İKTİSAT ve MALİYE

GENEL DOĞRUSAL MODEL

Dr. Tuncer BULUTAY

Bu çalışma, ekonometrik araştırmalarda geniş ölçüde kullanılan genel doğrusal model üzerinde duruyor.

Önce, bu makalenin açıklamaya çalıştığı konuyu, yabancı dilde, toplu ve tam olarak inceliyen kaynakların varlığına işaret edelim. Bu kaynaklar arasında, özellikle, F. A. Graybill, An Introduction to linear Statistical Models, Vol, I ve J. Johnston, Econometric Methods, gösterilebilir.

Çalışma üç kısımdan meydana geliyor. İlk kısımda, en küçük kareler usulüne göre katsayıların tahminlerinin elde edilmesi ve bu tahminlerin bazı özellikleri incelenmeye çalışılıyor.

İkinci kısmın konusunu, katsayılar için test ölçüsü elde etme meselesi teşkil ediyor. Maksimum olabilirlik usulünün incelenmesi ile başlayan bu kısım bazı gerekli ispatlara yer veriyor.

Son kısımda, çeşitli bağıntı katsayıları üzerinde duruluyor, formüller veriliyor.

I

Y ile X ler arasında doğrusal bir ilişki farz edildiği takdirde, n hacimli bir rastgele örneğe dayanılarak,

$$Y_i = \beta_1^* + \beta_2 X_{2i} + \ldots\ldots + \beta_p X_{pi} + u_i \qquad i = 1,2, \ldots\ldots n$$

yazılabilecektir.

Burada ilk yapılmaya çalışılacak iş, bilinmiyen β_i katsayılarının tahminine ulaşmak olacaktır.

(*) Bu makalede kullanılan β lar, aksı söylenmedikçe, matriksi ifade edeceklerdir. Bu eşitlikteki β lar matriksi ifade etmiyorlar.

Yukarıdaki ifade, matriks kullanılmak suretiyle, aşağıdaki gibi yazılabilecektir.

$Y = X\beta + u$ .... (1—1)

Önce, yapılması gerekli faraziyeleri ifade edelim :

(1) $E(u) = 0$ dır.

(2) **u** vektörünü teşkil eden disturbance'lar (u_i) sabit değişmeye (6^2) sahiptirler ve aralarında bağıntılı değillerdir. $E(uu') = 6^2 I$

(3) **X** sabitlerden meydana gelir.

(4) **X** in rankı p ye eşittir. $p < n$ dir.

Burada **u** nın dağılımı hakında faraziye yapmıyoruz. İlerde, bazı sonuçlara varabilmek için, böyle bir faraziyeye başvurmak zorunluluğu ortaya çıkacaktır.

Bu tahmin işinde en küçük kareler usulünü kullanacağız. Bu usule göre, **b** (β nın tahmini) öyle bulunacaktır ki,

$Y - Xb = e$ .... (1—2)

olarak gösterildiğinde, sapmaların karesi asgari olacaktır. Yani,

$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$ asgari değer verecektir.

e'e yi minimum yapan **b** değeri

$$\frac{\partial}{\partial b}(e'e) = 0$$

olarak bulunacaktır.

(1—2) den,

$(e'e) = (Y - Xb)'(Y - Xb)$

$= Y'Y - Y'Xb - b'X'Y + b'X'Xb$ ** (1)

elde olunur. Böylece,

(**) Teknik imkânsızlık dolayısiyle bu makalenin bütün dip notlarında altı çizgili olarak yer alacak harfler matriksleri ifade edeceklerdir.

(1) $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ olduğunda, $\underline{C}' = \underline{A}' + \underline{B}'$ bulunduğu ve $(\underline{A}\underline{B})' = \underline{B}'\underline{A}'$ olduğu için (bak. G. Hadley, Linear Algebra, s. 77).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\mathbf{e}'\mathbf{e}) = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} \qquad (2)$$

ye varılır. Bu son ifadenin sıfıra eşit kılınması ise, bizi

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}3)$$

aradığımız katsayılar tahminine ulaştırır.

Şimdi, en küçük kareler usulü uygulanarak bulunan bu tahminlerin özelliklerini araştıralım :

İlk görmeye uğraşacağımız husus, **b** nin β nın sapmasız (unbiased) (3) bir tahmini olduğudur.

$$E(\mathbf{b}) = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{Y})$$

(1 - 1) i kullanarak devam edelim.

$$E(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u})$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + E(\mathbf{u})$$

$$E(\mathbf{b}) = \beta$$

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ve $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ oldukları için.

İkinci olarak, **b** nin değişmesini elde etmeye çalışalım :

$$E[(\mathbf{b}-\beta)(\mathbf{b}-\beta)'] =$$

---

(2) $\underline{b}'\underline{X}'\underline{Y}$ bir sayı olduğu için dönüşümüne (transpose) eşittir. Yani, $\underline{b}'\underline{X}'\underline{Y} = \underline{Y}'\underline{X}\underline{b}$ dir. Zira, $(\underline{ABC})' = \underline{C}'\underline{B}'\underline{A}'$ dır.

Ayrıca $\underline{X}$, px1 vektör olduğu, $\underline{A}$, pxp simetrik matriks bulunduğu takdirde,

$Z = \underline{X'AX}$ *olursa*, $\dfrac{\partial Z}{\partial \underline{X}} = 2\,\underline{AX}$ olur. (Bu son teorem için, bak. F. A. Graybill, An Introduction to linear Statistical Models, Vol : I, s. 12.)

(3) K nın sapmasız tahminini $\hat{K}(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$ verir, eğer $E(\hat{K}) = K$ ise.

Meselâ, $E(\bar{x}) = \mu$ olduğuna göre, $\bar{x}$, μ nun sapmasız bir tahminini ifade eder. Diğer taraftan s^2, σ^2 nin sapmalı bir tahminini verir. (Bak, P. G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistcs Sec. Ed. s. 197 - 198).

$$E\left[\begin{pmatrix} b_1-\beta_1^{***} \\ b_2-\beta_2 \\ \vdots \\ b_k-\beta_k \end{pmatrix}(b_1-\beta_1 \quad b_2-\beta_2 \ldots\ldots\ldots b_k-\beta_k)\right]=$$

$$\begin{bmatrix} E(b_1-\beta_1)^2 & E(b_1-\beta_1)(b_2-\beta_2)\ldots & E(b_1-\beta_1)(b_k-\beta_k) \\ E(b_2-\beta_2)(b_1-\beta_1) & E(b_2-\beta_2)^2\ldots & E(b_2-\beta_2)(b_k-\beta_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E(b_k-\beta_k)(b_1-\beta_1) & E(b_k-\beta_k)(b_2-\beta_2)\ldots & E(b_k-\beta_k)^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(b_1) & \mathrm{Cov}(b_1,b_2)\ldots\ldots & \mathrm{Cov}(b_1,b_k) \\ \mathrm{Cov}(b_1,b_2) & \mathrm{Var}(b_2)\ldots\ldots\ldots\ldots & \mathrm{Cov}(b_2,b_k) \\ \mathrm{Cov}(b_1,b_k) & \mathrm{Cov}(b_2,b_k)\ldots\ldots & \mathrm{Var}(b_k) \end{bmatrix}$$

Buna, $b_1, b_2 \ldots b_k$ lerin değişme-eş-değişme (varıance covarıance) matriksi adı verilir. Bunu **V** ile göstereceğiz.

$$\mathbf{V} = E\,[(\mathbf{b}-\beta)\,(\mathbf{b}-\beta)']$$

(1-3) ü kullanalım,

$$\mathbf{V} = E\,\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}-\beta][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}-\beta]'\}$$

(***) Bu ifade ile hemen altında yer alan ifadedeki β lar matriksi göstermiyorlar.

(1 - 1) den yararlanalım.

$$\mathbf{V} = E \left\{ [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' (\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) - \beta][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' (\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) - \beta]' \right\}$$

$$= E\ [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{u}]\ [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{u}]'$$

$$= E\ [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] \qquad (4)$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\ [E\ (\mathbf{u}\mathbf{u}')]\ [\mathbf{X}\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

$$= \sigma^2\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{X}\ \ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \sigma^2\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Üçüncü olarak görmeye çalışacağımız husus, en küçük kareler usulüne göre bulunan tahminin, en iyi sapmasız doğrusal tahmin olduğudur. Yani, bahis konusu tahmin, diğer sapmasız doğrusal tahminlere nazaran en küçük değişmeye (varyans) sahiptir.

β nin aşağıdaki şekildeki herhangi bir doğrusal tahminini ele alalım :

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \qquad , \mathbf{A} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}$$

k nın, β nın sapmasız tahmini olabilmesi için,

$$E\ (\mathbf{k}) = E\ \left\{ [\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\ \mathbf{Y} \right\}$$

$$= E\ \left\{ [\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{B}]\ \ [\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}] \right\}$$

$$E\ (\mathbf{k}) = E\ \ [\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \ \mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{X}\beta + \mathbf{B}\,\mathbf{u}]$$

$$= \beta + \mathbf{B}\mathbf{X}\beta$$

$\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{O}$ olmalıdır.

$\mathbf{k} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ nin değişmesini bulmaya çalışarak devam edelim :

$$\mathbf{k} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{B}\ \mathbf{u}$$

$\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{O}$ olduğu için.

O halde,

$$\mathbf{k} - \beta = [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ \mathbf{X}' + \mathbf{B}]\ \mathbf{u}$$

---

(4) $(\underline{A}')^{-1} = (A^{-1})'$ dir. (Bak, G. Hadley, Ad. Ge. Es. s, 106).
Üzerinde durulan meselede, $\underline{A} = \underline{X'X}$ dir, tabii. Yine tabi, $\underline{(X'X)'} = \underline{(X'X)}$ olarak bulunur.

$$E [(\mathbf{k}-\beta) (\mathbf{k}-\beta)']$$
$$= E [\{ [(X'X)^{-1}X' + \mathbf{B}] \mathbf{u} \} \{ [(X'X)^{-1}X' + \mathbf{B}] \mathbf{u} \}']$$
$$= E \{ [(X'X)^{-1} X'\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}] [\mathbf{u}'X (X'X)^{-1} + \mathbf{u}'\mathbf{B}'] \}$$
$$= E [(X'X)^{-1}X'\mathbf{u}\mathbf{u}' X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1} X'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{B}'$$
$$+ \mathbf{B}\mathbf{u}\mathbf{u}'X (X'X)^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{B}']$$
$$= 6^2 [(X'X)^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{B}']$$

6^2 ve $(X'X)^{-1}$ sabit olduklarına göre, $\mathbf{BB}'$ in her bir diagonal elemanı minimum olmalı, aradığımız değişmenin asgarî olması için. Fakat, $\mathbf{BB}'$, matriksin dönüşümü (transpose) ile çarpımını ifade ettiğine göre, bunun diagonal elemanları eksi olamıyacaktır. O halde, aranılan minimum, diagonal elemanların sıfıra eşit bulunması ile sağlanacaktır. ($\mathbf{K} = \mathbf{BB}'$ dersek, $k_{ii} = 0$ olmalı)

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \dots b_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \dots b_{p1} \\ b_{12} & b_{22} \dots b_{p2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1p} & b_{2p} \dots b_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \dots k_{1p} \\ k_{21} & k_{22} \dots k_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ k_{p1} & k_{p2} \dots k_{pp} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = b^2_{11} + b^2_{12} + b^2_{1p} , \quad k_{22} = b^2_{21} + b^2_{22} + b^2_{2p} , \dots\dots$$

$$k_{pp} = b^2_{p1} + b^2_{p2} + b^2_{pp}$$

O halde, $k_{ii} = 0$ olması için, $b_{ij} = 0$, bütün i ve j ler için, olmalıdır.

Yani, değişmenin asgarî olabilmesi için,

$\mathbf{B} = \mathbf{O}$ olmalıdır. Bu, $\mathbf{BX} = \mathbf{O}$ şartı ile de uyuşur.

$\mathbf{B} = \mathbf{O}$ olunca, $\mathbf{A} = (X'X)^{-1}X'$, $\mathbf{k} = (X'X)^{-1} X'Y$ halini alır.

Böylece, aranılan hususun ispatına varılmış olur.

Dördüncü olarak, 6^2 nın sapmasız bir tahminine ulaşmaya çalışalım :

(1-2), (1-3) ve (1-1) den yararlanarak aşağıdaki tarzda hareket edelim :

$$e = Y - Xb$$

$$e = X\beta + u - X\,(X'X)^{-1}X'\,(X\beta + u)$$

$$e = \ [I - X\,(X'X)^{-1}X']\ u$$

$I - X\,(X'X)^{-1}\,X'$ simetrik (5), idempotent (6) matriks olduğu için,

$$e'e = u'\,[\,I - X\,(X'X)^{-1}\,X'\,]\,u \quad \ldots\ldots (1\text{-}4)$$

$$E\,(e'e) = 6^2\ \mathrm{tr}\,[\,I - X\,(X'X)^{-1}\,X'\,] \quad \ldots\ldots (7)$$

---

(5) $\underline{A} = \underline{A}'$ olduğunda, $\underline{A}$ matriksine simetrik matriks denir. (Bak. G. Hadley, Ad. Ge. Es. s. 78.)

$$[\underline{I} - \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}']' = [\underline{I} - \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}']$$

(6) Idempotent matriks, kendisi ile çarpılınca aynı kalan matrikstir. Yani, $\underline{A}$, idempotent bir matrikstir, eğer

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \text{ ise}$$

(Bak. J. Johnston, Econometric Methods, s. 99).

$$[\underline{I} - \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}']\,[\underline{I} - \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}'] =$$
$$\underline{I} - 2\,\underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}' + \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}'\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}' =$$
$$\underline{I} - 2\,\underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}' + \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}' =$$
$$\underline{I} - \underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'$$

(7) $\underline{A}$ şeklinde bir matriksin trace'ı, $\underline{A}$ nın diagonal elamanlarının toplamına eşittir. Yani,

$$\mathrm{tr}\,(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\mathrm{tr}\,(\underline{AB}) = \mathrm{tr}\,(\underline{BA}),\ \mathrm{tr}\,(\underline{ABC}) = \mathrm{tr}\,(\underline{CAB}) = \mathrm{tr}\,(\underline{BCA})$$

$\underline{I}$, n x n matriksi olduğu takdirde, tr $(\underline{I}) = n$.

Yukarıda üzerinde durduğumuz idempotent matrikse, $\underline{A}$ dersek

$$E\,(\underline{u}'\underline{A}\underline{u}) = E\,(\sum_{ij} u_i\, u_j\, a_{ij})$$

$$= E\,(\sum_i a_{ii}\, u_i^2) + E\,(\sum_i \sum_j u_i\, u_j\, a_{ij})\quad i \neq j$$

Eşitliğin sağındaki ikinci terim, ancak i $\neq$ j durumu içindir.

$$= 6^2 \{ \text{tr } \mathbf{I} - \text{tr } [X'X (X'X)^{-1}] \}$$

$$E (\acute{e}e) = 6^2 (n - p)$$

Böylece,

$$s^2 = \frac{\acute{e}e}{n - p}$$

bize, 6^2 nin sapmasız bir tahminini verir.

II

Şimdi, katsayılar için önem seviyesi testi ve ilintili bazı konuları incelemeye çalışalım. Yukarıda işaret ettiğimiz gibi, burada bazı sonuçlara varabilmek için **u** nun dağılımı hakkında faraziye yapmak zorunluluğu ortaya çıkar.

Yukarıda yapmış olduğumuz faraziyelere bir yenisini ekliyecek, u_i nin normal dağılımında olduğunu ($i = 1, 2, \ldots n$) kabul ederek devam edeceğiz.

Bu son faraziye yapıldığına göre, β ve 6^2 nin tahmini için maksimum - olabilirlik (8) usulü kullanılabilecektir.

Olabilirlik eşitliği,

$$L = \frac{1}{(2 \pi 6^2)^{n/2}} \exp \left(- \mathbf{u'u}/26^2\right) \quad (9)$$

---

7 nci dip notun devamı

$$E (\underline{u'Au}) = E (\sum_i a_{ii} u_i^2) = 6^2 \sum_i a_{ii} = 6^2 \text{ tr } (\underline{A})$$

(Bu dip not için bak, F. A. Graybill, Ad. Ge. Es. s, 7, 87).

(8) (Meselâ, bak. P. G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics. s. 39 - 41. Keza, D. A. S. Fraser, Statistics, An Introduction. s. 224 - 226 ya bakılabilir).

(9) Normal dağılım,

$$p(u) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{u - \sum u}{6} \right)^2 \right]$$

olarak ifade edildiğine göre $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ normal dağılımları için eşitlik,

$$L = \frac{1}{(2\pi 6^2)^{n/2}} \exp \left(- \underline{u'u} / 2 6^2 \right)$$ şeklini alacaktır.

olacaktır.

(1 — 1) i ve logaritmayı kullanırsak,

$$\log L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log 6^2 - \frac{1}{2\,6^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

ifadesine erişiriz.

Maksimum - olabilirlik tahminleri, log L nin β ya ve 6^2 ye göre kısmı türevlerinin sıfıra eşit kılınmaları ile elde olunacaktır.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\log L) = \frac{2}{2\,6^2}(X'Y - X'X\beta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial 6^2}(\log L) = -\frac{n}{26^2} + \frac{1}{26^4}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = 0$$

Birinci eşitlikten görüldüğü gibi, maksimum - olabilirlik tahmini, en küçük kareler tahmininin aynisini ifade etmektedir.

İkinci eşitlikten yararlanılarak, $s^2 = \frac{e'e}{n-p}$ nin 6^2 nin sapmasız bir tahmini olduğu gösterilebilir. (10)

Şimdi, katsayılar için test formülünün elde olunmasına çalışalım.

Önce, çok değişkenli normal dağılıma sahip **u** nun, doğrusal bir fonksiyonu olan **b** nin çok - değişkenli normal dağılıma sahip olacağı esasını, ispatını vermeden, kabul edeceğimizi ifade edelim.

Bu esası kabul ettikten sonra, varmak istediğimiz sonucun elde edilmesi için zorunlu olan birkaç husus ve ispata yer vermemiz gerekiyor.

Şu hususlar üzerinde duracağız.

(a) Idempotent Matriks : Yukarıda ifade edildiği gibi, kendisi ile çarpılınca ayni kalan matrikse idempotent matrisk adı verilir. Bir idempotent matriksin karekteristik kökleri ya sıfır ya da bire eşittirler. (11)

---

(10) (Bak, F. A. Graybill, Ad. Ge. Es. s. 111 - 112).

(11) (Bak, J. Johnston. Ad. Ge. Es. s. 100).

(b) Ortogonal matriks : $C' = C^{-1}$ olduğunda, **C** matriksine ortogonal matriks denir.

Bir teorem üzerinde durarak devam edelim :

Her hangi bir simetrik matriks (**A**) için, **C** şeklinde bir ortogonal matriks vardır ki $C'AC = D$ olur, burada, **D** diagonal elemanları, **A** nın karekteristik kökleri olan diagonal bir matrikstir. (12)

Bunu ispatlamaya çalışalım :

$C = [c_1 \; c_2 \; .. c_n]$ diyelim.

c_i ler sütun şeklinde vektörleri göstersinler. Bu durumda,

$$C' = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix}$$ olacaktır. (13)

(12) Burada, karekteristik kök ve vektör konusu üzerinde durulmıyacaktır. Bu konuda, G. Hadley. Ad. Ge. Es. s. 236 - 249 a, daha özet bir bilgi için de, J. Johnston, Ad. Ge. Es. s. 95 - 97 e bakılabilir, Ayrıca, üzerinde durmakta olduğumuz konu, son eserin, s. 97 - 98 inde takip edilebilir.

(13) $$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots\dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots\dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots\dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}, \text{v.s.}$$

$\underline{C}$ nin ortogonal olması için, aşağıdaki iki şartın yerine gelmesi yeterlidir. (14)

$$c'_i \, c_j = 0 \quad \text{bütün } i \neq j \text{ için}$$

$$c'_i \, c_i = 1 \quad \text{bütün } i \text{ ler için}$$

Karekteristik vektörler, bu şartları yerine getiriyor oldukları için, aşağıdaki şekilde devam olunabilecektir.

$$C'AC = \| c'_i A c_j \| = \| c'_i d_j c_j \| = \| d_j c'_i c_j \|$$

c_j, d_j ye tekabül eden karakteristik vektör olduğu, dolayısiyle,

$Ac_j = d_j c_j$ bulunduğu için.

---

13 üncü dip notun devamı

$$\begin{bmatrix} \underline{c}'_1 \\ \underline{c}'_2 \\ \vdots \\ \underline{c}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots\ldots c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots\ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots\ldots c_{nn} \end{bmatrix} = \underline{C}'$$

(14)

$$\begin{bmatrix} \underline{c}'_1 \\ \underline{c}'_2 \\ \vdots \\ \underline{c}'_n \end{bmatrix} [c_1 \quad \underline{c}_2 \ldots \underline{c}_n] = \begin{bmatrix} \underline{c}'_1 \underline{c}_1 & \underline{c}'_1 \underline{c}_2 \ldots\ldots \underline{c}'_1 \underline{c}_n \\ \underline{c}'_2 \underline{c}_1 & \underline{c}'_2 \underline{c}_2 \ldots\ldots \underline{c}'_2 \underline{c}_n \\ \vdots & \vdots \\ \underline{c}'_n \underline{c}_1 & \underline{c}'_n \underline{c}_2 \ldots\ldots \underline{c}'_n \underline{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

Böylece, $\underline{C}' \, \underline{C} = \underline{I}$, $\underline{C}' = \underline{C}^{-1}$ olur.

Böylece,

$$C'AC = \begin{bmatrix} d_1 & o & \dots\dots & o \\ o & d_2 & \dots\dots & o \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ o & o & \dots\dots & d_n \end{bmatrix} = D$$

sonucuna varılmış, teorem ispatlanmış olur.

(c) **A**, rankı n - k olan bir simetrik idempotent matriks ise, **P** gibi öyle bir ortogonal matriks vardır ki, $P'AP = E_{n-k}$ dir. E_{n-k} diagonal elemanlarının (n - k) si bire ve geri kalanı sıfıra eşit olan diagonal bir matrikstir.

Bu teoremin ispatı için, diğer bir teoremden yararlanacağız. Rankı (n - k) olan bir matriks non - singular (15) bir matriks ile çarpıldığında çarpımın rankı (n - k) olur. (16)

Bu son teorem dolayisiyle, **P'AP** nin rankı n - k olacaktır. Böylece, meydana çıkacak matriksin diagonalinde (n - k) kadar bir yer alacak, geri kalan diagonal elemanlar sıfır olacaktır. Meselâ, n = 6, k = 3 olunca, **A**, karekteristik kökleri ya bire ya da sıfıra eşit olacağına göre,

$$P'AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3 \text{ olacaktır.}$$

(15) $\underline{A}$ şeklindeki bir kare matriks $|\underline{A}| = O$ olunca singular, $|\underline{A}| \neq O$ olunca non-singulardır

Dizileri sayısı, sütunları sayısına eşit olan matrikse, kare matriks denir.

(16) (Bak, G. Hadley, Ad. Ge. Es. s. 139).

(d) Bu **P** ortogonal matriksini **u** vektöründen **v** vektörüne dönüşüm için kullanalım. $\mathbf{u} = \mathbf{Pv}$

(1-4) u ele alalım :

$$
\begin{aligned}
e'e &= u' \,[I - X\,(X'X)^{-1}X']\, u \\
&= v'P' \,[I - X\,(X'X)^{-1}X']\, Pv \\
&= v'E_{n-k}\, v \\
&= v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n-k}^2
\end{aligned}
$$

Şimdi, bu hususlara dayanarak b_i nin, ortalaması β_i ve değişmesi $a_{ii}\,6^2$ olan normal bir dağılıma sahip olduğunu söyliyebileceğiz.

Ayrıca, $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 / 6^2$ nin (n-k) seçim imkânlı bir kay-kare dağılımına sahip olduğu da ifade olunabilecektir. (17)

Böyle olunca, $\dfrac{b_i - \beta_i}{\sqrt{a_{ii}\,6^2}}$, öğrenci-t dağılımının tanımındaki (18) u yu, $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 / 6^2$ de v^2 yi ifade edecektir. O halde,

---

(17) Bunu ileriye sürebilmek için, v_i lerin normal ve bağımsız dağılımda olduklarını (bu husus için, bak, J. Johnston, Ad. Ge. Es. s. 102-103), v, sıfır ortalama ve bire eşit değişme ile normal olarak dağılmışsa, bu dağılımdan alınan n sayıda rastgele örnekteki v lerin kareleri toplamının, n seçim imkânlı bir kay-kare dağılımına sahip bulunduğunu (bu konu için, bak, P. G. Hoel, Ad. Ge. Es. s. 216-217) göstermek gerekir.

(18) Bak, yine, P. G. Hoel, Ad. Ge. Es. s. 224.
Burada, t dağılımını uygulayabilmek için $\underline{e}'\underline{e}$ nin $\underline{b}$ den bağımsız olarak dağıldığını ispatlamak (bu husus için, yine, J. Johnston. Ad. Ge. Es. s. 117-118 e bakılabilir) lâzım gelir.

$$t = \frac{\dfrac{b_i - \beta_i}{\sqrt{a_{ii}\,\sigma^2}}\,\sqrt{n-k}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/\sigma^2}}$$ olacaktır.

Buradan da,

$$t = \frac{b_i - \beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/n-k}\,\sqrt{a_{ii}}}$$ ye varılacaktır.

Yüzde doksanbeş güven aralığına ulaşmak istendiğinde,

$$-t_{.025} < \frac{b_i - \beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/n-k}\,\sqrt{a_{ii}}} < t_{.025}$$

şeklinde hareket olunabilecektir. Buradan da,

$$b_i - t_{.025}\sqrt{\sum e_i^2/n-k}\,\sqrt{a_{ii}}$$

$$< \beta_i < b_i + t_{.025}\sqrt{\sum e_i^2/n-k}\,\sqrt{a_{ii}}$$

sonucuna varılabilecektir.

III

Y lerin kendi ortalamaları $\overline{Y}$ den sapmalarının karelerinin toplamına, toplam değişme denirse, bu iki kısıma bölünebilir. İlk kısım, regresyon doğrusunun açıklıyabildiği, ikinci kısım ise bu doğrunun açıklıyamadığı parçadır. Yani, toplam değişme,

$$\Sigma (Y - \overline{Y})^2 = \Sigma y^2$$

ile ifade edildiğinde, regresyon doğrusunun açıkladığı kısım

$$\Sigma (Y_c - \overline{Y})^2 = \Sigma y_c^2 \text{ ile}$$

açıklanmıyan parça ise,

$$\Sigma (Y - Y_c)^2 = \Sigma y_s^2 \text{ ile}$$

gösterilebilecektir.

Regresyon doğrusunun açıkladığı oranı veren

$$r^2 = \frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2}$$

ifadesi tayin (determination) katsayısı adını alır. Bunun kare köküne (r) bağıntı katsayısı adı verilir.

$$\Sigma y_c^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_s^2$$

olduğu için,

$$r^2 = \frac{\Sigma y^2 - \Sigma y_s^2}{\Sigma y^2} = 1 - \frac{\Sigma y_s^2}{\Sigma y^2}$$

olarak yazılabilecektir.

$$r = \frac{\sqrt{\Sigma (Y_c - \overline{Y})^2}}{\sqrt{\Sigma (Y - \overline{Y})^2}}$$

olduğu, $\bar{Y} = \bar{Y}_c$ (19) bulunduğu için,

$$r = \frac{s_{y_c}}{s_y}$$

yazılabilecektir. Burada, s_{y_c}, Y_c nin standard sapmasını, s_y, Y nin standard sapmasını ifade ederler. (20)

$\frac{s_{y_c}}{s_y}$ şeklinde ifade olunan bağıntı katsayısının,

$\frac{\sum xy}{n\, s_x s_y}$ e eşit olduğu gösterilebilir. (21) Bunun için, bağıntı katsayısının, çokca,

$$r = \frac{\sum x\,y}{n\, s_x s_y}$$

şeklinde ifadesine raslanır.

Hesaplamalarda kullanılan formüle, bu son ifadeden yararlanılarak ulaşılabilir :

---

(19) $Y_c = a + b\,X$

$\sum Y_c = na + b \sum X$

Bu, iki değişken olması halindeki normal eşitliklerden birinin aynisi olduğu için, $\sum Y_c = \sum Y$ dir. Buradan da, $\bar{Y}_c = \bar{Y}$ sonucuna varılır.

(20)

$$r = \sqrt{1 - \frac{\sum (Y - Y_c)^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{y.x}}{s^2_y}}$$

şeklinde de yazılabilecektir.

(21) Bak, M. Ezekiel, Methods of Correlation Analysis. Sec. Ed. s. 491 - 492.

$$\Sigma xy = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \; \Sigma Y}{n}$$

$$n \, s_x \, s_y = \sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}} \; \sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}}$$

olarak ifade edilebilecekleri için,

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{\Sigma X \; \Sigma Y}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}\right]\left[\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}\right]}}$$

formülüne varılabilecektir.

Şimdi, kısaca çoklu bağıntı üzerinde durmaya çalışalım. Yukarda gördüğümüz gibi basit bağıntı katsayısında yalnız bir tane bağımsız değişken mevcut idi. Bir kaç değişkenin olması halinde, çoklu bağıntıya başvurulur.

Böyle olduğu için, çoklu bağıntı katsayısı, basit bağıntı katsayısından farklı bir tarafa sahiptir. Fakat, çoklu bağıntı katsayısının bulunmasında da aynı prensipten hareket olunur. Bağımlı değişkenlerdeki toplam değişme yine paydada yer alacak, payda, bağımsız değişkenlerle izah edilen değişme bulunacak. Yani, basit bağıntı katsayısı ile olan fark, payda bir bağımsız değişkene atf edilen değişme yerine bir kaç bağımsız değişkenin yarattığı değişmenin yer almasıdır.

X_1, bağımsız değişkeni, $X_2, \ldots\ldots X_p$ bağımlı değişkenleri ifade ettiklerinde, R^2 nin hesaplama formülü

$$R^2 = \frac{b_2 \, (\Sigma x_1 x_2) + b_3 \, (\Sigma x_1 x_3) + \ldots\ldots + b_p \, (\Sigma x_1 x_p)}{\Sigma x_1^2} \qquad (22)$$

---

(22) Örnekten bulunan çoklu bağıntı katsayısının kütleninkinden büyük olması eğilimi vardır. Bu, özellikle, örnek küçük olduğunda, ya da değişkenler fazla bulunduğunda belirlidir. Bunun için, verilen formülde düzeltme yapılması gerekir. Düzeltme işi aşağıdaki gibi yapılır :

Bu formülde,

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \bar{X}_1 \sum X_1$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \bar{X}_2 \sum X_2$$

$$\sum x_1x_2 = \sum X_1X_2 - \bar{X}_1 \sum X_2$$

$$\sum x_1x_3 = \sum X_1X_3 - \bar{X}_1 \sum X_3 \qquad \text{v.s.dir.}$$

Bu çoklu bağıntı katsayısını test etmek için, F dağılımından yararlanılır.

$$F = \frac{R^2 (n - p)}{(1 - R^2)(p - 1)}$$

teşkil edilerek sonuca varılmaya çalışır. Bu dağılım, p - 1 ve n - p seçim imkânlı bir F dağılımıdır. (p, bağımlı, bağımsız değişkenlerin miktarını gösterir).

Bu teste göre, kütlede çoklu bağıntı katsayısının sıfır olduğu şeklindeki boş hipotez red edilince, anlamlı bir çoklu bağıntının mevcut olduğu sonucuna, değişkenler arasında anlamlı bir ilişki bulunduğu neticesine varılır.

Son olarak kısmi bağıntı katsayısı üzerinde durmaya çalışalım. Bu katsayı, mevcut diğer değişkenlerin etkileri bertaraf edildiğinde, iki değişken arasındaki bağıntıyı ortaya koyar. Sabit tutulan değişken, bir tane (x_3) olduğu zaman, kısmî bağıntı katsayısı,

---

22 inci dip notun devamı.

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - m}$$

Burada, n, örnekteki gözlem miktarını, m regresyon denklemindeki sabit miktarını ifade ederler.

Burada, bir de, tahmin standard hatası ile çoklu bağıntı katsayısı arasındaki ilişkiyi ifade eden formülü verelim :

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum x_1^2}{n - 1} (1 - \bar{R}^2)$$

(Bu dip not için, bak. M. Ezekiel, Ad. Ge. Es. s. 211, Keza, L. R. Klein, A Textbook of Econometrics, s. 153 e bakılabilir.)

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - (r_{13})\ (r_{23})}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)\ (1 - r_{23}^2)}}$$

olarak elde olunur.

Burada, r_{12}, x_1 ve x_2 arasındaki, r_{13}, x_1 ve x_3 arasındaki, r_{23}, x_2 ile x_3 arasındaki basit bağıntı katsayılarını ifade ederler.

Kısmî bağıntı katsayısı kavramı, değişkenlerin üçten fazla olması halinde de uygulanabilir. Meselâ, dört değişkenin mevcut bulunması halinde,

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}\ \ r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)\ (1 - r_{23.4}^2)}}$$

formülü (ve benzer şekildeki formüller) ile sonuca varılmaya çalışılır.