İKTİSAT ve MALİYE

DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN İKTİSATTA KULLANIMI

Yazan : Dr. Erden ÖNEY

Doğrusal programlama özellikle İkinci Dünya Savaşı sonrasında yapılan çalışmalarla geliştirilmiş bir tekniktir. İktisatçılar tarafından iktisadi plâncılıkta ve sanayi alanında doğrusal programlama tekniğinden geniş ölçüde faydalanılmakta ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısı gün geçtikçe artmaktadır. Bilindiği gibi geri kalmış memleketlerde kıt iktisadi kaynakların dağılımı fiyat mekanizmasının yetersiz işleyişi dolayısı ile rasyonel olamamaktadır. Doğrusal porgramlama bu gibi memleketlerde kaynak dağılımı sorununa yol gösterici olmakta güçlü bir tekniktir. Özellikle plânlama devresine girmiş bulunan iktisaden geri kalmış ülkelerin kalkınma programlarının formüle edilmesinde ve kıt kaynaklarla geliri maximize eden optimal plânların hazırlanmasında önemli bir rol oynar.

Bu önemi dolayısı ile, bu yazıda, doğrusal iktisat dalının tarihi gelişimine kısaca değinilmiş ve sonra da doğrusal programlamanın tanımı ve formüle edilmesi, grafik ve «simplex» metodu ile çözümleme, dualite ve iktisadi anlamı, duyarlılık «sensitivity» analizi, basitleştirilmiş örneklerle gösterilmiş, plânlama ve iktisadi analiz aracı olarak faydaları belirtilmeye çalışılmıştır.

1. Doğrusal İktisadın Tarihi Gelişimi :

Doğrusal programlama konusundaki ilk çabaların Quesnay'in 1758 de yayınladığı *Tableau Economique* adlı kitabı ile başladığını söyleyebiliriz. Bununla beraber, doğrusal programlama alanında yapılan çalışmalar, Quesnay'den daha çok Walras'ın *Elemente d'Economie Politique* adlı eserinden etkilenmiştir. Bilindiği gibi, Walras'ın sistemi esas olarak genel bir denge sistemidir. Sistem, mal ve üretim faktörlerinin toplam arz ve talebini, her sektördeki üretim masraflarını, tüketici gelir ve harcamalarını gösteren denklem setlerinden kuruludur. Sistemde bilinmiyenlerin sayısı denklem sayısına eşittir. Ancak, bu eşitlik, denklemler sisteminin çözümü için gerekli ve yeterli değildir. Walras'ın genel denge sistemi üzerinde ilk yeterli çalışma doğrusal programlama teorisi kullanılarak Abraham Wald tarafından yapılmıştır.[1]

Walras sistemini genelleştirme konusunda çalışan Alman ve Avusturyalı iktisatçı ve matematikçiler arasında Von Neumann önemli bir yer tutar. Von Neumann gelişen bir ekonomi için dinamik doğrusal bir model geliştirmiştir.[2] Model tamamen doğrusal programlama çerçevesi içinde üretimle ilgilidir ve alternatif üretim metodları doğrusal eşitsizliklerle ifade edilmiştir. Modelde amaç açık bir şekilde belirtilmemiş olmakla beraber, piyasa kuvvetlerinin gelişme hızını maximize edebileceği gösterilmiştir.

Von Neumann'ın doğrusal iktisata en önemli katkısı *Oyun Teorisi* olmuştur. İktisatçı oyun teorisinin temel teoremlerini doğrusal eşitsizlik sistemlerinin formüle edilmesinde kullanmış ve ayrıca doğrusal programlama ve oyun teorisi problemlerinin sayısal çözümleri için bazı tekliflerde bulunmuştur.

Doğrusal iktisadın diğer önemli bir dalı da W. Leontief tarafından formüle edilmiş olan Input-Output analizidir. Leontief, belli bir mal ve hizmet talebini karşılamak için çeşitli endüstrilerin nekadar üretimde bulunması gerektiği sorusu ile ilgilenmiş ve Amerikan Ekonomisi için kantitatif bir model kurmuştur. Model, Walras'ın genel denge sisteminin basitleştirilmiş bir şeklidir. Leontief, Walras'ın «sabit üretim katsayıları» varsayımından hareket etmiş ve inputlar arası ikamelere yer vermemiştir.

Input-Output modelleri endüstrilerarası analizlerde ve dolayısı ile kalkınma programlarının hazırlanmasında geniş ölçüde faydalı bir araçtır. Ancak bütün bu faydasına rağmen, endüstrilerarası analiz, input-output yerine genel doğrusal programlama çerçevesi içinde formüle edilebilir, ve böylece input-output modellerinin varsayımlarından doğan kısıtlamalar giderilebilir. Doğrusal programlama, belli malların alternatif üretim imkânlarını ve üretim faaliyetleri arasındaki optimum seçimi göz önüne almış olmak bakımından Leontief modelinden ayrılır. Gerçekten input-output modelle-

---

[1] Abraham Wald, «Some Systems of Equations of Mathematical Economics,» *Econometrica*, XIX, No. 4 (Ekim 1951), sh: 368-403.

[2] John V. Neumann, «A Model of General Equilibrium,» *Review of Economic Studies*, XII, No. 1 (1945-46), sh: 1-9.

ri optimizasyon sorunu ile değil, fakat doğrusal denklemler setinin çözümü ile ilgilidir. Başka bir deyişle, Leontief sistemi her hangi bir minimum ya da maximum çözümü kapsamaz. Bununla beraber, input-output modeli ile doğrusal programlama arasında çok yakın bir ilişki olduğu da inkar edilemez. Çünkü inputlar arası ikamelerin teknolojik olarak mümkün olmadığı en basit Leontief sisteminde sadece tek bir optimum çözüm vardır ve bu bakımdan input-output basit bir doğrusal programlama modeli olarak kabul edilebilir.[3]

Doğrusal programlama problemi ilk defa Rus matematikçisi Kantorovitch tarafından formüle edilmiş, ancak her hangi bir çözüm yolu gösterilmemiştir. II. Dünya savaşından sonra doğrusal programlama teorisinde hızlı gelişmeler görülmüş ve pratikte artan bir uygulama gözlenmiştir. David Gale, H. Kuhn ve W. Tucker gibi iktisatçı ve matematikçiler özellikle dualite teorisinin gelişmesinde başlıca rolü oynamışlardır. Ancak doğrusal programlama problemlerinin çözüm metodu 1947 de *Simplex Metod* adı altında George B. Dantzig tarafından geliştirilmiştir. Bu bakımdan Dantzig doğrusal programlama alanında yapılan çalışmaların öncüsü olarak kabul edilmektedir.

2. Doğrusal Programlamanın Tanımı :

Doğrusal programlama problemi matematiksel olarak şöyle formüle edilebilir :

$$\begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n} X_n \leqq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n} X_n \leqq b_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn} X_n \leqq b_m \end{array}$$

ve $\qquad X_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

olmak kaydı ile

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n X_n$$

doğrusal fonksiyonu maximize (ya da minimize) eden $(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ vektörü aranmaktadır. Burada a_{ij}, b_i ve c_j bellidir ve $m<n$ dir. Aynı problem matrixle de gösterilebilir. Bu kere,

---

[3] R. Dorfman, Paul. G. Samuelson, R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1958), sh: 204.

$$AX \leqq B$$

ve

$$X \geq 0$$

şartları ile

$$CX$$

maximize (ya da minimize) edilmeye çalışılır. Burada $C = (c_1, \ldots, c_n)$ sıra vektörü, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sütun vektörü, $A = (a_{ij})$ katsayı matrixi ve $B = (b_1, \ldots, b_m)$ sütun vektörüdür. Problemin cinsine göre eşitsizlik işareti olan ($\leqq$) aksi yönde de olabilir.

Doğrusal programlamanın uygulama alanı geniş ölçüde iktisadi konularla ilgilidir. Çünkü doğrusal programlama optimum kaynak dağılımı probleminin çözümünü sağlayan faydalı bir araçtır. Bu bakımdan böyle bir problemin çözümünde nasıl kullanıldığını farazi bir örnekle göstermeye çalışalım.

Kısa devrede ve statik şartlar altında, her hangi bir ekonominin tarım kesiminde mevcut kaynaklarla gelirin maximize edilmesi isteniyor, olsun. Sadece üç mal (X_1, X_2 ve X_3) üretildiği ve output ünitesi başına net fiyatların, sırayla, 1, 6 ve 5 olduğu varsayılmaktadır. Böylece maximize edilmek istenen toplam gelir fonksiyonu

$$Z = X_1 + 6X_2 + 5X_3$$

ile gösterilebilir.

İkinci olarak sabit üretim katsayıları varsayılmaktadır. Yani,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

dir. Burada a_{ij}, j malından bir ünite üretmek için gerekli i kaynağı miktarını, X_j ,j malının üretim miktarını, ve x_{ij}, X_j yi üretmek için kullanılan toplam i kaynağı miktarını gösterir. Ayrıca ekonominin tarım kesiminde yapılacak üretim, kısa devrede, mevcut kaynak miktarı ile sınırlanmıştır. Kaynaklarla ilgili verileri sistemin sağ tarafına koyarak problemi şu şekilde formüle edebiliriz:

$$\begin{aligned} 8X_1 + 12X_2 + 6X_3 &\leqq 48 \quad \text{(Doğal kaynaklar)} \\ 2X_1 + 3X_2 + 6X_3 &\leqq 24 \quad \text{(Sermaye)} \\ 6X_1 + 2X_2 \qquad\quad &\leqq 24 \quad \text{(Emek)} \end{aligned}$$

ve

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

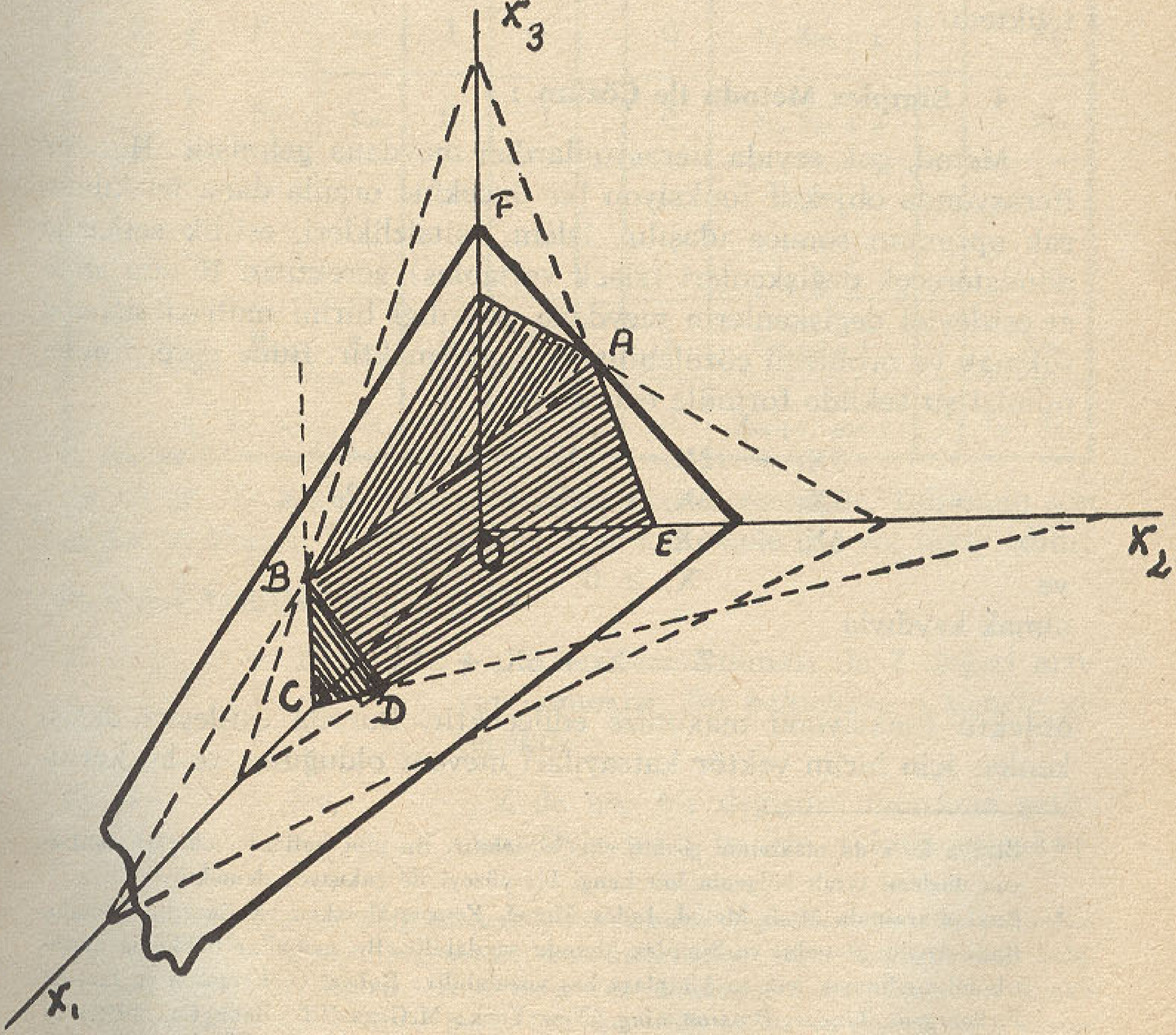
olmak kaydıyla

$$Z = X_1 + 6X_2 + 5X_3$$

fonksiyonunun maximizasyonu istenmektedir. Sistemin birinci eşitsizliği X_1, X_2 ve X_3 mallarının üretiminde kullanılan toplam doğal kaynak miktarını gösterir. Bu kesimde mevcut doğal kaynak 48 birim olduğuna göre, malların üretiminde kullanılacak toplam doğal kaynak miktarı mevcut seviyeyi (48 birimi) aşamaz. Zaten kısa devre kavramından anlaşılmak gereken de budur. Aynı şekilde ikinci ve üçüncü eşitsizlikler de malların üretiminde kullanılabilir toplam sermaye ve emek miktarlarını gösterirler. Böylece problem, her bir output ünitesinin net fiyatı (c_j) ve her bir üretim faktörünün üst sınırı (b_i) belli iken, her maldan (X_j) ne kadar üretilmesi gerektiği şeklinde özetlenebilir.

3. Grafikle Çözüm :

Yukardaki problem grafikle çözülebilir. Aşağıdaki şekilde koordinatlar bilinmiyenleri göstermektedir. Siyah çizgilerle taran-



Şekil : 1 — Problemin grafikle çözümü

mış bölge «kabul edilebilir» (feasible) çözümleri verir. Ancak optimal çözüm, maximize edilmek istenen objektif fonksiyon yardımı ile bulunabilir. Z fonksiyonuna çeşitli değerler verilmek suretile, çok sayıda, birbirine paralel düzlemler elde edilebilir. Bu düzlemlerle «kabul edilebilir» çözümleri gösteren taralı bölge arasında maximum çözümü veren en az bir müşterek nokta bulunabilir. Şekilde objektif fonksiyon kalın çizgi ile gösterilmiştir. A noktası müşterek nokta olup maximum çözümü vermektedir.[4]

Doğrusal programlama problemlerinin grafikle çözümü, değişken sayısı üçü geçtiği hallerde oldukça güçtür. Bu gibi durumlarda geliştirilmiş diğer çözüm metodlarına başvurmak gerekir.[5] Bunlar içinde «Simplex Metodu» genel ve klâsik bir çözüm tekniği olup diğerlerine oranla kapsamı daha geniş problemlere uygulanabilir niteliktedir.

4. Simplex Metodu ile Çözüm :

Metod, çok sayıda iterasyonlardan meydana gelmiştir. Her bir iterasyonda objektif fonksiyon bir öncekine oranla daha iyi kılınarak optimum sonuca ulaşılır. İşlem, eşitsizlikleri, eşitlik setlerine dönüşterecek değişkenleri (slack variables) gerektirir. Bunun amacı eşitleyici değişkenlerin meydana getirdiği birim matrixi sisteme sokmak ve problemi çözülebilir hale getirmektir. Buna göre problemimizi şu şekilde formüle edebiliriz:

$$\begin{aligned} 8X_1 + 12X_2 + 6X_3 + s_1 &= 48 \\ 2X_1 + 3X_2 + 6X_3 + s_2 &= 24 \\ 6X_1 + 6X_2 \qquad\quad + s_3 &= 24 \end{aligned}$$

ve

$$X_j \geq 0$$

olmak kaydıyla

$$Z = X_1 + 6X_2 + 5X_3$$

objektif fonksiyonu maximize edilecektir. Burada eşitleyici değişkenler için birim vektör katsayıları mevcut olduğuna, ve bu katsa-

---

[4] Birden fazla da maximum çözüm elde edilebilir. Bu gibi hallerde, objektif fonksiyon düzlemi taralı bölgenin her hangi bir yüzeyi ile çakışıyor demektir.

[5] Bunlar arasında Modi Metod, Index Metod, Fourier-Motzken eliminasyon metodu, Ratio-Analiz Metodu, ve Simplex Metodu sayılabilir. Bu metodlar hakkında ayrıntılı bilgi edinmek için şu kitaplara baş vurulabilir: Robert O. Ferguson ve Lauren F. Seargent, *Linear Programming* (New York: McGraw-Hill Book Co., 1958) ve George B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions* (Princeton: Princeton University Press, 1963).

yılar da doğrusal olarak bağımsız olduklarına göre, bu değişkenler *ilk temel çözüm* olarak kabul edilebilir.[6] Bu, sistemdeki diğer değişkenlerin sıfır değer alması anlamına gelir. Grafikte 0 noktası bu çözüme tekabül etmektedir.

İlk temel çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir. Objektif fonksiyonun değerini daha iyi yapacak diğer çözümlere belli bir sıra için-

İLK ÇÖZÜM TABLOSU

c_i \ c_j			c_1	c_2	.	c_m	c_{m+1}	.	c_n
	Temel	P_0	P_1	P_2	.	P_m	P_{m+1}	.	P_n
c_1	P_1	x_{10}	1	0	.	0	$x_{1,m+1}$	.	x_{1n}
c_2	P_2	x_{20}	0	1	.	0	$x_{2,m+1}$	.	x_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c_m	P_m	x_{m0}	0	0	.	1	$x_{m,m+1}$	.	x_{mn}
	$Z_j - c_j$	Z_0	0	0	.	0	$Z_{m+1} - _{m+1}$	.	$Z_n - c_n$

de geçilir. *İlk kademe* simplex kriterini test etmektir. Tablonun son sırası bu kriteri, $Z_j - c_j$, gösterir. Test için şöyle bir yol takip edilir:

MAXİMUM ÇÖZÜMLER İÇİN

$Z_j - c_j < 0$ ise, j nin temele sokulması ile Z değeri artıyor demektir. Bu bakımdan j temele girecektir.

$Z_j - c_j \geq 0$ ise, j, Z de hiç bir değişme meydana getirmez. Öyle ise j temele sokulmayacaktır.

---

[6] Bu yazıda doğrusal programlamanın teoremlerine değinilmemiştir. Bu bakımdan «vektörlerin doğrusal bağımlılığı» teoreminin isbatı başka kaynaklardan bulunabilir. Örneğin bakınız, David Gale, *The Theory of Linear Economic Models* (New York: McGraw-Hill, Book, Co., 1960), sh: 32-35 ve Saul I Gass, *Linear Programming: Methods and Applications* (NewYork: McGraw-Hill Book Co., 1964), sh: 50-51.

Eğer bütün j ler için bu şart sağlanmışsa maximum çözüme ulaşıldı demektir.

MİNİMUM ÇÖZÜMLER İÇİN

$Z_j - c_j > 0$ ise, j nin temele girişi Z de artışa sebeb olur. Bu bakımdan j temele sokulacaktır.

$Z_j - c_j \leqq 0$ ise, j, Z değerini değiştirmez. Bütün j ler için $Z_j - c_j \leqq 0$ ise minimum çözüm elde edilmiş olacaktır.

Bu testin sonucunda temele girecek vektör elde edilir. *İkinci kademe* temelden çıkarılacak vektörün bulunmasıdır. Bunun için gerekli şart,

$$e = \min_{i} \left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}} \right)$$

dır. Ancak burada $x_{ik}>0$ olmalıdır. Eğer bütün $x_{ik} \leqq 0$ ise «sınırsız» bir çözüme varıldı demektir. $x_{i0} = 0$ olması halinde ise bozulma (degeneracy) görülür ve bu durum dalgalanmalara (cycling) yol açar. Bozulmanın giderilmesi için, bütün i sıralarındaki x_{ij}/x_{ik} oranları karşılaştırılmalı ve elde edilecek en küçük katsayı elimine edilecek vektör endeksi olarak seçilmelidir.[7]

Temeli terkeden ve bunun yerine gelen vektör bulunduktan sonra yapılacak işlem, ikinci çözüm tablosunu kurmaktır. Temele giren vektörü k, terkeden vektörü de l ile gösterirsek, yeni çözüm

$$x'_{kj} = \frac{x_{lk}}{x_{lk}}$$

ve

$$x'_{ij} = x_{ij} - \left(\frac{x_{lj}}{x_{lj}} \right) x_{ik}$$

olacaktır. Bundan sonraki çözümler için aynı kademeler tekrar edilir, ve optimal çözüme varılır.

Şimdi tekrar örneğimize dönerek aynı sıra içinde problemi çözmeye çalışalım. Birinci çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir.

---

7 Dantzig, *op. cit.*, sh. 222.

BİRİNCİ ÇÖZÜM

	C_j		1	6	5	0	0	0
c_i	Temel	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	P_4	48	8	12	6	1	0	0
0	P_5	24	2	3	6	0	1	0
0	P_6	24	6	2	0	0	0	1
	$Z_j - c_j$	0	-1	-6	-5	0	0	0

Tabloda teemle giren vektörler birim vektörlerdir. Bunlar eşitleyici değişkenlere (s_1, s_2, s_3), yani, örnek olarak ele aldığımız problemde tarım kesiminde kullanılmayan doğal kaynak, sermaye ve emek birimlerine tekabül ederler. Buna göre birinci çözüm, tarım sektöründe sıfır üretim yapıldığı hali göstermekte ve dolayısı ile kullanılmayan üretim faktörleri miktarının bu sektördeki toplam faktör arzına eşit olduğu anlamına gelmektedir. Bunun sonucu olarakta obejktif fonksiyonunun Z değeri sıfır çıkar.

Tabloda simplex kriteri test edildiğinde bütün j ler için $Z_j - c_j \geq 0$ olmadığından maximumu çözüme varılmadı demektir. $Z_j - c_j$ değeri en küçük vektör P_2 olduğu için temel girecek vektör olarak seçilir. Temelden çıkarılacak vektör için x_{i0}/x_{ik} ların minimum değerleri araştırılır. Problemde x_{0i} ve x_{ik} lar sıfırdan büyük olduğu için sınırsız çözüm ve bozulma hali yoktur. Minimum değerlere bakalım :

$$\frac{x_{40}}{x_{42}} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\frac{x_{50}}{x_{52}} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\frac{x_{60}}{x_{62}} = \frac{24}{2} = 12$$

olduğundan minimum değer $x_{40}/x_{42} = 4$ dür ve temeli terkedecek vektörü (P_4) verir. Böylece ikinci çözüm tablosuna geçilebilir. Tabloda temelde yer alan vektörler, sırayla, P_2, P_5 ve P_6 dır. Yeni vektörün (P_2) sırasındaki değişkenler için x_{lj}/x_{lk} lar aranır. Buna göre

$$x'_{20} = \frac{x_{40}}{x_{42}} = \frac{48}{12} = 4 \qquad x'_{24} = \frac{x_{44}}{x_{42}} = \frac{1}{12}$$

$$x'_{21} = \frac{x_{41}}{x_{42}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad x'_{25} = \frac{x_{45}}{x_{42}} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x'_{22} = \frac{x_{42}}{x_{42}} = \frac{12}{12} = 1 \qquad x'_{26} = \frac{0}{x_{42}} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x'_{23} = \frac{x_{43}}{x_{42}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Diğer vektörlerin (P_5, P_6) sırasındaki değişkenler de

$$x'_{ij} = x_{ij} - \left(\frac{x_{lj}}{x_{lk}}\right) x_{ik}$$

göre elde edilir. Örneğin

$$x'_{50} = x_{50} - \left(\frac{x_{40}}{x_{42}}\right) x_{52} = 24 - (14)(3) = 12$$

ve aynı şekilde

$$x'_{51} = x_{51} - \left(\frac{x_{41}}{x_{42}}\right) x_{52} = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 0$$

dir. Diğer değişkenlerin değerleri de aynı yolla hesaplanabilir. Aşağıdaki tablo ikinci çözümü vermektedir. Tabloda Objektif fonksiyonun değeri 24 dür. Buna X_2 malının 4 birim üretimi sebep olmuş-

İKİNCİ ÇÖZÜM

c_i \ C_j	Temel	P_0	1 P_1	6 P_2	5 P_3	P_4	P_5	P_6
6	P_2	4	2/3	1	1/2	1/12	0	0
0	P_5	12	0	0	9/2	-1/4	1	0
0	P_6	16	14/3	0	-1	-1/6	0	1
	$Z_j - c_j$	24	3	0	-2	-1/2	0	0

tur. Diğer malların üretimi ise sıfırdır. Çözüm grafikte E uç noktasına tekabül etmektedir. Ancak; tablodan da görüldüğü gibi maximum çözüme henüz ulaşılmıştır. Çünkü P_3 vektörünün $Z_j - c_j$ değeri -2 dir. Bu bakımdan P_3 ün temele girmesi ve P_5 in temelden çıkması gerekir. Bir önceki işlemler aynı sıra ile izlenerek üçüncü çözüme varılır.

ÜÇÜNCÜ ÇÖZÜM

c_j \ C_j	Temel	P_0	1 P_1	6 P_2	5 P_3	P_4	P_5	P_6
6	P_2	8/3	2/3	1	0	4/36	-1/9	0
5	P_3	8/3	0	0	1	-1/18	2/9	0
0	P_6	56/3	14/3	0	0	-1/6	2/9	1
	$Z_j - c_j$	88/3	3	0	0	7/18	8/18	0

Tabloda bütün j ler için $Z_j - c_j \geq 0$ olduğundan optimal çözüme varılmış ve objektif fonksiyonun Z değeri maximum kılınmıştır. Buna göre tarım kesiminde geliri maximum yapan değere, X_2 ve X_3 mallarından 8/3 birim üretilerek ulaşılmıştır. X_1 malının üretimi ise sıfırdır. Üretimde sermaye ve doğal kaynak kullanımı faktörlerin toplam arzına eşittir. Gerçekten 48 birimlik mevcut doğal kaynak miktarının 32 birimi X_2 malının, 16 birimi de X_2 malının üretiminde kullanılmıştır. Aynı şekilde toplam sermayenin 8 birimi X_2 malının, 16 birimi de X_3 malının üretiminde kullanılmıştır. Toplam emek miktarı ise tamamen tüketilmemiştir. Tabloda kullanılmayan emek, $s_3 = 56/3$ olarak görülüyor. Toplam 24 birim emeğin ancak 16/3 birimi X_2 malının üretiminde kullanılmıştır. Problemde veri olduğu için X_3 ün üretiminde emek kullanımı gerekmemektedir.

Bu sonuca göre, gelir maximize edilmiş fakat tam istihdam sağlanamamıştır. Gelirin mümkün olan en yüksek seviyeye çıkarılmasını hedef tutan plânların tam kullanımı gerçekleştirmesi zorunlu değildir. Çünkü, maximum gelirin ve tam istihdamın bir arada gerçekleşmesi çok kere tesadüfidir. Bu bakımdan önemli olan tesbit edilmiş amaçtır. Amaç milli gelirin maximizasyonu ise, bazı kaynakların tam kullanımından fedakârlık etmek gerekebilir. Diğer taraftan tam kullanım gerçekleştirilecekse, gelirin daha düşük seviyelerine razı olunabilir. Örneğin plânlı bir ekonomide tarımda işsizliği azaltmak şeklinde bir hedef güdüldüğünü düşünelim. Bu durumda 2. çözüm tablosunda elde edilen sonuçlar bu amaca daha çok hizmet edecektir. Çünkü bu çözümde kullanılmayan işgücü 16 dır ve maximum gelirin elde edildiği optimal çözüme oranla daha azdır. Ancak işsizlikte sağlanan bu azalma gelir kaybı 88/3 - 24 ve 12 birimlik sermayenin atıl bırakılması pahasına elde edilmiştir. Bütün hedeflere birden ulaşmak düşünülemiyeceği için, problem bir tercih sorunu olarak karşımıza çıkar ve bu tercihte işsizlikteki azalmanın sağladığı fayda ile uğranılan kayıpların karşılaştırılması rol oynar.

5. Dual Çözüm :

Her doğrusal programlama probleminin bir duali (ikizi) olduğu matematik bir gerçektir. Daha önce genel terimlerle formüle etmiş olduğumuz doğrusal programlama probleminin duali şöyle tanımlanabilir :

$$
\begin{array}{l}
a_{11} W_1 + a_{21} W_2 + \; . \; . \; . \; . \; + a_{m1} W_m \geq c_1 \\
a_{12} W_1 + a_{22} W_2 + \; . \; . \; . \; . \; + a_{m2} W_m \geq c_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1n} W_1 + a_{2n} W_2 + \; . \; . \; . \; . \; + a_{mn} W_m \geq c_n
\end{array}
$$

ve $(W_1, W_2, \ldots, W_n) \geq 0$

kaydıyla

$$Z = \sum_{i}^{m} b_i W_i$$

objektif fonksiyonunu minimize eden W sütun vektörü bulunmaya çalışılır. Aynı problem matrix notasyonu ile,

$$b' W$$

fonksiyonunun

$$A' W \geq c'$$

$$W' \geq 0$$

şartları ile minimize edilmesi şeklinde formüle edilir.

Dualite teoremine göre, orijinal ya da dual problemlerden her hangi biri için optimum çözüm varsa diğer problemin de optimum çözümü vardır ve objektif fonksiyonun maximum değeri aynı zamanda minimum değere eşittir. Her iki doğrusal programlama probleminin optimum çözümlerinin var olabilmesi için yeterli ve gerekli şart, bu problemlerin «kabul edilebilir» çözümlerinin mevcut olmasıdır.[8] Bunların her hangi birinin sınırsız bir çözümü varsa, diğer problemin çözümü mümkün değildir. Örnek olarak incelemekte olduğumuz orijinal problemin «kabul edilebilir» çözümü olduğuna göre, dual problemin de çözümü mümkündür, ve dualite teoreminin tanımı icabı, objektif fonksiyonun maximum Z değeri dual problemin minimum Z değerine eşittir.

Yukarıda formüle edilen problemin anlamı şudur: Üretim kaynaklarının miktarları (b_i) ve her bir output biriminin net fiyatı (c_j) belli iken her bir üretim kaynağına hangi değerler (W_i) verilmelidir ki

$$Z = W_1 b_1 + \ldots + W_m b_m$$

fonksiyonu minimum olsun. Öyle ise problemde bulunması istenenler, toplam input değerini minimize edecek olan W değişkenleridir ve belli bir j malının bir birim üretiminde kullanılan inputların (1, ..., m) değerlerinin toplamı j malının net fiyatından küçük olmamalıdır. Başka bir deyimle

$$a_{1j} W_1 + a_{2j} W_2 + \ldots\ldots + a_{mj} W_m \geq c_j$$

olmalıdır.

Üretim kaynaklarının W_i lerle değerlendirilmesi alternatif maliyet (ya da gölge fiyat) değerlemesidir. Bunun anlamı ise faktörlerin marjinal prodüktivitelerinden başka bir şey değildir. Gölge fiyatların iktisattaki rolü büyüktür. Çünkü bilindiği gibi neo-klâsik kaynak dağılımı teorisine göre, üretim faktörleri marjinal prodüktivitelerine eşit bir gelir elde edecek seviyede kullanılıyorsa, milli gelirin maximizasyonu sağlamış olur.

Şimdi tekrar sayısal problemimize dönelim. Eşitleyici değişkenleri de katarak problemi şu şekilde formüle edebiliriz :

$$Z = 48W_1 + 24W_2 + 24W_3$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned} 8W_1 + 2W_2 + 6W_3 - L_1 &= 1 \quad (1.\ \text{Mal}) \\ 12W_1 + 3W_2 + 2W_3 - L_2 &= 6 \quad (2.\ \text{Mal}) \\ 6W_1 + 6W_2 \qquad\quad - L_3 &= 5 \quad (3.\ \text{Mal}) \end{aligned}$$

ve $$(W_1, W_2, W_3) \geq 0$$

[8] W. Allen Spivey, *Linear Programming: An Introduction* (NewYork: Mac Millan Co., 1963), sh: 162.

şartları ile minimize edilecektir. Sistemdeki eşitleyici değişkenler bir çeşit «fiktif kayıp» olarak düşünülmelidir.[9] Örneğin L_1, (1) no. lu malın üretimi için faktörlere ödenen masrafların, bu malın net fiyatından daha büyük olduğunu gösterir. Bu bakımdan çözümde pozitif bir L elde edilmişse, buna ait malın üretilmemesi beklenir. Daha açık bir ifade ile şu şartı yazabiliriz :

$X_j \, L_j = 0$ Her j malı için
$W_i \, s_i = 0$ Her i inputu için

Buna göre eğer positif bir zarar (L_j) varsa, j malının üretimi (X_j) sıfır olacak ve eşitlik sağlanacaktır. Aynı şekilde orijinal problemin çözümünde kullanılmayan her hangi bir i inputu (s_i) temelde yer alıyorsa, bunun dual çözümde elde edilen gölge fiyatı (W_i) sıfır olacak ve eşitlik gene sağlanacaktır.

Simplex metod kullanarak yapılan çözümde, $W_1 = 7/18$, $W_2 = 8/18$ ve $L_1 = 3$ sonuçları elde edilmiştir. Görülüyor ki (1) no.lu mal için $L_1 = 3$ tür. Bu malın üretilmemesi gerekir. Çünkü bu malın üretiminde kullanılan kaynakları bu sahadan çekip (2) ve (3) no. lu malların üretiminde kullanmak daha kârlıdır. Başka bir deyimle, «fiktif zararı» sıfır olan malların (X_1, X_2) üretimi en kârlı alternatiflerdir. Bu bakımdan dual problemin çözümünde bu mallara ait eşitleyici değişkenler, L_1 ve L_2, temelde yer almamışlardır. Dolayısı ile, $X_j \, L_j = O$ şartı (1) no.lu mal için olduğu gibi (2) ve (3) no.lu mallar için de sağlanmış durumdadır.

Diğer taraftan doğal kaynaklar ve sermaye için bulunan gölge fiyatlar, sırasıyla, 7/18 ve 8/18 dir. Bu kaynakların tamamı, gelir maximizasyonunda kullanılmışlar ve dolayısı ile $W_i \, s_i = O$ kaydı gerçekleştirilmiştir. Emeğin gölge fiyatı ise dual çözümde temele girmemektedir. Başka bir deyimle, sıfır olarak bulunmuştur. Bu, anlamlı bir sonuçtur. Çünkü tarım kesiminde işgücü arzında fazlalık (s_6) vardır. Yani, emek serbest bir maldır ve bu bakımdan fiyatı, dolayısı ile marjinal prodüktivitesi O dır. Sonuç olarak, bu faktör için de, $W . s = O$ şartının sağlanmış olduğunu söyleyebiliriz.

Dikkat edilecek olursa, dual çözümle elde edilen değerlerin, orijinal problemin çözüm tablosunun $Z_j - c_j$ sırasında bulunan değerlerle aynı olduğu görülür. Gerçekten de tabloda P_4 ve P_5 vektör-

---

9 William J. Baumol, *Economic Theory and Operation Analysis* (New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1965), sh: 82.

leri için bulunan 7/18 ve 8/18 rakamları, dual çözümde bunlara tekabül eden doğal kaynak ve sermayenin gölge fiyatlarını vermektedir. Aynı şekilde kullanılmayan emek vektörünün (P_6), Z_j — c_j sırasında O elde edilmiştir. Bu ise, emeğin gölge fiyatının O olduğunu gösterir. Aynı şekilde, faaliyet seviyelerini veren P_1, P_2 ve P_3 vektörlerinin Z_j — c_j sırasındaki rakamla rda anlamlıdır. Dual çözümde elde edilen $L_1 = 3$, P_1 vektörünün (1. malın) Z_j — c_j simlex kriterini verir. Görülüyor ki simplex kriterinin önemi büyüktür. Kriter nihai çözümde, faktörlerin gölge fiyatlarını, mallarında «fiktif zararlarını» göstermektedir.

Dualitenin iktisadi anlamına ilerde tekrar değineceğimiz için, bu kısımda, bu kadarla yetiniyoruz.

6. Endüstrilerarası Analizlerde Doğrusal Programlama :

Kalkınmanın plânlanmasında genellikle üç tip model kullanılır: (1) Toplayıcı (aggregative) modeller, (2) Sektör modelleri, (3) Endüstrilerarası modeller.

Toplayıcı modeller milli gelir, üretim, tüketim tasarruf ve yatırım makro birimlerin analizi ve tahminleri ile uğraşır. *Sektörel modeller* her bir üretim dalında alternatif yatırım projelerinin nisbi kârlarını tesbit etmeye yarayan ve sektörler içinde alternatif üretim imkanlarını araştıran analilzerdir. *Endüstrilerarası modeller* ekonomide üretim ve tüketim birimleri arasındaki içsel bağıntıları sayısal olarak inceleyen, endüstrilerin ara malları ve sermaye malları taleplerini tayin etmekle kullanılan modellerdir.

İnput - output ve doğrusal programlama endüstriler arası analizlerin özünü teşkil eder. Her iki teknik arasındaki fark, kabul ettikleri varsayımlardan doğar. Bilindiği gibi, input - output modelleri *başlıca* üç varsayıma dayanmaktadır :

(i) Her endüstri sadece bir tek mal üretir ve bu üretimde tek bir model kullanılır.

(ii) Ölçeğe göre sabit verimler hali varsayılmıştır. Bu, doğrusallığı ve oranlılığı kapsar. Başka bir deyimle, her hangi bir endüstrinin diğerinden satın aldığı inputlar, bu endüstri outputunun fonksiyonudur ve sabit oranlarda kullanılır.

(iii) Piyasa dışı bağıntıların ve dışsal ekonomilerin yokluğu kabul edilmiştir.

Doğrusal programlama son iki varsayımı, (ii) ve (iii), olduğu gibi kabul eder. Ancak (i) varsayımı değiştirilmiştir. Buna göre (a) bir mal birden fazla faaliyet kollarında üretilebilir ve (b) her faaliyet birden fazla mal yaratabilir. Görülüyor ki doğrusal programlama belli mallar için alternatif üretim faaliyetlerini göz önüne almakta ve bu üretim faaliyetlerinin optimum bileşimine ulaşmayı mümkün kılmaktadır. Dolayısı ile her hangi bir doğrusal programlama probleminde input - outputtan farklı olarak bilinmiyenlerin sayısı denklem sayısından çok olabilir. Böylece birden fazla çözüm söz konusu olacaktır. Ancak önemli olan, bu çözümler içinde belli bir amacı maximum ya da minimum yapan optimal çözüme ulaşmaktır ve doğrusal programlamanın başarısı da zaten buradadır.

Doğrusal programlama tekniği ile input - output arasındaki diğer önemli bir fark ta, her sektördeki optimum ithalat ve ihracat miktarlarının problemin çözümü ile doğrudan doğruya elde edilebilir olmasıdır. Halbuki input - output modellerinde, ithalatın sektör üretimleri ile belli bir ilişkisi olduğu kabul edilir ve ihracat genellikle veri olarak alınır.

Daha önce ele almış olduğumuz örnek, doğrusal programlamanın bir plânlama aleti olarak nasıl kullanılabileceği sorunu hakkında yeterli fikir vermektedir. Örnekte, ekonominin her hangi bir sektöründe belli kaynaklarla maximum gelire nasıl ulaşılacağı gösterilmiştir. Problem her hangi bir sektör yerine ekonomiyi bir bütün olarak kapsayacak şekilde de formüle edilebilir. Bu durumda, ekonomide endüstrilerarası ilişkileri gösteren input katsayıları ve üretim faktörleri miktarlarını bulmak gerekir. Böylece ekonomide belli kaynaklarla üretimi maximize eden ya da belli hedeflere minimum masraflarla ulaşmayı sağlayan optimum çözüme varılabilir.

Doğrusal programlamanın endüstrilerarası analizlerdeki uygulamasını göstermek amacıyla bundan sonraki açılaklarımızâ bir örnekle devam etmek istiyoruz.

7. Sermaye Kullanımını Minimize Eden Doğrusal Programlama Problemi :

Burada amaç belli kaynaklarla maximum outputu elde etmek yerine sermaye kullanımını minimize etmektir. Hedefin bu şekilde seçimi, özellikle geri kalmış ülkelerin ekonomik yapısına uygun-dur. Çünkü, bilindiği gibi, sermaye bu ekonomilerde oldukça kıt bir faktördür. Bu tip bir problem, basit bir input - output modelini doğrusal programlama modeline dönüştürülerek şöyle formüle edilebilir :

$$(1 - A)\,X \geq Y$$

ve

$$X \geq O$$

olmak kaydıyla

$$Z = c\,X$$

objektif fonksiyonunun minimumu istenmektedir. Burada c vektörü ekonominin her sektörü için brüt sermaye/hasıla katsayısını, X sütun vektörü sektörlerin output seviyelerini, (1 — A) Leontief matrixini, ve Y de nihai talep vektörünü gösterirler.

Problemi çok basit bir model içerisinde Ekvator Ekonomisinden alınmış verilerle çözmeye çalışalım [10].

Aşağıdaki (1) no.lu tabloda, Leontief matrixi, sermaye katsayıları ve nihai talep vektörü gösterilmektedir.

TABLO 1

Leontief Matrixi, Sermaye Katsayıları ve Nihai Talep

Sektörler		Tarım	Endüstri	Hizmetler
Tarım		.96070	-.17984	-.00145
Endüstri		-.04904	.71380	-.09509
Hizmetler		-.21463	-.18097	.93784
Sermaye katsayıları c_j		1.135	1.023	5.07
NİHAİ TALEP	1963	7204	7290	3921
	1973	10818	12568	7030

Bu verilere göre problemi şu şekilde formüle edebiliriz :

[10] Örnekte kullanılan veriler Ekvator Ekonomisi ile ilgili bir çalışmadan alınmıştır. Bakınız, Jeffrey B. Nugent, *Construction and Use of Input-Output Model in Testing for Consistency of Ecuador's First Development Plan*, (Quito: Jonta de Planificacion, 1966, Mimeographed).

$$Z = 1.135\ X_1 + 1.028\ X_2 + 5.07\ X_3$$

objektif fonksiyonu

$$.96070\ X_1 — .17984\ X_2 — .00145\ X_3 \geq 10818$$
$$—.04904\ X_1 + .71380\ X_2 — .09509\ X_3 \geq 12568$$
$$.21463\ X_1 — .18097\ X_2 + .93784\ X_3 \geq 7030$$

ve $(X_1, X_2, X_3) \geq 0$

kayıtlamalarıyla minimize edilecektir. Görülüyor ki yukarıdaki minyatür model, sistem tarafından çözümlenecek üç değişkenden ve plânın 1973 hedef yılına ait nihai talep tahminleri ile üretim faaliyetleri arasındaki ilişkileri gösteren üç eşitsizlikten meydana gelmiştir. Buna göre problem, en az Y_1, Y_2 ve Y_3 nihai taleplerini karşılamak kaydıyla, toplam sermaye masrafını minimize edecek output seviyeleri ne olmalıdır şeklinde ortaya konmuştur.

Problem simplex metodu ile çözülmüş, tarım, endüstri ve hizmetler sektörlerinde elde edilecek output seviyeleri için şu sonuçlar elde edilmiştir :

$X_1 = 15146.6$ Birim Tarımsal Output
$X_2 = 20638.6$ » Endüstri Output
$X_3 = 14944.8$ » Hizmetler Output

Bu değerler ilgili sermaye katsayıları ile çarpılarak her sektördeki sermaye masrafı bulunur. Buna göre,

$1.135 \times 15146.6 = 17191.4$ Tarım
$1.023 \times 20638.6 = 21113.4$ Endüstri
$5.07 \times 14944.8 = 75770.4$ Hizmetler
Toplam $= 114075.2$

dir. Görüldüğü gibi 114075.2 rakamı Z objektif fonksiyonunu minimum değerini verir.

Problemin çözümü, 10 yıllık plânlı devre içinde, sektörlerin outputlarında meydana gelecek artışların hesaplanmasını mümkün kılar. Mutlak ve nisbî artışlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

TABLO 2

Output Artışları (X_{1973} — X_{1963})

Sektörler	X_{1973}	X_{1963}	Mutlak Artış	Net Yüzde Artış %
Tarım	15146.6	8829	6317.6	71.5
Endüstri	20638.6	8819	11819.6	133.8
Hizmetler	14944.8	7593	7351.8	96.8
TOPLAM	50730.0	25241	25489.0	100.9

Bu sonuçlara göre, tarım, endüstri ve hizmetler sektörlerindeki output artışlarının, sırasıyla, yüzde 71.5, 133.8 ve 96.8 olması gerekmektedir. Bu durum plânlı devre içinde tarım sektörünün nisbî öneminin gittikçe azalması gerektiğini gösteriyor. Gerçekten de başlangıç ve hedef yıllarındaki sektör outputlarının toplam output içindeki payları heasplandığında, tarımsal outputun 1963 yılındaki % 35 olan payının 1973 yılında % 30 a düştüğü, endüstri outputunun % 35 den % 40.7 ye çıktığı ve hizmetler outputunun da % 30 olan seviyeyi muhafaza ettiği görülür. Dolayısı ile amacın gerçekleştirilmesi için ekonominin endüstri kesimine daha çok ağırlık verilmesi zorunlu olmaktadır.

Problemin çözümü ile değişkenler için elde edilen değerler, 10 yıllık devre içinde minimum yatırım miktarının bulunmasına da yarar, Bunun için uygulanabilecek formül,

$$\sum_j c_j \, (dX_j) = I$$

dir. c_j, j malının sermaye/hasıla katsayısını, dX_j, j malının söz konusu devre içindeki artış miktarını gösterir. Yukarıda (2) no. lu tabloda output artışları verilmiştir. Bu rakamların ilgili sermaye/hasıla katsayıları ile çarpımı gerekli toplam yatırım miktarlarını verir. Sonuçlar (3) no. lu tabloda görülmektedir.

TABLO 3

Yatırım Miktarları

Sektörler	Output Artışı (X_{73} - X_{63})	Sermaye Katsayısı c	Yatırım I	Yüzde %	Yatırım Seviyesi (1973)
Tarım	6317.6	1.135	7170.5	12.6	1075
Endüstri	11819.6	1.023	12091.5	21.5	1813
Hizmetler	7351.8	5.07	37273.6	65.9	5591
TOPLAM			56535.1	100.0	8480

Tabloya göre plânlı devre içinde minimum yatırım miktarı toplamı 56531.1 dir. Bunun yüzde 65.9 u hizmetler sektöründe meydana getirilecektir. En düşük yatırım yüzdesi tarımda görülmektedir. Tarımın bu devre içinde nisbî önemi azalmakta olduğundan, bu sonuç zaten beklenmekteydi. Diğer taraftan endüstri outputunun 10 yıl içinde büyük ölçüde % 133 artmasına karşılık bu sektördeki yatırımların toplam içinde % 21.5 gibi nisbeten daha küçük bulunması, sermaye/hasıla katsayısının diğer sektörlerdekine oranla küçüklüğü, ya da aynı anlamda, sermayenin ortalama prodüktivitesinin büyüklüğü ile açıklanabilir. Hizmetler sektöründeki yüksek yatırım seviyesi ise, bir taraftan bu sektörde gerekli output artışının % 96.8 büyüklüğü, diğer taraftan da sermaye prodüktivitesenin düşüklüğündendir.

10 yıllık plânlı devre içindeki toplam minimum yatırımlar yerine, sadece hedef yılındaki yatırım seviyeleri ile ilgileniliyorsa, toplam yatırımlar seviyesinin belli bir yüzdesini almak bu amaç için yeterlidir. Örneğin 10 yıllık yatırımların % 15 inin 1973 yılında gerçekleştirileceği varsayımı, oldukça realist sayılabilir.[11] Çünkü gelişme genellikle kümülâtif nitelikte olduğundan, ilk yıllara oranla son yıllardaki yatırımların biriken tasarruflarla daha yüksek seviyede olacağını kabul etmek yanlış bir düşünce değildir. Bu bakımdan

$$\sum_{j} .15\ c_i\ (X_{1973} - X_{1963})$$

formülü uygulanarak 1973 e ait yatırımlar elde edilebilir. (3) no. lu tablonun son sütunu bu amaçla elde edilen yatırım rakamlarını göstermektedir.

Buraya kadar incelemekte olduğumuz orijinal problemin duali de, fiyat-masraf eşitsizlikleri ile net outputun[12] toplam değerinin maximizasyonu olarak kurulabilir. Matrix notasyonu ile problem

$$Y'P$$

fonksiyonunun

$$(1-A)'\ P \geq c'$$
$$P \geq 0$$

kayıtlamaları ile maximize edilmesi şeklinde formüle edilir. Böylece her bir malın gölge fiyatları (P_i) elde edilmeye çalışılmaktadır. Yukarıdaki notasyona göre verileri yerine koyarak problemi yeniden yazalım.

---

[11] Burada uygulanan yüzde 15 lik katsayının oldukça uygun bir yaklaşım olduğu Alan Manne tarafından haklı çıkarılmaktadır. *Bakınız.* - Alan Manne, «Key Sectors of Mexican Economy, 1960-1970,» *Studies in Process Analysis*, ed. Alan Manne ve H. M. Markowitz (New York: John Wiley and Sons, 1963), sh: 384.

[12] Net output ile nihai output, yani tüketim malları miktarı anlaşılmalıdır.

$$Z = 10818\ P_1 + 12568\ P_2 + 7030\ P_3$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned} .96070\ P_1 &- .04909\ P_2 - .21463\ P_3 \leqq 1.135 \\ -.17984\ P_1 &+ .71380\ P_2 - .18097\ P_3 \leqq 1.023 \\ -.00145\ P_1 &- .09509\ P_2 + .93784\ P_3 \leqq 5.07 \end{aligned}$$

ve $(P_1, P_2, P_3) \geq 0$

kaydi ile maximum değere ulaşacaktır. Problem simplex metoda göre çözülmüştür. Son çözümde eşitleyici değişkenler temelde yer almamaktadır. P_i değerleri ise,

$$\begin{aligned} P_1 &= 2.65 \\ P_2 &= 3.56 \\ P_3 &= 5.77 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Objektif fonksiyonun maximum değerine, net output rakamları (Y_i) ilgili gölge fiyatlarla (P_i) çarpılarak ulaşılır. Yani,

P_i	Y_i	$P_i\ Y_i$
2.65	10818	28701.6
3.56	12568	44803.6
5.77	7030	45070.0
	Toplam	114075.2

Görülüyor ki dual problemin objektif fonksiyonunun maximum değeri, orijinal problemin objektif fonksiyonunun minimum değerine eşittir.

Her hangi bir çözümde bir malın fiyatı, P_i, bu malın üretiminde kullanılan kaynakların değerini gösterir. Dikkat edilecek olursa sistemdeki üretim faktörü sadece *sermaye* olarak kabul edilmiştir. Bu bakımdan her bir nihai outputun fiyatı, bu maldan bir birim daha üretmek için gerekli sermaye miktarına eşittir. Bunun sonucu olarak, maximum değer (114075.2), net outputun kıt faktör kabul edilmiş sermayenin masrafı olarak hesaplanmasından başka bir şey değildir. Diğer taraftan, dualite teoremine göre, toplam sermaye masraflarının minimum değeri dual problemin maximumuna eşit olduğundan, klâsik gelir eşitliğine ulaşılmış olur. Yani [13]

[13] Açıktır ki, nihai outputun toplam değeri $P_1\ X_1 + \ldots\ldots + P_n\ X_n$ olmayacaktır. Çünkü, bilindiği gibi, X_j nin bir kısmı ara malları şeklinde üretim işlemi sırasında kullanılmıştır. Bu bakımdan, sadece nihai talep nihai output olarak kabul edilebilir ve toplam değer, $P_1\ Y_1 + \ldots\ldots + P_n\ Y_n$ şeklinde yazılabilir.

$$\sum_{i} P_i Y_i = \sum_{j} c_j X_j$$

dir. Başka bir deyimle, net output, faktör ödemeleri ya da tüketim malları değerleri ile ölçüldüğünde daima aynı sonuç çıkar.

* * *

Her hangi bir doğrusal programlama problemi, bazı veri ve sınırlamalarla belli bir amacın maximum ya da minimum kılınması şeklinde özetlenebilir. Problemin değişkenlerinde meydana gelen değişmeler, şüphesiz, optimal çözümü etkilecektir. Bu etkilerin ölçülmesi duyarılık (sensitivity) analizinin kapsamına girer. Bu analizi, basit bir çerçeve içinde, yukardaki örneğe uygulamaya çalışalım.

8. Duyarlılık Analizi :

Sistemdeki değişmeleri beş gruba ayırmak mümkündür :

(i) input-output katsayılarındaki, a_{ij}, değişmeler,

(ii) masraf katsayılarındaki, c_j, değişmeler,

(iii) sistemin sağındaki sabit terimin, Y_i, değişmesi,

(iv) yeni değişkenlerin ilâvesi,

(v) bazı sınırlamaların ilâvesi.

Bu değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkileri birbirinden farklıdır. Burada ilk üç değişmenin etkileri üzerinde duracağız.

(i) Ekonomide input katsayılarında meydana gelecek her hangi bir değişme, çözülmesi istenen problemin optimal sonucunu etkileyecektir. Örneğin sistemin a_{ij} katsayılarının küçülmesi, ara mallarının kullanılışında sağlanan tasarrufların belirtisi olup milli gelir artışlarına imkân verir. Bu bakımdan duyarlılık analizi bu katsayılarda meydana gelen çok küçük artışlara karşı objektif fonksiyonun Z değerinin gösterdiği duyarlılığın ölçülmesinde kullanılır.

Bu amaçla yukarıdaki problemin

$$\frac{dZ}{da_{ij}}$$

kısmî türevleri hesaplanmıştır. Sonuçlar (4) no. lu tabloda verilmiştir. Elde edilen rakamların anlamı şudur: Örneğin, tarım sırasının endüstri sütununa tekabül eden 54750.9 rakamı, Leontief matrixinin a_{12} elemanındaki çok küçük bir artışın, objektif fonksiyonun Z değerinin 54750.9 misli artmasına yol açtığını gösterir. Başka bir deyimle, a_{12} elemanının Z ye göre kısmî türevi 54750.9 dur. Hesaplamada bütün kısmî türevler oldukça büyük bulunduğundan, optimal çözümün, (1 - A) matrixinin bütün elemanlarına karşı duyarlı olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Ayrıca tablodaki en büyük değeri 119117.9 veren a_{32}, sistemin en kritik elemanıdır. Hatırlanacağı gibi, a_{32} elemanı endüstri sektörünün 1 birim mal üretimi için hizmetler sektöründen aldığı input miktarını vermekteydi. Analizin sonucuna göre, bu katsayıda meydana gelecek çok küçük bir artış ya da azalış, aynı yönde minimum sermaye kullanımını etkileyerek değerin 11917.9 misli değişmesine yol açacaktır.

TABLO 4

a_{ij} Katsayılarındaki Değişmelerin Optimal Çözüm Üzerindeki Etkileri

SIRALAR	SÜTUNLAR		
	Tarım	Endüstri	Hizmetler
Tarım	40181.3	54750.9	39646.2
Endüstri	53994.8	73573.2	86255.6
Hizmetler	87419.8	119117.9	86255.6

Görülüyor ki modelin input katsayılarındaki çok küçük değişmeler, objektif fonksiyonun değerini büyük ölçüde etkilemektedir. Bu bakımdan, sistemin a_{ij} deki değişmelere karşı duyarlı olduğunu söyleyebiliriz.

(ii) c_j katsayılarında meydana gelen değişmeler de problemin optimal sonucunu etkiliyecektir. Hatırlanacağı gibi bu katsayılar sermaye/hasıla oranını göstermekteydi. Bu katsayılardaki düşme, sermaye prodüktivitesinde artış anlamına gelir. Bunun sonucu olarak, objektif fonksiyon değerinin, yani minimum sermaye kullanımının azalması beklenecektir. Örnek olmak üzere, problemdeki c_j katsayılarında bir azalma meydana geleceğini ve bu azalmaların da tarımda % 5, endüstride % 10 ve hizmetler sektöründe % 3 olduğunu varsayalım. Böylece yeni objektif fonksiyon

$$Z = 1.0783\ X_1 + .9207\ X_2 + 4.9179\ X_3$$

olacaktır. Problemin çözümünde X_j ler için elde edilen sonuçlar, orijinal problemde bulunan sonuçlarla aynıdır. Bunun nedeni problemin sınır şartlarının değişmemiş olmasındır. Buna göre yeni optimal çözüm,

c_j	X_j	$c_j X_j$
1.0783	15146.6	16332.5
0.9207	20638.6	19001.6
4.9179	14944.8	73497.0
		Z = 108831.4

olarak bulunur. Bu çözümde minimum sermaye kullanımı, Z = 108831.4 tür ve bu rakam orijinal problemin Z değerinden yüzde 4.6 kadar düşük çıkmıştır. c_i lerdeki bu değişmelere göre 10 yıllık plânlı devre için hesaplanabilecek yatırım rakamları, her sektör için, (3) no. lu tabloda gösterilen seviyelerin, sırayla, yüzde 5, 10 ve 3 altında elde edilecektir.

(iii) Üçüncü olarak, sınır şartlarındaki değişmelerin sistem üzerindeki etkilerini incelemek te mümkündür. Sınır şartları her hangi bir doğrusal programlama probleminde eşitsizliklerin sağındaki katsayıları gösterirler. Yukarıdaki problemde sınırlamaları gösteren terimler Y_i lerdir. Bunlardaki değişmelere göre objektif fonksiyonunun değeri de değişecektir. Örneğin eskisine oranla daha yüksek bir gelir seviyesine ulaşılmak istendiğini düşünelim. Bu durumda hedef olarak güdülen minimum sermaye kullanımı ne olacaktır? Yeni optimal çözüm için X'_j değerlerinin bulunması gerekecektir. Y_i değişkenlerinin değerlerinde % 7 artış istendiğini varsayalım. Bu amaçla 1973 yılına ait nihai talep seviyesi % 7 oranında arttırılacaktır. Yeni nihai talep miktarı için her sektörde üretilecek output miktarları ve dolayısı ile optimum sermaye kullanımı aranmaktadır. Sermaye katsayıları değişmemiş olduklarına göre, objektif fonksiyon

$$Z = 1.135\, X_1' + 1.023\, X_2' + 5.07\, X_3'$$

olarak yazılabilir. Ancak sınır şartları değişmiş ve bu kere,

$$\begin{aligned} .96070\, X_1' - .17984\, X_2' - .00145\, X_3' &\geq 18390.6 \\ -.04904\, X_1' + .71380\, X_2' - .09509\, X_3' &\geq 21365.6 \\ -.21463\, X_1' - .18097\, X_2' + .93784\, X_3' &\geq 11951.0 \end{aligned}$$

olmuştur. Problemin simplex metoda göre bulunan optimal çözüm sonuçları şöyledir:

c_j	X_j'	$c_j X_j'$
1.135	25412.9	28843.6
1.023	33294.3	34060.0
5.07	24983.2	126664.8
		$Z = 189568.4$

Z objektif fonksiyonunu minimum yapan değer 189568.4 olarak bulunmuştur. Bu değer önceki optimal çözüme oranla % 66.1 daha büyüktür. X_j' değişkenleri için elde edilen bu sonuçları orijinal problemin çözümünden çıkan X_j değerleri ile karşılaştıralım.

TABLO 5

X_j ve X'_j lerin Karşılaştırılması

Sektörler	X_{1973}	X'_{1973}	Mutlak Fark	Net Nisbî Fark
Tarım	15146.6	25412.9	10266.3	67.7
Endüstri	20638.6	33294.3	22922.0	61.3
Hizmetler	14944.8	24983.2	10038.4	67.1
TOPLAM	50730.0	83690.4	43226.7	

Tablo (5) e göre, ekonominin tarım, endüstri ve hizmetler sektörlerinde üretilmesi gerekli output miktarları ilk seviyeye oranla, sırasıyla, % 67.7, % 61.3 ve % 67.1 daha yüksektir. Bu, gerçekten büyük bir farktır. Çünkü nihai talepte % 7 gibi küçük bir artış, sektör outputlarında bu değişmenin 10 misli bir artışa yol açmaktadır. Dolayısı ile yapılmak gereken yatırım miktarları da ilk çözümdeki seviyeye oranla daha yüksek bulunacaktır. Devre içindeki ek yatırım miktarlarını (5) no. lu tablonun mutlak fark sütunundaki rakamlarla, ilgili sermaye katsayılarını çarparak elde edebiliriz:

Sektörler	Ek Yatırımlar $c_j\ (X'_{73} - X_{73})$
Tarım	11652.2
Endüstri	23449.2
Hizmetler	50894.6
TOPLAM	85996.0

Yukarıda bulunan yatırım miktarları, 1973 yılındaki nihai talep seviyesinin % 7 kadar yüksek olması halinde, tarım, endüstri ve hizmetler sektöründe yapılması gerekli ek yatırım hacmini göstermektedir. (3) no. lu tabloda orijinal çözüme göre bulunmuş olan yatırım miktarları ile karşılaştırıldığında, bu problemin aşağı yukarı bir misli daha fazla bir yatırımı gerektirdiği ortaya çıkmaktadır.

Görüldüğü gibi, elde edilen sonuçlar, orijinal problemin önceki çözümü ile bulunmuş sonuçlardan büyük ölçüde farklıdır. Bu bakımdan problemin optimal çözümünün sınır şartlarında (Y_i) meydana gelecek çok küçük değişmelere karşı duyarlı olduğu sonucunu çıkartabiliriz.

Duyarlılık analizinin faydaları açıktır. Bulunacak sonuçlara göre katsayılarda meydana gelen değişmelerin optimal çözümü ne derece etkilediği anlaşılmış olur. Böylece ekonomide daha hızlı bir gelişme sağlamak için, değişkenlerin ne yönde değiştirilmesi gerektiği ve bu dolayısı ile optimum kaynak bileşimi hakkında fikir edinilir. Bu bakımdan duyarlılık analizi ile elde edilen sonuçları dikkatle değerlendirmek ve amaca en uygun politikaları seçmek gerekir.

Analizin bir diğer faydası da, bulunan sonuçların istatistiki veri toplamada gösterilecek çabalara yön vermesidir. Gerçekten de, eğer bazı katsayılardaki küçük değişmeler optimal çözümü aşırı derecede etkileme niteliğindeyse, bu katsayılar hakkında yeniden bilgi toplayarak güvenilir ve sağlam veriler elde etmek gerekecektir. Nitekim yukarıdaki problemde sistemin input katsayılarındaki değişmelere karşı duyarlılığı son derece mubalâgalıdır ve realist olmaktan uzaktır. Bu bakımdan ele aldığımız model ve sonuçlar, doğrusal programlamanın Ekvator Ekonomisine uygulanmasının realist sonuçları olarak değil, sadece doğrusal programlama problemlerine örnek olarak kabul edilmelidir.

9. Doğrusal Programlamanın Başarısı :

Son yıllarda doğrusal programlama konusunda yapılan çalışmaların sayısı gittikçe artmaktadır. Tekniğin başlıca uyguama alanını iktisadi konular meydana getirir.

Doğrusal programlama sadece bir plânlama âleti olarak bütün ekonomiye değil fakat, ekonomide çeşitli endüstri kollarına da başarı ile uygulanmaktadır. Böylece teknik, endüstrilerin ekonomik yapılarını matematiksel olarak analiz etmek imkânı yaratarak, üretim faaliyetlerindeki etkinliğin arttırılmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Doğrusal programlama tekniğinin kullanıldığı en önemli saha, şüphesiz, plânlamadır. Teknik, input-output modelleri ile birlikte, kalkınma alternatifleri arasındaki tutarlılığı sağlamak bakımından büyük ölçüde değerlidir. Aynı zamanda, belli kaynaklarla sağlanabilecek azami üretim seviyelerini ve dolayısı ile yatırımlar arasındaki optimum seçimi ortaya koyar. Bu faydaları dışında, doğrusal programlama modellerinin kuruluşu ve kademeli olarak çözümü, ekonominin çeşitli sektörlerinde uygulanacak politikalar arasındaki bağıntıların analizine ışık tutar.

Bununla beraber, doğrusal programlama tekniğinin gücü, geniş ölçüde, varsayımlarına bağlıdır. Şüphesiz ele alınan problemlerde değişkenler arasındaki ilişkinin zorunlu olarak doğrusal ve oranlı olduğu iddia edilemez. Bu bakımdan, varsayımları realist olduğu müddetçe doğrusal programlama tekniğinden daha çok yararlanılacağını söyleyebiliriz. Bunun dışında, doğrusal programlamanın diğer tekniklere oranla daha karmaşık bir çözüm ve daha fazla veri gerektirmesi pratik bir güçlük yaratmaktadır. Bir çok hallerde modern elektronik makineler dahi problemin matematik çözümüne imkân vermemekte ve bu durum tekniğin başarı ile uygulanmasını engellemektedir. Bu bakımdan yakın gelecekte, kalkınma programlarının formüle edilmesinde doğrusal programlama modellerinin sınırlı olarak kullanılması muhtemeldir.