebilir.

6x6 (s=111)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 32 & 33 & 4 & 35 & 6 \\ 30 & 8 & 27 & 28 & 11 & 7 \\ 13 & 23 & 22 & 21 & 14 & 18 \\ 24 & 17 & 16 & 15 & 20 & 19 \\ 12 & 26 & 10 & 9 & 29 & 25 \\ 31 & 5 & 3 & 34 & 2 & 26 \end{bmatrix}$$

A_0 ile gösterdiğimiz bu matrisin rankı 6 dır. Öz değerleri: 111, 17,263998, -9,508564 ± 846467i, 7,808808, -6,055679 dir. Ayrıca, İz (A_0)=s= $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 111$ dir.

7x7 (s=175)

rank(A_1)=7 , Öz değerleri: 175; ±56,48483; ±31,08816; ± 25,39667

11X11 (s=671),
rank(A_2)=11 , Öz değerleri: 1. 671 2. –214,74 , 3. 214,74 , 4. 111,90 , 5. –111.90 6. 80.05 -80,05 , 8. –66,51 , 9. 66,51 , 10. –61,12 , 11. 61,12

12x12 (s=870),
rank(A_3)=3, sıfırdan farklı öz değerleri: 870 , –143,5 143,5

14x14 (s=1379),
rank(A_4)=6 , sıfırdan farklı öz değerleri: 1379, –142,0795 , 86,60846-50,92i , 86,60846+50,92i, –26,91910, -4,218317.

16x16 (s=2056),
rank(A_5)= 3, sıfırdan farklı öz değerler:
1. 2056, 2. 295,03, 3. –295,03
Franklin'in 16x16 sihirli karesi için rank(A_5)=3 ve öz değerleri 2056, -174,8513, 46,8513 tür. A_5^+ nın satır ve sütunlarının toplamları 1/2056 dır.

18x18 (s=2925),
rank(A_6)=6, sıfırdan farklı öz değerleri: 1. 2925, 2. –320,6437, 3. 174,7866-82,62i, 4. 174,7866+82,62i, 5. –23,52472, 6. –5,404836

22x22 (s=5335),
rank(A_7)=6, sıfırdan farklı öz değerleri: 1. 5335, 2. –572,7669, 3. 301,5333-105,36i, 4. 301,5333+105,36i, 5. –23,84709, 6. –6,452643

26x26 (s=8801),
rank(A_8) =6, sıfırdan farklı öz değerleri: 1. 8801, 2. –908,85, 3. 470,76-96,74i, 4. 470,76+96,74i, 5. –25,27, 6. –7,40

30x30(s=13515),
rank(A_9)=6 , sıfırdan farklı öz değerleri: 1. 13515, 2. –13336,80, 3. 787,67, 4. 584,61, 5. –27,19, 6. –8,29

Görüldüğü gibi nxn tipinde yarı-sihirli ya da sihirli kare matrislerde pozitif tam sayı olan en büyük öz değer sihirli sabit s ye eşit; (2n+1)x(2n+1) n=1,2,3,... tipinde yarı-sihirli ya da sihirli kare matrislerde diğer öz değerler $\alpha \pm i\beta$ ya da $-\gamma \pm \delta$ i, $\pm\xi$ biçiminde ve toplamları sıfırdır. Yani $\sum_{i=2}^{2n+1} \lambda_i = 0$ dır. O halde Teorem 1 ve Teorem 2 nin değerlendirilmesiyle aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3. A nxn tipinde singüler (ya da singüler olmayan) bir yarı-sihirli veya sihirli kare matris olsun . Sihirli sabit s olmak üzere A nın pozitif tam sayı olan en büyük öz değeri sihirli sabite eşittir.

Ayrıca kaynaklarda verilen 2nx2n tipinde n=2,3,4,... 15 yarı-sihirli ya da sihirli matrislerde rank(.)$\leq$6 olduğu görülmüştür. Bu açık problemin incelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

BOOTH, A. D. and BOOTH, K.H.V. (1955). On magic squares. *The Mathematical Gazette*, 39, 132-133.

PASLES, P.C. (2001). The lost squares of Dr. Franklin: Ben Franklin's missing squares and the secret of the magic circle. *TheAmerican Mathematical Monthly*, 108, 489-511.

RAO, C. R. and MITRA, S. K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, New York: John Wiley.

SCHMIDT, K. and TRENKLER, G. (2001) The Moore-Penrose inverse of a semi-magic square is semi-magic. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32, 624-629.

TRENKLER, G. (1994). Singular magic squres. International International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25, 595-597.

Some Remarks on the Eigenvalues of the Magic Matrices and Moore-Penrose Inverse

ABSTRACT

In this paper we consider some $n \times n$ magic or semi-magic (real) square matrices. We also examine the eigenvalues and the Moore-Penrose inverses of singular magic square matrices.

Key Words: *Eigenvalue, Magic constant, Magic square, Moore-Penrose inverse, Semi- magic square.*