İKTİSAT ve MALİYE

DİFFERANSİYEL DENKLEMLER VE BAZI İKTİSADİ MODELLER

Dr. Tuncer BULUTAY

Bazı basit differansiyel denklemlerin ve bunların iktisada uygulanışlarının kısaca üzerinde durulduğu bu çalışma dört kısımdan meydana geliyor.

Birinci sıra ve birinci derece denklemler ilk kısmın konusu oluyorlar.

İkinci kısımda sabit katsayılı doğrusal differansiyel denklemler ele alınıyor ve bunların çözümüne ulaşılmaya çalışılıyor.

Üçüncü kısımda, kısaca, sabit katsayılı simultane doğrusal differansiyel denklemler üzerinde duruluyor.

Çalışma, M. Kalecki, E. D. Domar ve A. W. Phillips modellerini konu edinen dördüncü kısımla son buluyor. Burada modellerin teorik ve iktisadî özellikleri üzerinde durulmuyor, matematik ifadeleriyle yetiniliyor.

I

İçlerinde differansiyel katsayıları bulunduran denklemlere differansiyel denklemler denir. Aşağıdaki ifadelerin her biri bir differansiyel denklemdir :

$$\frac{d^2y}{d\,x^2} - 4y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = \operatorname{Sin} 6x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Tek bir bağımsız değişkenli denklemlere alelâde differansiyel denklemler adı verilir. Yukardaki ifadelerden (1), (2) ve (4) alelâde differansiyel denklemlerdir. Bunların her birinde y bağımlı, x bağımsız değişkendir.

Birden fazla bağımsız değişkenin mevcut bulunması ve kısmî differansiyel katsayısının yer alması halinde kısmî differansiyel denklemlerden bahis olunur. Yukardaki (3) üncü ifade bir kısmî differansiyel denklemdir. Burada, z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenlerdir.

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek sıra differansiyel katsayısı o denklemin sırasını ifade eder. Yukardaki ifadelerden, (1) ve (3) ikinci sıra, (2) ve (4) birinci sıra differansiyel denklemlerdir.

Birinci sıra ve birinci derece denklemler :

Bu kısımda üzerinde durmağa çalışacağımız denklemlerin birinci sıra olma özelliğinden başka, birinci derecede bulunma (denklemlerde $\frac{dy}{dx}$ in yalnızca birinci üsle yer alması) vasfı vardır.

Bu denklemler aşağıdaki şekilde ifade olunabilirler :

$$Mdx + Ndy = 0$$

Burada, M ve N, x ve y nin fonksiyonudurlar. Bahis konusu denklemlere bazı özel haller için çözüm bulmağa çalışarak devam edelim :

I. Değişkenlerin ayrılabilir olması hali :

Denklem,

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0$$

şeklinde yazılabildiği takdirde, değişkenler ayrılabiliyor demektir. Bu halde çözüm,

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = c$$

şeklinde elde olunur. c sabiti ifade eder.

Örnek :

$$(1 + x^2)\,ydx + (1 - y^2)\,xdy = 0$$

$$\left(\frac{1 + x^2}{x}\right) dx + \left(\frac{1 - y^2}{y}\right) dy = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - y\right) dy = c$$

$$\operatorname{Log} x + \frac{x^2}{2} + \log y - \frac{y^2}{2} = c$$

$$2 \log xy + x^2 - y^2 = c$$

2. Tam (egzakt) denklemler :

Bazan incelemek istediğimiz ifade tam bir differansiyel halindedir. Bu durumda, çözüme kolayca varılır. Meselâ,

$ydx + xdy = 0$ dır.

Buradan, $d(yx) = 0$

$xy = c$ sonucuna varmak kolaydır.

Bazan, üzerinde durulan ifade ilk bakışta tam olmaktan uzak bulunduğu halde, integrali sağlıyan faktör denilebilen bir unsurla çarpılınca tam differansiyel haline dönüşür. Meselâ

$$\tan x \, dy = \mathrm{Cot}\, y \, dx$$

$$\frac{\mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cos}\, x} dy = \frac{\mathrm{Cos}\, y}{\mathrm{Sin}\, y} dx$$

tam değildir. Fakat, $(-\mathrm{Sin}\, y \, \mathrm{Cos}\, x)$ ile çarpılınca yukardaki ifade aşağıdaki tam hali alır.

$$-\mathrm{Sin}\, y \, \mathrm{Sin}\, x \, dy + \mathrm{Cos}\, y \, \mathrm{Cos}\, x \, dx = 0$$

$$d\,(\mathrm{Sin}\, x \, \mathrm{Cos}\, y) = 0$$

$$\mathrm{Sin}\, x \, \mathrm{Cos}\, y = c$$

$(-\mathrm{Sin}\, y \, \mathrm{Cos}\, x)$ integrali sağlıyan faktör adını alır.

3. Homojen Denklemler :

$Mdx + Ndy = 0$ denkleminde, M ve N ayni dereceden homojen fonksiyonlar iseler, bahis konusu denklem homojendir denir. Bu takdirde $y = vx$ kullanılarak çözüme ulaşılabilir. Tabii, bu halde,

$dy = vdx + xdv$ halini alır.

Örnek :

$$(x - y)^2 \, dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) \, dy = 0$$

$y = vx$ diyelim. $dy = vdx + xdv$ olacaktır.

$$(x^2 - 2x^2 v + v^2 x^2) \, dx - (x^2 vdx + x^3 dv - 2x^2 v^2 \, dx - 2x^3 vdv +$$

$$3v^3 x^2 dx + 3v^2 x^3 dv) = 0$$

$$(1 - 3v + 3v^2 - 3v^3) \, dx + (-x + 2xv - 3v^2 x) \, dv = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \left(\frac{-1 + 2v - 3v^2}{1 - 3v + 3v^2 - 3v^3}\right) dv = 0$$

$$\log x + \frac{1}{3} \log (1-3v+3v^2-3v^3) = \log c$$

$$3 \log x + \log (1-3v+3v^2-3v^3) = 3 \log c$$

$$\log x^3 (1-3v+3v^2-3v^3) = \log c^3$$

$$x^3 \ (1 - 3v + 3v^2-3v^3) = a \quad , \quad (a = c^3)$$

$$x^3 \left[1 - 3 \left(\frac{y}{x}\right) + 3 \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3 \left(\frac{y}{x}\right)^3 \right] = a$$

$$x^3 - 3yx^2 + 3y^2 x - 3y^3 = a$$

Bazan verilen eşitlik homojen olmadığı halde homojen şekle sokulabilir. İfade,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

olduğunda,

$$x = X + h$$

$$y = Y + k$$

kullanılarak dönüşüm sağlanmaya çalışılır. (h, k), $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ve $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ doğrularının kesiştiği noktayı ifade eder. h ve k sabit oldukları için,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \quad \text{dır.}$$

Böylece, üzerinde durulan ifade,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} \quad \text{şeklini alır.}$$

Bundan sonra da homojen şekli almış bu son denklemin çözümü elde olunur. Çözüm sağlandıktan sonra, y ve x e çevrilir.

Örnek :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x-3y-1}{x+y+1}$$

$-4x-3y-1=0$ ve $x+y+1=0$ ın kesişme noktası $(2, -3)$ dür.

$$x = X + 2, \qquad y = Y - 3$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-4(X+2) - 3(Y-3) - 1}{X+2+Y-3+1}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-4X - 3Y}{X+Y}$$

$$Y = VX, \qquad dY = VdX + XdV$$

$(VdX + XdV)\ (X + VX) = (-4X-3VX)\ dX$ $(VX + V^2X + 4X + 3VX)\ dX + (X^2 + VX^2)\ dV = 0$

$$\left(\frac{1}{X}\right)dX + \left(\frac{1+V}{V^2+4V+4}\right) dV = 0$$

$$\left(\frac{1}{X}\right) dX + \frac{2}{2}\left(\frac{2+V}{V^2+4V+4}\right) dV - \left(\frac{1}{V^2+4V+4}\right) dV = 0$$

$$\log X + \frac{1}{2}\log\ (V^2+4V+4) + \frac{1}{V+2} = c$$

$$\log X\sqrt{(V^2+4V+4)} + \frac{1}{V+2} = c$$

$$\log \sqrt{Y^2+4YX+4X^2} + \frac{1}{\dfrac{Y}{X}+2} = c$$

$$\log \sqrt{y^2 + 4yx + 4x^2 - 2y - 4x + 1} + \frac{1}{\dfrac{y+3}{x-2} + 2} = c$$

$$\log (y + 2x - 1) + \frac{x-2}{y + 2x - 1} = c$$

Kovalanan bu usul, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ve $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ doğruları paralel oldukları zaman işlemez bir hal alır. Bu durumda, çözüme ulaşabilmek için,

$$a_1 x + b_1 y = z$$

dönüşümünden yararlanılır.

Örnek :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$

$$3x - 4y = z$$

$$3 - 4\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} = \frac{z-2}{z-3} - \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3-z}{z+1}\right) dz = dx$$

$$\left(-1 + \frac{4}{z+1}\right) dz = dx$$

$$-z + 4 \log (z + 1) = x + c$$

$$4 \log (3x - 4y + 1) = 4x - 4y + c$$

4. Doğrusal Denklemler :

p ve Q, yalnızca x in fonksiyonu bulundukları ya da sabit oldukları takdirde,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + py = Q}$$

denklemi, birinci sıra doğrusal differansiyel denklem adını alır.

Bu denklemin çözümüne, terimlerin $e^{\int pdx}$ ile çarpılması ile ulaşılır. (1).

$e^{\int pdx}$ e integrali sağlıyan faktör adı verilir.

---

(1) $$e^{\int pdx} \frac{dy}{dx} + pye^{\int pdx} = Qe^{\int pdx}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int pdx}) = \frac{dy}{dx} e^{\int pdx} + pye^{\int pdx}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int pdx}) = Qe^{\int pdx}$$

$$ye^{\int pdx} = \int Q e^{\int pdx} dx + c$$

$$y = e^{-\int pdx} \int Q e^{\int pdx} dx + ce^{-\int pdx}$$

Örnek :

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

Burada, $p = 1$ dir. $e^{\int p dx} = e^x$ olarak bulunur.

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = x^2 e^x$$

$$\frac{d}{dx} (ye^x) = x^2 e^x$$

$$ye^x = \int x^2 e^x dx + c$$

Kısımlara ayırarak integral usulü uygulandığında,

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$y = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$$

sonucuna ulaşılır.

5. Doğrusal Şekle Çevrilebilen Denklemler :

p ve Q, yine x in fonksiyonu oldukları takdirde,

$$\frac{dy}{dx} + py = Qy^n$$

denklemi doğrusal şekle çevrilebilir. Bernoulli denklemi adını alan bu ifade y^n ye bölündüğü ve $y^{1-n} = z$ denildiği zaman, doğrusal şekle çevirme işlemi sağlanmış olur. Bundan sonra bilinen usul uygulanarak çözüme ulaşılır.

Örnek :

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

$$\frac{x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = \log x$$

$$\frac{1}{y} = z \;, \; - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \;, \; \frac{dy}{dx} = - y^2 \frac{dz}{dx}$$

$$-x \frac{dz}{dx} + z = \log x$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = - \frac{1}{x} \log x$$

$$p = - \frac{1}{x} \;, \; \int p dx = - \log x,$$

$$e^{\int p dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} z = - \frac{1}{x^2} \log x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} z \right) = - \frac{1}{x^2} \log x$$

$$\frac{1}{x} z = \int - \frac{1}{x^2} \log x \, dx$$

$\log x = u$, $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$ denilmek ve kısımlara ayırarak integral kuralı uygulanmak suretiyle

$$\int -\frac{1}{x^2} \log x \, dx = \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x} + c$$ olarak bulunur.

Böylece,

$$\frac{1}{y} = \log x + 1 + cx$$

sonucuna ulaşılır.

II

Sabit Katsayılı Doğrusal Differansiyel Denklemler :

a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n sabit oldukları ve, f (x), x in fonksiyonu bulunduğu taktirde,

$$\boxed{a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)}$$

denklemi, sabit katsayılı doğrusal differansiyel denklem adını alır.

$$\frac{dy}{dx} = Dy , \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y, \ldots\ldots\ldots, \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

dendiği takdirde, yukarki denklem,

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n) \; y = f(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Böyle bir denklemin çözümüne ulaşmak için tamamlayıcı fonksiyon ile özel integralin birbirlerine eklenmesi gerekir.

Önce, üzerinde durulan denklemin sağ tarafına sıfır denilmesi ile elde olunan denklemin çözümünü ifade eden tamamlayıcı fonksiyon üzerinde durmıya çalışalım.

A. Tamamlayıcı Fonksiyon :

İncelememizi ikinci sıra denklemler üzerinde yapacağız. Elde olunacak sonuçların, 4 ve 6 numaralı dip notlardaki esaslar gözönünde bulundurulmak şartiyle, daha yüksek sıralı denklemleri kapsıyacak şekilde genişletilmeleri kolayca başarılabilecektir.

İkinci sıra denklemler için tamamlayıcı fonksiyonun elde edilmesine çalışıldığına göre,

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) \, y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

şeklindeki denklem üzerinde duruluyor demektir.

$y = Ae^{kx}$ in, yukarki denklemin bir çözümü olup olmadığını araştıralım.

$$Dy = k\,A\,e^{kx}, \qquad D^2 y = k^2\,A\,e^{kx}$$

olduklarına göre,

$$a_0 k^2 Ae^{kx} + a_1 kAe^{kx} + a_2 Ae^{kx} = 0$$

şeklinde devam olunabilecektir.

$$Ae^{kx} \, (a_0 k^2 + a_1 k + a_2) = 0$$

O halde, k, $(a_0 k^2 + a_1 k + a_2)$ nin kökü olduğu takdirde, Ae^{kx}, (1) in çözümü olacaktır.

$(a_0 k^2 + a_1 k + a_2)$ ye yardımcı ya da karakteristik denklem adı verilir.

Burada, köklerin mahiyetine göre üç hal ayırmak gerekir.

a) Köklerin gerçek ve farklı ($b^2 - 4ac > 0$) olması hali :

Bu halde tamamlayıcı fonksiyon,

$y = Ae^{k_1x} + Be^{k_2x}$ olarak elde edilecektir. (2)

Burada A ve B başlangıç şartlarına göre tayin olunabilecek sabitleri ifade ederler.

Örnek :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Yardımcı denklem

$k^2 - 4k + 3 = 0$ dır.

$k_1 = 1 , \quad k_2 = 3$

O halde, tamamlayıcı fonksiyon,

$y = Ae^x + Be^{3x}$

olarak elde olunacaktır.

---

(2) Yukardaki (1) işaretli denklemi ele alarak bunu doğrulamaya çalışalım.

$$y = Ae^{k_1x} + Be^{k_2x}$$

$$Dy = k_1 Ae^{k_1x} + k_2 Be^{k_2x}$$

$$D^2y = k^2{}_1 Ae^{k_1x} + k^2{}_2 Be^{k_2x}$$

$$a_0 D^2y + a_1 Dy + a_2 y = a_0 (k_1{}^2 Ae^{k_1x} + k^2{}_2 Be^{k_2x})$$

$$+ a_1 (k_1 Ae^{k_1x} + k_2 Be^{k_2x}) + a_2 (Ae^{k_1x} + Be^{k_2x})$$

$$= Ae^{k_1x} (a_0 k^2{}_1 + a_1 k_1 + a_2)$$

$$+ Be^{k_2x} (a_0 k^2{}_2 + a_1 k_2 + a_2) = 0$$

k_1 ve k_2 kökleri ifade ettiklerine göre, parantezler sıfıra eşit olacaklar, dolayısıyla, gösterilen sonuca varılacaktır.

b) Köklerin Gerçek ve Birbirlerine Eşit ($b^2 = 4ac$) Olması Hali :

Bu durumda tamamlayıcı fonksiyon,

$y = (A + Bx)\, e^{kx}$ dir. (3), (4) Homogenious solution

Burada, A ve B yine sabiti ifade ederler.

Örnek :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

---

(3) Bu halde denklem,

$D^2y - 2a\,Dy + a^2y = 0$

yazılabilecektir. $k = a$ olacaktır.

$y = Ae^{kx} + Bxe^{kx}$

$Dy = kAe^{kx} + kBxe^{kx} + Be^{kx}$

$D^2y = k^2Ae^{kx} + k^2Bxe^{kx} + kBe^{kx} + kBe^{kx}$

$D^2y - 2a\,Dy + a^2y = k^2Ae^{kx} + k^2Bxe^{kx} + kBe^{kx} + kBe^{kx}$

$- 2a\,(kAe^{kx} + kBxe^{kx} + Be^{kx}) + a^2\,(Ae^{kx} + Bxe^{kx})$

$= Ae^{kx}\,(k^2 - 2ak + a^2) + Be^{kx}\,(2k - 2a)$

$+ Bxe^{kx}\,(k^2 - 2ak + a^2) = 0$

$k = a$ olduğu için, parantez içindekiler sıfıra eşit bulunacaklar, böylece $y = (A+Bx)\,e^{kx}$ in, bahsi edilen denklemin çözümünü verdiği gösterilmiş olacaktır.

(4) p kadar kök birbirlerine eşit bulundukları zaman,

$y = (A_1 + A_2x + A_3x^2 + \dots\dots\dots + A_p\,x^{p-1})\,e^{kx}$ olacaktır.

$k^2 + 6k + 9 = 0$

$k = -3$ iki tane

$y = (A + Bx)\, e^{-3x}$

c) Köklerin Karmaşık ($b^2 < 4ac$) Olması Hali:

Bu halde kökler,

$k_1 = a + bi, \quad k_2 = a - bi$

olarak bulunacaklardır. Ulaşılmak istenen sonuç ise,

$y = Ae^{(a+bi)\,x} + Be^{(a-bi)\,x}$ .... (2)

olacaktır. Bahis konusu sonuç aşağıdaki şekillerde de ifade olunabilecektir:

$y = e^{ax} [\, c_1 \operatorname{Cos} bx + c_2 \operatorname{Sin} b\, x \,]$

$y = ce^{ax} \operatorname{Cos} (\, bx - \alpha \,)$ (5) (6)

---

(5) Bu sonuçlara şöylece varılmaktadır:

$e^{ibx} = \operatorname{Cos} bx + i \operatorname{Sin} bx$

$e^{-ibx} = \operatorname{Cos} bx - i \operatorname{Sin} bx$

olduklarına göre, (2) işaretli ifade,

$y = e^{ax} (Ae^{bix} + Be^{-bix})$

$y = e^{ax} [\, A(\operatorname{Cos} bx + i \operatorname{Sin} bx) + B(\operatorname{Cos} bx - i \operatorname{Sin} bx) \,]$

olarak yazılabilecektir.

$y = e^{ax} [\, (A+B)(\operatorname{Cos} bx) + i(A - B)(\operatorname{Sin} bx) \,]$

$A + B = c_1$ ve $i(A - B) = c_2$ dersek,

$y = e^{ax} [c_1 \operatorname{Cos} bx + c_2 \operatorname{Sin} bx]$ olacaktır.

$c_1 = c \operatorname{Cos} \alpha$, $c_2 = c \operatorname{Sin} \alpha$ diyelim.

$c_1{}^2 + c_2{}^2 = c^2 (\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha) = c^2$

Örnek :

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$k^2 + k + 3 = 0$$

$$k_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \quad , \quad k_2 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$$

$$c = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{c \operatorname{Cos} \alpha} = \frac{c_2}{c_1}$$ sonuçları elde edilir. Ayrıca,

$$y = e^{ax} \left[c \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} bx + c \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} bx \right]$$

$$y = e^{ax} \left[c \operatorname{Cos} (bx - \alpha) \right]$$

$$y = ce^{ax} \operatorname{Cos} (bx - \alpha)$$ sonucuna varılır.

(6) p kadar birbirlerine eşit karmaşık kökler mevcut bulunduğu zaman

$$y = (A_1 + A_2 x + \ldots\ldots\ldots + A_p x^{p-1}) e^{(a+bi)x}$$

$$+ (B_1 + B_2 x + \ldots\ldots\ldots + B_p x^{p-1}) e^{(a-bi)x}$$ olacaktır.

$$y = e^{ax} \left[(A_1 + A_2 x + \ldots\ldots\ldots + A_p x^{p-1}) e^{ibx} \right.$$

$$\left. + (B_1 + B_2 x + \ldots\ldots\ldots + B_p x^{p-1}) e^{-ibx} \right]$$

$$y = e^{ax} \Big\{ \left[(A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) x + \ldots\ldots\ldots + (A_p + B_p) x^{p-1} \right] \operatorname{Cos} bx$$

$$+ \left[i(A_1 - B_1) + i(A_2 - B_2) x + \ldots\ldots\ldots + i(A_p - B_p) x^{p-1} \right] \operatorname{Sin} bx \Big\}$$

$$A_1 + B_1 = D_1 \,,\; A_2 + B_2 = D_2 \,.\; \ldots\ldots\ldots ,\; (A_p + B_p) = D_p$$

$$i(A_1 - B_1) = E_1 \;,\; i(A_2 - B_2) = E_2 \,,\; \ldots\ldots\ldots ,\; i(A_p - B_p) = E_p$$

dersek,

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{11}}{2}, \quad y = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \operatorname{Cos} \frac{\sqrt{11}}{2} x + c_2 \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{11}}{2} x\right)$$

ya da

$$y = ce^{-\frac{x}{2}} \operatorname{Cos} \left(\frac{\sqrt{11}}{2} x - \alpha \right)$$

Burada,

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{ve} \quad \tan \alpha = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{dir.}$$

B. Özel İntegral :

Yukarda ifade edildiği gibi, sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklem,

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n) \; y = f(x)$$

olarak yazılabilirdi.

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n) = F(D)$$

dersek,

$F(D)\, y = f(x)$ ifadesine varılacaktır.

Buradan da,

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x)$$

şekline geçilebilecektir.

$$y = e^{ax} \left[(D_1 + D_2 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + D_p x^{p-1}) \operatorname{Cos} bx \right.$$

$$\left. + (E_1 + E_2 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + E_p x^{p-1}) \operatorname{Sin} bx \right]$$

sonucuna varılacaktır.

Şimdi, bu son ifade şeklini kullanarak, f (x) in bazı değerlerine göre özel integrali elde etmeye çalışalım. (7)

a) $f(x) = e^{ax}$ Olması Hali:

Bu durumda,

$$\frac{1}{F(D)} e^{ax} \quad \text{yerine} \quad \frac{1}{F(a)} e^{ax}$$

kullanılarak istenilen sonuca varılabilecektir. (8)

---

(7) f (x) yerinde bir sabitin bulunması halinde sonuca y = z (z, bulunacak sabiti ifade eder) denerek varılır. z sabit olduğu için $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ olacaktır.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = B \quad , \quad z = \frac{B}{c}$$

olarak bulunacaktır.

Bulunan bu özel integral,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

nın vereceği tamamlayıcı fonksiyona eklenerek, üzerinde durulan differansiyel denklemin çözümüne ulaşılır.

c = 0 olması halinde, y = zt nin, b = 0 bulunması durumunda ise $y = zt^2$ nin denenmesi ile sonuca varılmaya çalışılacaktır. Bu konuda, W. J. Baumol'ün «Economic Dynamics» adlı kitabının s. (290 - 293) üne bakılabilir.

(8) $$F(D)e^{ax} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} D + a_n) e^{ax}$$

$$De^{ax} = ae^{ax}, \quad D^2 e^{ax} = a^2 e^{ax}, \quad D^3 e^{ax} = a^3 e^{ax}$$

$$D^4 e^{ax} = a^4 e^{ax}, \quad \dots\dots\dots\dots, \quad D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$$

Yalnız, bu yola $F(a) \neq 0$ olduğunda başvurulabilecektir (9)

Örnek :

$$(D^2 + D - 2)\, y = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{D^2 + D - 2}\, e^{-x}$$

Burada, $a = -1$ olduğuna göre,

$$y = \frac{1}{(-1)^2 - 1 - 2}\, e^{-x} = -\frac{1}{2}\, e^{-x}$$

aranılan sonucu ifade edecektir.

b) $f(x) = x^m$ Olması Hali :

Bu durumda, $\frac{1}{F(D)}$ şeklinde yazmak ve çoğunlukla kısmî kesirler yolunu ve binomial teoremi uygulamak suretiyle özel integrale varılmaya çalışılır :

$$F(D)\, e^{ax} = (a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1} a + a_n)\, e^{ax}$$

$$F(D)\, e^{ax} = F(a)\, e^{ax}$$

$$\frac{1}{F(D)}\, [F(D)\, e^{ax}] = e^{ax} \quad , \quad \frac{1}{F(D)}\, [F(a)\, e^{ax}] = e^{ax}$$

$$F(a)\, \frac{1}{F(D)}\, e^{ax} = e^{ax} \quad , \quad \frac{1}{F(D)}\, e^{ax} = \frac{1}{F(a)}\, e^{ax}$$

(9) $F(a) = 0$ olduğunda nasıl bir yol uygulanacağı hakkında, H.T.H. PİAGGİO'-nun, An Elementary Treatise on Differantial Equations, adlı kitabının s. 34, 35 ine bakılabilir.

Örnek :

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = - 48x^2 - 76\,x + 44$$

$$y = \frac{1}{D^2 - D - 2} \qquad (-48x^2 - 76\,x + 44)$$

Kısmî kesirler yoluyla,

$$\frac{1}{D^2 - D - 2} = - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2-D} + \frac{1}{1+D} \right)$$

olarak elde edilir.

$$- \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2-D} + \frac{1}{1+D} \right) =$$

$$- \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} + (1+D)^{-1} \right]$$

$$= - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \ldots\ldots\right) + (1 - D + D^2 - \ldots\ldots\ldots) \right]$$

$$= \left(- \frac{1}{2} + \frac{1}{4} D - \frac{3}{8} D^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

D^2 den ötesi, üzerinde durulmakta olan denklemin çözümünde bir değişiklik yaratmıyacağı için göz önüne alınmamaktadır.

O halde, aşağıdaki şekilde hareket mümkün bulunacaktır.

$$y = \left(- \frac{1}{2} + \frac{1}{4} D - \frac{3}{8} D^2 \ldots\ldots \right) \ (- 48\,x^2 - 76\,x + 44)$$

$$y = 24x^2 + 38x - 22 - 24x - 19 + 36$$

$$y = 24x^2 + 14x - 5$$

olarak, özel integrale varılacaktır.

c) $f(x) = \text{Sin } ax$, ya da $f(x) = \text{Cos } ax$ Olması Hali :

$$F(D^2) \text{ Sin } ax = F(-a^2) \text{ Sin } ax \qquad (10)$$

olduğu için, bu durumda özel integral D^2 nin yerine $(-a^2)$ yazmakla elde olunabilecektir. Cos ax için de ayni şekilde hareket edilebileceğine, $F(-a^2) = 0$ olması halinde ise bu yolun kovalanamıyacağına işaret edelim.

Örnek :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \text{Sin } 2x$$

$$y = \frac{1}{D^2 - D - 2} \text{ Sin } 2x$$

---

(10) $D \text{ Sin } ax = a \text{ Cos } ax$, $D^2 \text{ Sin } ax = -a^2 \text{ Sin } ax$

$D^3 \text{ Sin } ax = -a^3 \text{ Cos } ax$, $D^4 \text{ Sin } ax = (-a^2)^2 \text{ Sin } ax$
genel olarak,

$$(D^2)^n \text{ Sin } ax = (-a^2)^n \text{ Sin } ax$$

$$F(D^2) \text{ Sin } ax = [a_0 (D^2)^n + a_1 (D^2)^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(D^2) + a_n] \text{ Sin } ax$$

$$F(D^2) \text{ Sin } ax = [a_0 (-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(-a^2) + a_n] \text{ Sin } ax$$

$$F(D^2) \text{ Sin } ax = F(-a^2) \text{ Sin } ax$$

ayni şekilde

$F(D^2) \text{ Cos } ax = F(-a^2) \text{ Cos } ax$, olarak bulunacaktır.

$$y = \frac{1}{-4-D-2} \text{ Sin } 2x = \frac{1}{-6-D} \text{ Sin } 2x$$

$(-6+D)$ ile çarparak devam edelim.

$$y = \frac{D-6}{36-D^2} \text{ Sin } 2x = \frac{1}{40} (D-6) (\text{Sin } 2x)$$

$$y = \frac{1}{20} (\text{Cos } 2x - 3 \text{ Sin } 2x)$$

özel integral olarak elde olunur.

III

Sabit Katsayılı Simultane Doğrusal Differansiyel Denklemler:

Bu durumda çözüme varma yolunu bir örnek alarak görmeye çalışalım. D, yine $\frac{d}{dx}$ i, x bağımsız değişkeni, y ve z bağımlı değişkenleri göstersinler.

$(2D-3)\ z + Dy = e^{-x}$ .... (I)

$Dz + (D+2)\ y = \text{Cos } 2x$ .... (II)

İki bilinmiyenli doğrusal denklemlerin çözümündeki yolu uygulayarak devam edeceğiz.

$$(2D^2-3D)\ z + D^2 y = -e^{-x}$$

$$(2D^2-3D)\ z + (2D^2+D-6)\ y = -4 \text{ Sin } 2x - 3 \text{ Cos } 2x$$

$$D^2y - 2D^2y - Dy + 6y = -e^{-x} + 4 \text{ Sin } 2x + 3 \text{ Cos } 2x$$

$$-D^2y - Dy + 6y = -e^{-x} + 4 \text{ Sin } 2x + 3 \text{ Cos } 2x$$

Bunun tamamlayıcı fonksiyonu, bilinen usul uygulanınca,

$Ae^{-3x} + Be^{2x}$ olarak elde edilir.

$$\frac{1}{-D^2-D+6} e^{-x} + 4 \frac{1}{-D^2-D+6} \operatorname{Sin} 2x + 3 \frac{1}{-D^2-D+6} \operatorname{Cos} 2x$$

ise bize özel integrali verecektir. Yine, bilinen yolların uygulanması ile devam edebiliriz :

$$\frac{1}{-D^2-D+6} e^{-x} = \frac{1}{-1+1+6} e^{-x} = -\frac{1}{6} e^{-x}$$

$$4 \frac{1}{-D^2-D+6} \operatorname{Sin} 2x = 4 \frac{1}{4-D+6} \operatorname{Sin} 2x$$

$$= 4 \frac{10+D}{100-D^2} \operatorname{Sin} 2x = \frac{4}{104}(10+D) \operatorname{Sin} 2x$$

$$= \frac{4}{104} (10 \operatorname{Sin} 2x + 2 \operatorname{Cos} 2x)$$

$$3 \frac{1}{-D^2-D+6} \operatorname{Cos} 2x = \frac{3}{104} (10+D) \operatorname{Cos} 2x$$

$$= \frac{3}{104} (10 \operatorname{Cos} 2x - 2 \operatorname{Sin} 2x)$$

O halde, özel integral,

$$-\frac{1}{6} e^{-x} + \frac{17}{52} \operatorname{Sin} 2x + \frac{19}{52} \operatorname{Cos} 2x$$

olarak elde olunacaktır.

Böylece,

$$y = Ae^{-3x} + Be^{2x} - \frac{1}{6} e^{-x} + \frac{17}{52} \operatorname{Sin} 2x + \frac{19}{52} \operatorname{Cos} 2x$$

sonucuna varılacaktır.

z nin elde olunabilmesi için de ayni şekilde hareket olunacaktır.

Yukardaki denklemlerden (I) i (D+2) ve (II) yi D ile çarpınca ve gerekli işlemleri yapınca

$(D^2 + D - 6)\, z = e^{-x} + 2 \operatorname{Sin} 2x$

ifadesine varırız. Buradan da, yine bilinen usullerin uygulanması ile,

$$z = Ee^{-3x} + Fe^{2x} - \frac{1}{6} e^{-x} - \frac{5}{26} \operatorname{Sin} 2x - \frac{1}{26} \operatorname{Cos} 2x$$

sonucuna ulaşırız.

Bulunan bu y ve z değerlerini (I) ve (II) den birinde yerine koyacak olursak, (meselâ II yi kullanalım),

$e^{-3x}\,(-3E-A) + e^{2x}\,(4B+2F) = 0$
elde edilir.

Yani,

$$E = -\frac{1}{3} A, \quad F = -2B$$

elde olunur. Böylece,

$$z = -\frac{1}{3} Ae^{-3x} - 2Be^{2x} - \frac{1}{6} e^{-x} - \frac{5}{26} \operatorname{Sin} 2x - \frac{1}{26} \operatorname{Cos} 2x$$

sonucuna varılır.

IV

Burada, önce, M. Kalecki'nin iktisadî dalgalanmalar konusunda ileri sürdüğü eşitliğin elde edilişini görmeye çalışacağız. (11)

(11) M. Kalecki, Theory of Economic Dynamics. Özellikle, 9 ve 11 inci kısımlar.

Yatırım kararlarını D, saf olmayan (gayri safî) tasarrufu S, vergiler çıktıktan sonraki saf olmayan kârı P ve sabit sermaye stokunu K ile göstererek Kalecki aşağıdaki ifadeye ulaşıyor:

$$D = aS + b\frac{\Delta P}{\Delta t} - c\frac{\Delta K}{\Delta t} + d$$

Burada, a, b ve c katsayıları, d ise uzun vâdede değişebilen sabiti göstermektedirler.

Bu ifadenin anlamı, bir devredeki yatırım kararının, tasarrufun (S) ve kâr değişme nisbetinin ($\frac{\Delta P}{\Delta t}$) artan, sermaye stokundaki değişme nisbetinin ($\frac{\Delta K}{\Delta t}$) ise azalan bir fonksiyonu olduğudur. Doğrusal bir ilişkinin farzedildiği bu eşitlikte, $b\frac{\Delta P}{\Delta t}$, kabaca hızlandıran prensibini ifade etmektedr. (12)

Sermayedeki yıpranma (depreciation) M ile ve bahis konusu devredeki sabit sermaye yatırımı F ile ifade edildiği takdirde,

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = F - M$$

olacaktır.

Böylece, aşağıdaki ifadelere varılacaktır.

$$F_{t+g} = aS_t + b\frac{\Delta P_t}{\Delta t} - c(F_t - M) + d \qquad (13)$$

(12) M. Kalecki, Ad.Ge.Es. s. 100.

(13) $F_{t+g} = D_t$, yani yatırımlar (F), yatırım karalarını (D), gecikme (g) ile takip ederler.

$$\frac{F_{t+g} + cF_t}{1+c} = \frac{a}{1+c} S_t + \frac{b}{1+c} \frac{\triangle P_t}{\triangle t} + \frac{cM+d}{1+c}$$

Eşitliğin sol tarafı için ortalama bir gecikme (n) kullanılabileceği için (14)

$$F_{t+n} = \frac{a}{1+c} S_t + \frac{b}{1+c} \frac{\triangle P_t}{\triangle t} + \frac{cM+d}{1+c} \quad (0 < n < g)$$

şeklinde devam olunabilecektir.

Buraya kadar sabit sermaye konusundaki yatırımlar üzerinde durduk, şimdi stoklar için yatırım meselesini görmeğe uğraşalım. Stoklardaki yatırım J ile, özel sektörün hasılası 0 ile gösterilip, bu konudaki gecikmenin sabit sermaye bahsindekine eş olduğu farzedilince,

$$J_{t+n} = e \frac{\triangle 0_t}{\triangle t}$$

ifadesine varılacaktır. Yani, stoklar için yatırım, özel sektör hasıla değişme nisbetinin bir fonksiyonudur. Diğer bir deyimle, stoklardaki yatırımlar yalnızca hızlandıran prensibi ile ortaya konabilmektedirler.

Toplam yatırıma (I_t), sabit sermaye yatırımları ve stok yatırımlarının birbirlerine eklenmesi ile varılacağına göre,

$$I_{t+n} = \frac{a}{1+c} S_t + b_1 \frac{\triangle P_t}{\triangle t} + e \frac{\triangle 0_t}{\triangle t} + d_1$$

(14) Eşitliğin sol tarafı, F_{t+g} ve F_t nin ağırlıklı bir ortalamasını ifade eder.

$$\frac{b}{1+c} = b_1 \,, \quad \frac{cM+d}{1+c} = d_1$$

yazılabilecektir.

Böylece, bu teoriye göre, toplam yatırım hem iktisadî faaliyet seviyesine (S_t, bu seviyeye bağlı bulunduğu için) hem de iktisadî faaliyet seviyesindeki değişme nisbetlerine bağlı bulunmaktadır.

Yukarda elde edilen son eşitlikte S = I den yararlanmak ve

$$P_t = \frac{I_{t-r} + A}{1-q} \quad (15), \qquad O_t = \frac{P_t + B_1}{1 - V_1} + E \quad (16)$$

---

(15) C_t, kapitalistlerin istihlâkini, k, kapitalistlerin istihlâkinde gelirlerindeki değişmeye karşı mevcut olan gecikmeyi gösterdiği takdirde,

$$C_t = qP_{t-k} + A \quad \text{olacaktır.}$$

A sabit, q katsayıdır.

Dış ticaretin ve bütçenin denk olduğu, işçilerin tasarruf yapmadıkları farz olununca, vergiler çıktıktan sonraki kâr,

$$P = I + C \quad \text{olacaktır.}$$

I, yatırımı, C kapitalistin istihlâkini ifade eder.

Bunlardan,

$$P_t = I_t + qP_{t-k} + A$$

eşitliğine varılabilecektir.

q muhtemelen birden önemli derecede küçük olacağı için, yukardaki eşitlik, kârın cari ve yakın geçmişteki yatırımın fonksiyonu olması anlamını ifade edecektir. Yani, kâr, yatırımı bir gecikme ile takip edecektir.

$$P_t = f(I_{t-r})$$

$$f(I_{t-r}) = I_t + qf(I_{t-r-k}) + A$$

Bu hal, yatırımın bir süre sabit bir seviyede devam etmesi durumu için de kullanmak yoluyla Kalecki iktisadî dalgalanmalar eşitliğine varıyor.

Bahis konusu eşitliğe ulaşmak için, uzun vade değişmenin olmadığı, yalnızca devrevî dalgalanmanın mevcut bulunduğu statik bir hali ele alıyor. Bu halde uzun vade değişmelere maruz bulunan A, B ve E değişmez sabit kabul ediliyorlar.

Böylece,

$$\frac{\Delta Pt}{\Delta t} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{\Delta I_{t-r}}{\Delta t}$$

---

geçerli olacaktır. Yani, son eşitlik, $I_t = I_{t-r} = I_{t-r-k}$ olunca da doğru bulunacaktır.

$$f(I_t) = I_t + qf(I_t) + A$$

I_{t-r} seviyesi için,

$f(I_{t-r}) = I_{t-r} + qf(I_{t-r}) + A$ olacak, bundan da,

$$P(t) = \frac{I_{t-r} + A}{I - q}$$

sonucuna varılacaktır. (Bu dip not için, bak M. Kalecki, Ad.Ge.Es. S. 53-54)

(16) O, özel sektörün safi olmayan hasılasını, E, vasıtalı vergileri, Y, özel sektörün safi olmayan gelirini ifade ederse,

$$O_t = Y_t + E \quad \text{olacaktır.}$$

$Y_t = \dfrac{P_t + B_1}{1 - V_1}$ olduğu için, (P, vergiler çıktıktan sonraki kârı, V_1 ve B_1 ise, hem millî gelir dağılışından, hem de vergi sisteminin kâra olan tesirlerinden etkilenen sabitleri ifade ederler.)

$O_t = \dfrac{P_t + B_1}{1 - V_1} + E$ ye varmak kolay olacaktır. (Bu dip not için bak, M. Kalecki, Ad.Ge.Es. S. 40, 59, 60, 63, 64, 67)

$$\frac{\Delta 0_t}{\Delta t} = \frac{1}{(1-q)(1-V_1)} \frac{\Delta I_{t-r}}{\Delta t}$$ oluyorlar.

Bunları, S = I den yararlanılan toplam yatırım eşitliğindeki yerlerine koyduğumuzda;

$$I_{t+n} = \frac{a}{1+c} I_t + \frac{1}{1-q} (b_1 + \frac{e}{1-V_1}) \frac{\Delta I_{t-r}}{\Delta t} + d_1$$

ifadesi elde olunacaktır.

Yatırım, yıpranma (deprecation) seviyesinde sabit olarak devam ettiğinde $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ sıfıra eşit bulunacak ve yukarki eşitlik aşağıdaki şekli alacaktır:

$$M = \frac{a}{1+c} M + d_1$$

Son eşitliği bir öncekinden çıkarıp, (I−M) ye i dediğimizde ($\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\Delta I}{\Delta t}$ olacaktır, M sabit olduğu için) aradığımız iktisadî dalgalanmalar ifadesine varmış olacağız.

$$i_{t+n} = \frac{a}{1+c} i_t + u \frac{\Delta i_{t-r}}{\Delta t}$$

$$u = \frac{1}{1-q} (b_1 + \frac{e}{1-V_1})$$

İkinci olarak, Domar'ın (17) büyüme modelini ele alalım. c, potansiyel sosyal ortalama yatırım müstahsiliyetini, s marjinal tasar-

(17) E. D. Domar, Essays In The Theory of Economic Growth. Kısım, III-IV. Özellikle, S. 75, 91

ruf temayülünü, I yatırımı gösterdiği takdirde Domar'ın temel eşitliği,

$$Ic = \frac{dI}{dt} \frac{1}{s}$$

olarak yazılabilecektir.

Birinci sıra doğrusal bir differansiyel denklem olan bu eşitliğin çözümünü, bildiğimiz usulü uygulayarak, elde etmeye çalışalım :

$$\frac{dI}{dt} - csI = 0$$

Burada, $p = -cs$, $\int pdt = -cst$ dir.

O halde,

$$e^{-cst} \frac{dI}{dt} - e^{-cst} csI = 0$$

$$\frac{d}{dt} (I e^{-cst}) = 0$$

$I e^{-cst} = A$

$I = Ae^{cst}$ olacaktır.

$t = 0$ olunca, $A = I_0$ dır.

Yani,

$I = I_0 e^{cst}$

sonucuna varılacaktır.

Böylece tam istihdamın muhafaza edilebilmesi için, yatırımın yıllık nisbî artışının cs olması gerektiği gösterilmiş olur.

Son olarak A. W. Phillips, (18) tarafından ileri sürülmüş çoğaltan ve çoğaltan - hızlandıran modelleri üzerinde durmaya çalışalım.

A. Çoğaltan Modeli :

Phillips modeli gecikmeli arz ile gecikmesiz talep arasındaki ilişkiye dayanmaktadır.

p, toplam istihsali, E, toplam talebi, a, istihsalin talep değişmelerine karşı göstereceği cevabın (response) hızını (yani, istihsaldeki gecikmenin zaman sabiti $\frac{1}{a}$ yıldır.) gösterdiği takdirde, hasılanın zaman esnasındaki değişmesi;

$$\frac{dp}{dt} = -a(p-E)$$

şeklinde ifade olunabilecektir. (19) $\frac{d}{dt} = D$ denilince,

$$p = \frac{a}{D+a} E$$

ifadesine varılacaktır. Yatırım ve istihlâk şeklinde olabilen otonom harcamaları A ile, marjinal tasarruf temayülünü s (20) ile gösterirsek, toplam talep,

---

(18) A.W. Phillips, Stabilisation policy in a closed Economy, The Economic Journal, Juny 1954, s. 290-323.

(19) Bak: A.W. Philips, Ad.Ge.Ma. s. 316. Keza, bak: R.G.D. Allen, Mathematical Economics, s. 26-27-70.

(20) A.W. Phillips, sözü edilen makalede, marjinal tasarruf temayülü yerine daha geniş kapsamı olabilen marjinal sızıntıyı (leakage) kullanıyor. (Bak: A.W. Phillips, Ad.Ge.Ma. s. 290-291) Biz burada marjinal tasarruf temayülünü tercih edeceğiz.

$$E = (1-s)\,p + A$$

olarak ifade edilebilecektir. Bu E değerini yukardaki ifadede yerine koyarsak,

$$p = \frac{a}{D+a}\,(1-s)\;p + A$$

elde olunacaktır. A sabit kabul edilince, DA = 0 olacağı için, yukardaki ifadeden aşağıki sonuca geçilebilecektir.

$$Dp + asp = Aa$$

elde olunan bu birinci sıra differansiyel denklemin çözümünü, önce tamamlayıcı fonksiyonu sonra da özel integrali bularak, elde etmeye çalışalım :

$$\frac{dp}{dt} + asp = 0$$

p ile bölüp, dt ile çarpalım.

$$\frac{dp}{p} + asdt = 0$$

integralini alalım.

$$\text{Log}\,p + ast = B_1 \qquad (B_1 = \text{sabit})$$

$$p = e^{-ast+B_1}$$

$$p = Be^{-ast} \qquad (e^{B_1} = B = \text{sabit})$$

Bu sonuç bize tamamlayıcı fonksiyonu verecektir.

p = u dersek, (u bulunmak istenen sabittir.)

$$asu = Aa \qquad \text{olur.}$$

$$u = \frac{A}{s}$$

Özel integral olarak bulunur.

O halde, üzerinde durulan differansiyel denklemin çözümü,

$$p = Be^{-ast} + \frac{A}{s}$$

olarak elde edilir. (21)

B. Çoğaltan - Hızlandıran Modeli :

Burada talebe, hızlandıranın yarattığı yatırımın eklenmesi gerecektir. Bu unsur, $I = \frac{Kv}{D+K} Dp$ (22) olarak ifade olunduğunda, talep,

---

(21) $t = 0$ olunca $p = p_0$ olacaktır.

$$p_0 = B + \frac{A}{s}, \quad B = p_0 - \frac{A}{s}$$ olarak bulunacak

$$p = \left(p_0 - \frac{A}{s}\right) e^{-ast} + \frac{A}{s}$$

$$p = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-ast}\right) + p_0 e^{-ast}$$

Böylece, $t \rightarrow \infty$ gittikçe, p statik çoğaltan seviyesi olan $\frac{A}{s}$ ye yönelecektir.

$a = 4$, $s = 0.25$, $A = -1$ olunca, üzerinde durulan differansiyel denklem $Dp + p = -4$ olacaktır.

Çözüm, $p = Be^{-t} - 4$ olarak elde edilecektir.

Başlangıç şartları,

$t = 0$ olduğunda, $p = 0$ olunca, $O = B - 4$, $B = 4$ olacak Çözüme

$p = 4e^{-t} - 4 = -4(1 - e^{-t})$ olarak ulaşılacaktır.

$$E = (1-s)\,p + A + \frac{Kv}{D+K}\,Dp$$

şeklini alacaktır.

Bunu, ayni kalan arzdaki yerine koyalım.

$$p = \frac{a}{D+a}\,E = \frac{a}{D+a}\,(1-s)\,p + A + \frac{Kv}{D+K}\,Dp$$

---

(22) v hızlandıran katsayısını ifade ettiği takdirde, t zamanındaki potansiyel yatırım,

$$v\,\frac{d}{dt}\,p(t)$$

olacaktır. Ayni devredeki fiilî yatırım $I(t)$ ve artışı $\frac{d}{dt} I(t)$ gösterilince, $\frac{d}{dt} I(t)$ potansiyel yatırım ile fiilî yatırım arasındaki farka bağlı bulunacaktır. Burada bir gecikme farzedildiğinde, bu gecikmenin zaman sabiti $\frac{I}{K}$ yıl olarak ifade edildiğinde, (yani, K cevabın hızını göstermektedir.)

$$\frac{d}{dt}\,I(t) = -K\left[I(t) - v\,\frac{d}{dt}\,p(t)\right]$$

olacaktır.

$\frac{d}{dt} = D$ denildiğinde,

$$DI = -K(I - vDp)$$

$$I = \frac{Kv}{D+K}\,Dp$$

sonucuna varılacaktır. (Bu dip not için bak: A.W. Phillips, Ad.Ge.Ma. s. 303 ve R.D.G. Allen Ad.Ge.Es. s. 63)

Bir takım işlemler yapıldıktan sonra bu ifade,

$D^2p + (K+as-avK)\ Dp + (asK)\ p = aKA$

şeklini alır. (A = sabit)

$(K+as-avK) = c$, $asK = b$ dersek,
$D^2p + cDp + bp = aKA$ differansiyel denklemine ulaşırız.

(k^2+ck+b) nin kökleri k_1 ve k_2 olduklarında, yukardaki denklemin tamamlayıcı fonksiyonu,

$$Ce^{k_1 t} + De^{k_2 t}$$

olacaktır.

Özel integral ise $\dfrac{aKA}{asK} = \dfrac{A}{S}$ olarak elde edilecektir.

O halde, genel çözüme,

$$p = Ce^{k_1 t} + De^{k_2 t} + \frac{A}{s}$$

olarak ulaşılacaktır. (23)

---

(23) a=4, s=0,25, K=1 v=0,6, A= —1 olunca, üzerinde durulmakta olan differansiyel denklem,

$D^2p - 0{,}4\ Dp + p = -4$ halini alır.

$$k_1 = \frac{0{,}4 + \sqrt{0{,}16-4}}{2}, \quad k_2 = \frac{0{,}4 - \sqrt{0{,}16-4}}{2}$$

$k_1 = 0{,}2 + i\ 0{,}98$, $k_2 = 0.2 - i\ 0{,}98$

$p = e^{0{,}2t}\ (C_1 \operatorname{Cos} 0{,}98\ t + C_2 \operatorname{Sin} 0{,}98\ t) - 4$

$t=0$ da, $p=0$, $Dp=-4$ olunca,

$0 = 1\ (C_1 \operatorname{Cos} 0 + C_2 \operatorname{Sin} 0) - 4$

$C_1 = 4$

$Dp = 0{,}2e^{0.2t}\ (C_1 \operatorname{Cos} 0.98\ t + C_2 \operatorname{Sin} 0{,}98\ t) + e^{0.2t}\ (-0{,}98\ C_1 \operatorname{Sin} 0{,}98\ t + 0{,}98\ C_2 \operatorname{Cos} 0{,}98t) - 4 = 0{,}2\ (C_1) + 1\ (0.98\ C_2)$

$C_2 = -4.9$, $p = e^{0.2t}\ (4 \operatorname{Cos} 0{,}98\ t - 4{,}9 \operatorname{Sin} 0{,}98\ t) - 4$

sonucuna ulaşılır.